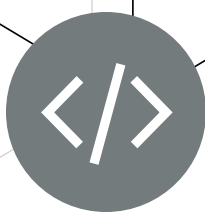


$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$



9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Minileçon

GÉOMÉTRIE ET MESURE

Utiliser les relations entre le volume des
prismes et des pyramides et le volume
des cylindres et des cônes

RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève résout des problèmes contenant différentes unités de mesure en utilisant la relation entre des cylindres et des cônes ainsi qu'entre des prismes et des pyramides.

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- › calcule le volume de pyramides, prismes, cônes et cylindres;
- › établit la relation entre le volume d'une pyramide et celui d'un prisme ayant la même base et la même hauteur;
- › établit la relation entre le volume d'un cône et celui d'un cylindre ayant la même base et la même hauteur.

MATÉRIEL

- › calculatrice;
 - › crayons rouges;
 - › feuilles blanches;
 - › règle.
-

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débiter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Nombres	Des applications de nombres entiers
Géométrie et mesure	L'analyse des propriétés des cercles et des triangles
Géométrie et mesure	Les relations entre prismes et pyramides, cylindres et cônes

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- Le volume d'une pyramide ou d'un cône peut être calculé à l'aide de la formule
$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}.$$
- Le volume d'un prisme ou d'un cylindre peut être calculé à l'aide de la formule
$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$
- Lorsque l'aire de la base et la hauteur sont équivalentes, le rapport entre le volume d'un prisme et celui d'une pyramide est de 3 : 1.
- Lorsque l'aire de la base et la hauteur sont équivalentes, le rapport entre le volume d'un cylindre et celui d'un cône est de 3 : 1.

Déroulement pour l'exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **Les relations entre prismes et pyramides, cylindres et cônes** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves le calcul nécessaire afin de déterminer le volume d'un solide ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l'activité. Dans cette minileçon, les élèves découvrent la relation entre un prisme et une pyramide et entre un cylindre et un cône ayant la même base et la même hauteur.
- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
 - Où peux-tu retrouver des prismes, des pyramides, des cylindres et des cônes dans ton quotidien?
 - Quelles sont les ressemblances et les différences entre les prismes, les pyramides, les cylindres et les cônes?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit La relation entre le volume des prismes et des pyramides.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour déterminer le volume d'un contenant et établir la relation entre le volume d'une pyramide et celui d'un prisme ayant la même base et la même hauteur.

- 
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.
 - Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux divers besoins des élèves.

Stratégies de résolution de problèmes pour l'exemple 1

L'élève utilise le schéma proposé afin de dresser une liste des différentes sections du contenant dont le volume doit être calculé. L'élève trace un schéma de la base afin de déterminer la superficie d'un polygone régulier. L'élève utilise ensuite son raisonnement logique afin de déterminer la relation entre le volume d'un prisme et celui d'une pyramide ayant la même base et la même hauteur.

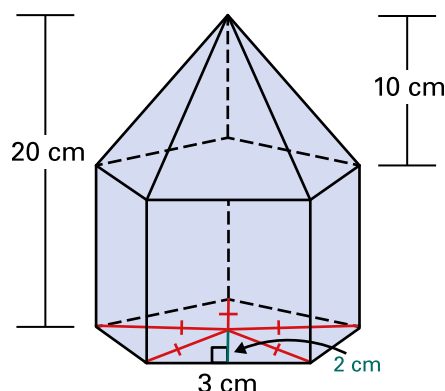
Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application le processus mathématique suivant :
 - Raisonnement et justification
- L'élève doit déterminer le volume d'un solide. À l'aide du volume de chacune des composantes du contenant, l'élève devra établir la relation entre le volume d'une pyramide et celle d'un prisme ayant la même base et la même hauteur. L'élève pourra démontrer sa compréhension du problème à l'aide d'exemples fondés sur le raisonnement spatial, algébrique et proportionnel.
- Afin de permettre à l'élève d'établir une relation entre le volume d'une pyramide et celui d'un prisme, il est important de fournir des pistes de réflexion ou de susciter un questionnement adéquat tout au long de la résolution du problème. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion :
 - Si tu connais le volume d'un prisme, comment peux-tu déterminer celui d'une pyramide ayant la même base et la même hauteur?
 - Que se passe-t-il si tu augmentes la hauteur du prisme et de la pyramide d'un même facteur?
 - Que se passe-t-il si tu augmentes la hauteur du prisme, mais pas celle de la pyramide?

EXEMPLE 1

La relation entre le volume des prismes et des pyramides

Le contenant ci-dessous est constitué d'un prisme et d'une pyramide pentagonale réguliers.



- Détermine le volume total du solide.
- Détermine la relation entre le volume du prisme et le volume de la pyramide ayant la même base et la même hauteur.

Corrigé

- a) Je détermine le volume du solide.

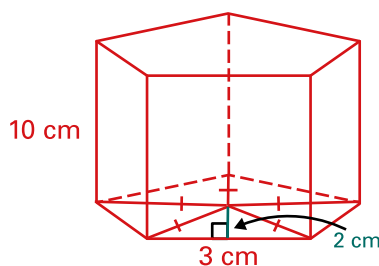
Je dois séparer mon contenant en 2 solides pour lesquels je peux calculer le volume. Je calcule le volume total de mon contenant à l'aide de la formule suivante :

Volume total = Volume du prisme + Volume de la pyramide

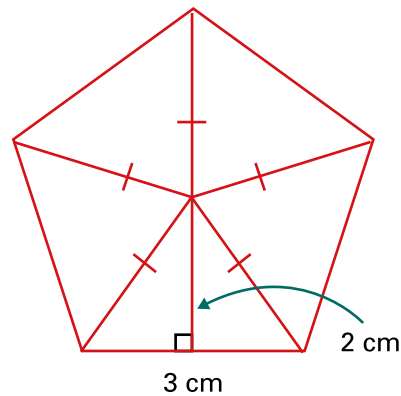
Je détermine le volume du prisme.

Voici les données qui sont à ma disposition :

- longueur d'un côté = 3 cm;
- apothème = 2 cm;
- hauteur du prisme = 10 cm.



Afin de déterminer le volume du prisme, je dois déterminer l'aire de la base du pentagone. La base d'un pentagone régulier peut être séparée en 5 triangles congruents.



Je calcule l'aire d'un triangle.

$$A_{\text{triangle}} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\text{triangle}} = \frac{3 \times 2}{2}$$

$$A_{\text{triangle}} = 3 \text{ cm}^2$$

Étant donné que la base d'un pentagone est constituée de 5 triangles congruents, je multiplie l'aire par 5.

$$A_{\text{surface}} = A_{\text{triangle}} \times 5$$

$$A_{\text{surface}} = 3 \times 5$$

$$A_{\text{surface}} = 15 \text{ cm}^2$$

Je peux déterminer le volume du prisme pentagonal.

$$V_{\text{prisme}} = A_{\text{surface}} \times H$$

$$V_{\text{prisme}} = 15 \times 10$$

$$V_{\text{prisme}} = 150 \text{ cm}^3$$

Je détermine le volume de la pyramide.

Étant donné que l'aire de la base du prisme et celle de la pyramide sont

congrues. Je calcule que l'aire de la base de la pyramide est de 15 cm^2 .

À l'aide de la formule pour trouver l'aire d'une pyramide et l'aire de la base, je détermine le volume de la pyramide.

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{A_{\text{surface}} \times H}{3}$$

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{15 \times 10}{3}$$

$$V_{\text{pyramide}} = 50 \text{ cm}^3$$

Je détermine que le volume de la pyramide est de 50 cm^3 .

Je détermine le volume total à l'aide de la formule suivante :

$$V_t = V_{\text{prisme}} + V_{\text{pyramide}}$$

$$V_t = 150 + 50$$

$$V_t = 200 \text{ cm}^3$$

Selon mes calculs, le volume total du contenant est de 200 cm^3 .

b) Je détermine la relation entre le volume du prisme et celui de la pyramide.

En utilisant un tableau de rapport, je peux calculer le rapport entre les deux volumes afin de déterminer la relation entre le volume du prisme et celui de la pyramide.

$\div 10$	$\div 5$	
150	15	3
50	5	1
$\div 10$	$\div 5$	

Je détermine que, pour ce solide, la relation entre le volume du prisme et le volume de la pyramide est de 3 par rapport à 1 respectivement.

Pour un prisme et une pyramide ayant la même base et la même hauteur, le volume du prisme est le triple de celui de la pyramide.

Je conclus que $V_{\text{prisme}} = 3V_{\text{pyramide}}$ ou $\frac{V_{\text{prisme}}}{3} = V_{\text{pyramide}}$.

? **Est-ce que la relation entre le volume du prisme et le volume de la pyramide de même base et de même hauteur est toujours de 3 par rapport à 1 peu importe l'aire de la base?**

Explique ton raisonnement.

Retour sur l'exemple 1

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer l'aire de la base, le volume du contenant et le lien entre le volume du prisme et celui de la pyramide. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre le volume d'un prisme et celui d'une pyramide et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** soient abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Quand le rapport entre le volume d'un prisme ou celui d'une pyramide est-il toujours 3 : 1?
 - Est-ce que le rapport est le même si la base est d'une forme irrégulière?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit La relation entre le volume des cylindres et des cônes.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour déterminer la relation entre le volume des cylindres et des cônes ayant la même base et la même hauteur.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.

- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux divers besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

L'élève établit des liens avec ses connaissances en géométrie et mesure et utilise ensuite son raisonnement logique afin de déterminer la relation entre le volume d'un cône et celui d'un cylindre ayant la même base et la même hauteur.

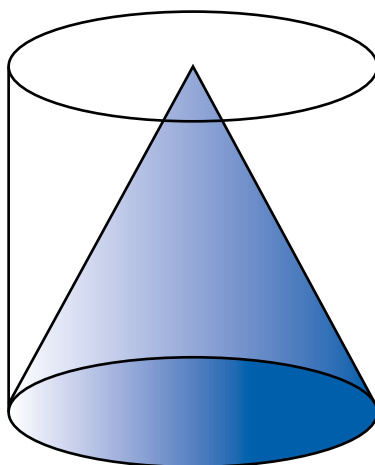
Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application le processus mathématique suivant :
 - Communication
- L'élève communique sa pensée critique et mathématique en développant les différentes étapes de son travail. L'élève se soucie davantage de la bonne utilisation des symboles et de l'organisation structurée de son travail.
- Poser des questions telles que :
 - Peux-tu m'expliquer le problème dans tes propres mots?
 - Comment peux-tu expliquer ta démarche?
 - Compare ta démarche avec celle de tes collègues de la salle de classe. Quelles sont les ressemblances? Les différences?

EXEMPLE 2

La relation entre le volume des cylindres et des cônes

Quel est le volume non occupé par un cône à l'intérieur d'un cylindre dont leur hauteur est 30 cm et leur rayon est 15 cm? Crée une généralisation de la relation.



Je détermine comment se compare le volume d'un cône avec celui d'un cylindre de même base et de même hauteur.

Voici les données qui sont à ma disposition.

Rayon = 15 cm

Hauteur = 30 cm

Je détermine l'aire de la base de chacun des solides.

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{base}} = \pi(15)^2$$

$$A_{\text{base}} = 225\pi \text{ cm}^2$$

Je détermine le volume de chacun des solides individuels.

$$V_{\text{cône}} = \frac{A_{\text{base}} \times H}{3}$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{225\pi \times 30}{3}$$

$$V_{\text{cône}} = 2\,250\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cylindre}} = A_{\text{base}} \times H$$

$$V_{\text{cylindre}} = 225\pi \times 30$$

$$V_{\text{cylindre}} = 6\,750\pi \text{ cm}^3$$

Je remarque que le volume d'un cylindre est le triple du volume d'un cône s'ils ont la même aire de la base et la même hauteur.

Je détermine l'espace non utilisé par le cône.

$$V_{\text{vide}} = V_{\text{cylindre}} - V_{\text{cône}}$$

$$V_{\text{vide}} = 6\,750\pi - 2\,250\pi$$

$$V_{\text{vide}} = 4\,500\pi \text{ cm}^3$$

L'espace non utilisé équivaut à $4\,500\pi \text{ cm}^3$ ou environ $14\,137,17 \text{ cm}^3$.

Afin de généraliser les résultats, je refais les opérations pour déterminer le volume en utilisant des valeurs différentes pour l'aire de la base ainsi que pour la hauteur.

Aire de la base (cm ²)	Hauteur (cm)	Volume du cylindre (cm ³)	Volume du cône (cm ³)	Espace non rempli (cm ³)	Conclusion
225π	30	$225\pi \times 30 = 6750\pi$	$\frac{225\pi \times 30}{3} = 2250\pi$	$6750\pi - 2250\pi = 4500\pi$	L'espace non utilisé par le cône représente deux fois le volume du cône et deux tiers du volume du cylindre.
$225\pi k$	30	$225\pi k \times 30 = 6750\pi k$	$\frac{225\pi k \times 30}{3} = 2250\pi k$	$6750\pi k - 2250\pi k = 4500\pi k$	L'espace non utilisé par le cône représente deux fois le volume du cône et deux tiers du volume du cylindre.
225π	$30p$	$225\pi \times 30p = 6750\pi p$	$\frac{225\pi \times 30p}{3} = 2250\pi p$	$6750\pi p - 2250\pi p = 4500\pi p$	L'espace non utilisé par le cône représente deux fois le volume du cône et deux tiers du volume du cylindre.

Pour tout cylindre et cône ayant la même base et la même hauteur, l'espace non utilisé par le cône à l'intérieur d'un cylindre représente deux fois le volume du cône ou deux tiers du volume du cylindre. Pour un cylindre et un cône ayant la même base et la même hauteur, le volume du cylindre est le triple de celui du cône.

Retour sur l'exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer le volume des cônes et des cylindres. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les volumes ainsi que les facteurs d'agrandissement et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** soient abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Quel serait l'espace vide d'un prisme si l'on plaçait une pyramide de même hauteur et de même base?
 - Combien de cônes as-tu besoin pour remplir le volume d'un cylindre?
 - Comment se compare le volume d'un cône avec celui d'un cylindre dont l'aire est 5 fois plus grande? As-tu besoin de faire le calcul des volumes pour déterminer le facteur d'agrandissement?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

Une compagnie souhaite minimiser la quantité d'emballage d'un produit. Est-il profitable de placer leur produit liquide dans un cône ou un cylindre?

Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves de faire quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou autres preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement et des élèves pour qu'elles et ils s'améliorent en vue de les aider à s'améliorer.

Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Corrigé

1. Comment se compare le volume d'un cône à celui d'un cylindre ayant la même base et dont la hauteur est 3 fois celle du cône?

Processus mathématique préconisé : raisonnement et justification

L'élève justifie sa pensée critique et mathématique en expliquant les différentes étapes de son travail. L'élève démontre sa compréhension en établissant une relation entre les volumes de différents cônes et cylindres.

Je détermine comment se compare le volume d'un cône avec celui d'un cylindre dont la hauteur est 3 fois plus grande.

Afin de répondre à cette question, je suppose que l'aire de la base est constante. J'associe une valeur constante aléatoire à l'aire des bases et à la hauteur du cône. La hauteur du cylindre doit être 3 fois plus grande que celle du cône.

$$A_{\text{base}} = 10 \text{ cm}^2$$

$$H_{\text{cône}} = 3 \text{ cm}$$

$$H_{\text{cylindre}} = 3 \times H_{\text{cône}}$$

$$H_{\text{cylindre}} = 9 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{A_{\text{base}} \times H_{\text{cône}}}{3}$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{10 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ cm}}{3}$$

$$V_{\text{cône}} = 10 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cylindre}} = A_{\text{base}} \times 3H_{\text{cône}}$$

$$V_{\text{cylindre}} = 10 \text{ cm}^2 \times 9 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cylindre}} = 90 \text{ cm}^3$$

Lorsque la hauteur d'un cylindre est 3 fois plus grande que la hauteur du cône ayant la même base, le volume du cylindre est 9 fois plus grand.

? *Afin de développer davantage la pensée critique de l'élève, l'enseignante ou l'enseignant peut demander à l'élève de comparer le volume d'un cône avec celui d'un prisme et le volume d'une pyramide celui d'un cylindre. Peuvent-ils constater les mêmes relations? Pourquoi pas? Ceci peut développer davantage la compréhension de ces formules ainsi que le processus mathématique ciblé.*

2. Une pyramide et un prisme ont une base pentagonale identique dont l'aire est 25 m^2 . Si les deux solides ont la même hauteur, quel est le rapport entre leurs volumes?

Processus mathématique préconisé : établissement des liens

Le processus mathématique préconisé est l'établissement de liens. L'élève établit des liens entre la terminologie utilisée dans l'énoncé et les étapes à prendre afin de résoudre le problème en question. L'élève doit établir le lien entre l'information manquante et où aller chercher cette information dans le problème (par exemple, déterminer la hauteur à utiliser afin de comparer les volumes).

Voici quelques exemples de questions à poser afin de susciter une réflexion de la part de l'élève :

- Comment peux-tu trouver le volume d'un prisme? D'une pyramide?
- De quelles mesures as-tu besoin pour résoudre le problème?
- Peux-tu établir des liens entre certaines de ces mesures?

Je détermine le volume d'un prisme à base pentagonale dont l'aire de la base est égale à 25 m^2 et la hauteur est égale à 15 m .

Afin de calculer le volume du prisme à base pentagonale, j'utilise la formule

$$V_{\text{prisme}} = A_{\text{base}} \times H.$$

J'évalue le volume du prisme.

$$V_{\text{prisme}} = 25 \text{ m}^2 \times 15 \text{ m}$$

$$V_{\text{prisme}} = 375 \text{ m}^3$$

Je détermine le volume d'une pyramide à base pentagonale dont l'aire de la base est égale à 25 m^2 et la hauteur est égale à 15 m .

Afin de calculer le volume du prisme à base pentagonale, j'utilise la formule $V_{\text{pyramide}} = A_{\text{base}} \times H$.

J'évalue le volume du prisme

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{25 \text{ m}^2 \times 15 \text{ m}}{3}$$

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{375 \text{ m}^3}{3}$$

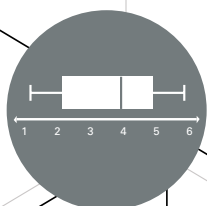
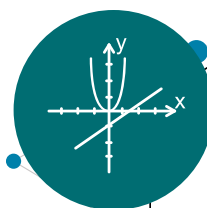
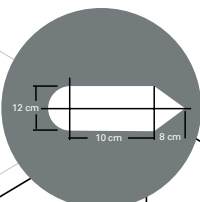
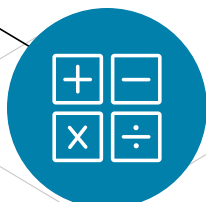
$$V_{\text{pyramide}} = 125 \text{ m}^3$$

Afin de généraliser les résultats, je refais les opérations pour déterminer les volumes en utilisant des valeurs différentes pour chaque hauteur et pour l'aire de la base.

Aire de la base (m^2)	Hauteur (m)	Volume du prisme (m^3)	Volume de la pyramide (m^3)	Conclusion
25	15	$25 \times 15 = 375$	$\frac{25 \times 15}{3} = 125$	Le volume du prisme est trois fois plus grand que celui de la pyramide.
25	30	$25 \times 30 = 750$	$\frac{25 \times 30}{3} = 250$	Le volume du prisme est trois fois plus grand que celui de la pyramide.
25	45	$25 \times 45 = 1\,125$	$\frac{25 \times 45}{3} = 375$	Le volume du prisme est trois fois plus grand que celui de la pyramide.
25	60	$25 \times 60 = 1\,500$	$\frac{25 \times 60}{3} = 500$	Le volume du prisme est trois fois plus grand que celui de la pyramide.

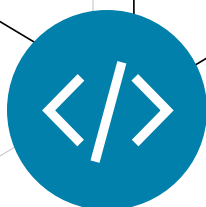
Le volume d'un prisme est toujours trois fois plus grand que le volume d'une pyramide ayant la même base et la même hauteur.

VERSION DE L'ÉLÈVE



$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$

9^e
ANNÉE



PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

GÉOMÉTRIE ET MESURE

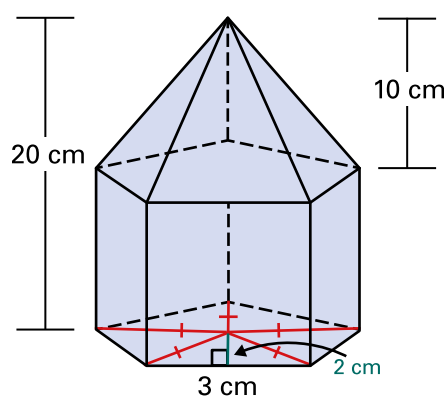
Utiliser les relations entre le volume des
prismes et des pyramides et le volume
des cylindres et des cônes

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

La relation entre le volume des prismes et des pyramides

Le contenant ci-dessous est constitué d'une base en prisme pentagonal régulier et d'un couvercle formé d'une pyramide pentagonale.



- Détermine le volume total du solide.
- Détermine la relation entre le volume du prisme et le volume de la pyramide pour une base et une hauteur similaires.



TA STRATÉGIE

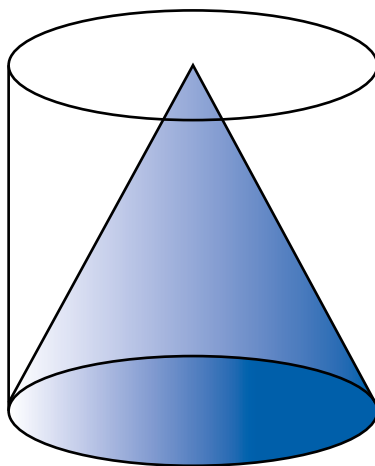


TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

La relation entre le volume des cylindres et des cônes

Quel est le volume non occupé par un cône à l'intérieur d'un cylindre dont leur hauteur est 30 cm et leur rayon est 15 cm? Crée une généralisation de la relation.



TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

1. Comment se compare le volume d'un cône à celui d'un cylindre ayant la même base et dont la hauteur est 3 fois celle du cône?



TA STRATÉGIE

2. Une pyramide et un prisme ont une base pentagonale identique dont l'aire est 25 m^2 . Si les deux solides ont la même hauteur, quel est le rapport entre leurs volumes?



TA STRATÉGIE