

9^e
ANNÉE

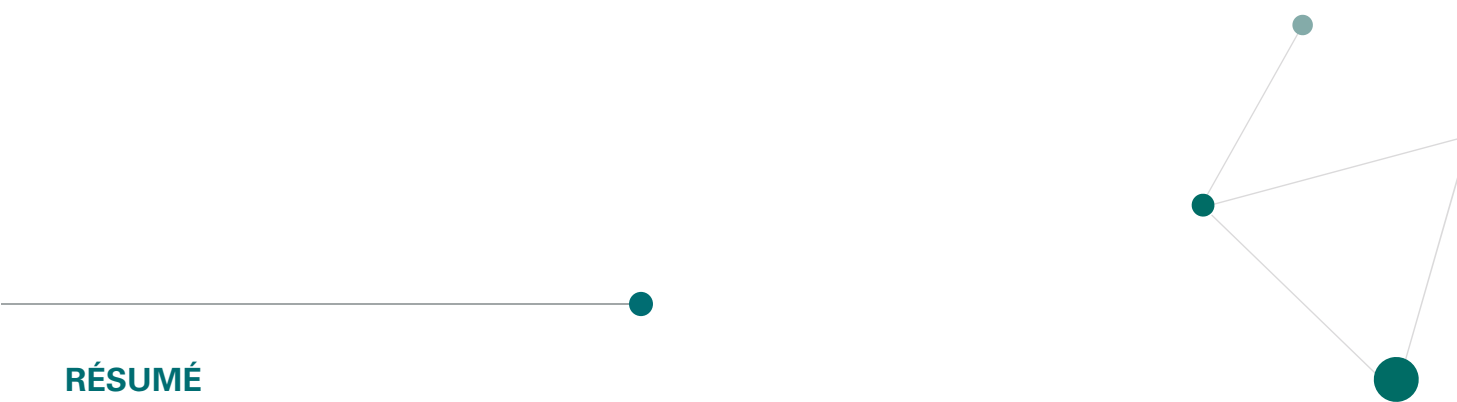
PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Minileçon

DONNÉES

Analyser et évaluer un modèle
représentant des données



RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève détermine si le modèle mathématique permet de répondre à la question, détermine quelles sont les limites du modèle et utilise le modèle pour faire des prédictions.

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- › justifie le choix du modèle pour répondre à la question;
- › détermine les limites du modèle;
- › utilise le modèle pour faire des prédictions.

MATÉRIEL

- › crayons;
- › feuilles blanches.

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débiter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Algèbre	L'équation à partir d'un graphique, d'une table de valeurs et d'une représentation concrète
Données	L'application de la modélisation mathématique
Données	L'analyse d'un problème afin de collecter des données
Données	La création d'un plan de collecte de données
Données	Les modèles mathématiques pour représenter des données
Données	L'analyse et l'évaluation d'un modèle représentant des données

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- L'analyse du modèle mathématique fait partie de la 4^e composante du processus de modélisation mathématique. Le modèle doit permettre de répondre à la question initiale.
- Tout modèle mathématique a ses limites et ne permet pas de répondre à toutes les situations ou éventualités reliées à la situation initiale.
- Le modèle permet de faire des prédictions et de prendre des décisions.
- Le processus de modélisation mathématique est itératif, il est donc probable qu'après l'ajout de nouveaux éléments d'information, le modèle devra être réajusté.

Déroulement pour l'exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **L'analyse et l'évaluation d'un modèle représentant des données** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves les composantes de la modélisation mathématique, plus particulièrement la 4^e composante ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l'activité.
- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
 - As-tu déjà pensé créer ta propre entreprise pour l'été?
 - Quelles sont les composantes de la modélisation mathématique?
 - Quels types de modèles mathématiques connais-tu?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit Des produits de nettoyage pour voiture.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour analyser le modèle et faire des prédictions.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficulté que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 1

L'élève utilisera diverses stratégies pour analyser la situation, soit en simulant la situation, soit en la comparant avec d'autres situations connues.

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application les processus mathématiques suivants :
 - Raisonnement et justification
 - Communication
- L'élève utilise sa compréhension des composantes du processus de modélisation mathématique et des diverses représentations pour justifier sa pensée. Elle ou il analyse la situation, pose des questions, ajoute des éléments et valide son raisonnement avec ses pairs.
- L'élève communique son raisonnement avec précision, pose des questions pertinentes afin d'approfondir sa compréhension de la situation et utilise un vocabulaire mathématique approprié.
- Afin d'appuyer l'élève dans le développement de ces processus mathématiques, voici quelques pistes de questionnement ou de réflexion possibles à fournir à l'élève tout au long de son travail :
 - Peux-tu clarifier un peu plus ton idée au sujet de ...?
 - Compare la justification de ton raisonnement avec un pair.
 - Peux-tu reformuler ta justification en ajoutant des arguments mathématiques?

EXEMPLE 1

Des produits de nettoyage pour voiture

Mike veut démarrer une petite entreprise de nettoyage de voitures durant l'été. Il se demande quels produits seraient les meilleurs à utiliser pour sa petite entreprise, ainsi que le prix qu'il devrait exiger.

Voici les suppositions de Mike et le modèle créé à partir des données qu'il a récoltées.

- Il veut faire un profit de 5 000 \$.
- Il utilisera les outils, l'eau et la cour de ses parents.
- À la suite d'une collecte de données, il estime qu'environ 2 400 personnes souhaitent utiliser un service de nettoyage de véhicules.
- Le coût pour les produits est d'environ 4 \$ par véhicule.

Voici le modèle de Mike :

$$D = -4x$$

$$R = ax$$

$$P = R + D$$

D représente les dépenses

R représente les revenus

P représente le profit

x représente le nombre de véhicules nettoyés

a représente le prix demandé pour le nettoyage du véhicule.

- Comment peux-tu utiliser ce modèle pour déterminer le prix que Mike devrait exiger pour chaque véhicule?
- Quelles autres données ou quels autres éléments d'information lui recommanderais-tu d'ajouter afin de préciser son modèle?
- Quelles limites ce modèle présente-t-il?

Corrigé

- Comment peux-tu utiliser ce modèle pour déterminer le prix que Mike devrait exiger pour chaque véhicule?

Je dois d'abord déterminer le nombre de véhicules que je peux nettoyer durant l'été.

Je considère qu'il y a 8 semaines de vacances et que je peux nettoyer 8 véhicules par jour, 5 jours par semaine.

$$\text{Nombre de véhicules par semaine} = 8 \times 5$$

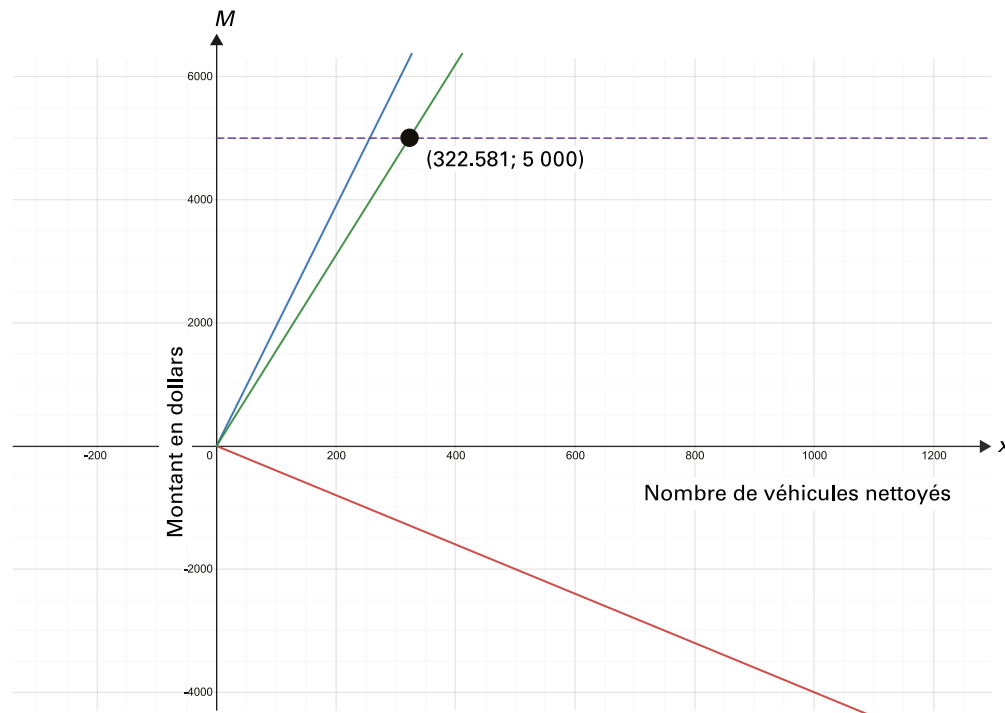
$$\text{Nombre de véhicules par semaine} = 40$$

$$\text{Nombre de véhicules pour l'été} = 40 \times 8$$

$$\text{Nombre de véhicules pour l'été} = 320$$

Je crée un [modèle interactif](#). Dans le graphique, la droite rouge représente les dépenses (D), la droite bleue représente le revenu (R) et la droite verte représente les profits (P). Je peux déplacer le curseur a pour déterminer le prix à exiger afin d'obtenir un profit de 5 000 \$.

Selon le graphique, le coût idéal serait de 19,50 \$ pour environ 320 véhicules.



- b) Quelles autres données ou quels éléments d'information lui recommanderais-tu d'ajouter afin de préciser son modèle?

Mike pourrait exiger différents prix selon la grosseur du véhicule. Par exemple, il pourrait demander un montant plus élevé pour les camions et les VUS, mais moins élevé pour les voitures. Il y aurait donc 2 variables, soit le nombre de voitures et le nombre de camions. Mais il faudrait récolter des données pour savoir s'il y a plus de camions ou de voitures dans son village et lesquels entre les propriétaires de voitures et les propriétaires de camions utilisent davantage un service de nettoyage de véhicules.

- c) Quelles limites ce modèle présente-t-il?

Le modèle ne tient pas compte du comportement humain. Par exemple, peu de gens feront nettoyer leur véhicule s'il pleut, certaines personnes vont préférer faire nettoyer leur véhicule près de chez eux. De plus, plusieurs autres facteurs sont à prendre en considération. Ce modèle tient-il compte de l'augmentation du prix des produits? Ce modèle tient-il compte de la température? Ce modèle tient-il compte de l'embauche d'employés? Il est important de considérer ces facteurs dans la prise de décision finale.

Retour sur l'exemple 1

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour analyser la situation et en tirer des conclusions. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre la situation initiale, les éléments d'information fournis, le modèle proposé et les conclusions qu'elles et ils peuvent en tirer et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Quels liens peux-tu faire entre le modèle proposé, les éléments d'information fournis et la question à laquelle on veut répondre?
 - Pourquoi doit-on considérer tous les éléments pour prendre une décision finale?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit Le coût d'entretien d'un chien.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour analyser un modèle mathématique.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficulté que les élèves risquent de rencontrer.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

L'élève pourra utiliser différentes représentations pour faire les liens entre les éléments d'information tels un schéma conceptuel, une carte de concepts, un organigramme ou autres représentations similaires.

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application les processus mathématiques suivants :
 - Réflexion
 - Raisonnement et justification
- L'élève réfléchit afin de déterminer ce qui fonctionne et ce qui ne fonctionne pas avec le modèle proposé, puis vérifie si le modèle pourrait être amélioré et utilisé.
- L'élève utilise sa compréhension des composantes du processus de modélisation mathématique et des diverses représentations pour justifier sa pensée. L'élève évalue la pertinence du modèle pour répondre à la question.
- L'élève peut avoir de la difficulté à déterminer les limites du modèle ou à voir comment l'utiliser afin de faire des prédictions.
- Afin d'amener l'élève à déterminer ces éléments, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution de problème. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion :
 - Quels éléments d'information chaque modèle te permet-il de déduire?
 - Quels liens peux-tu faire entre les données et la question initiale de Clovis?
 - Est-ce que tu peux penser à d'autres coûts que Clovis n'a pas considérés?

EXEMPLE 2

Le coût d'entretien d'un chien

Clovis rêve d'avoir un chien depuis longtemps, mais ses parents disent que cela coûte trop cher. Clovis décide donc de déterminer le coût d'avoir un chien et de présenter ses conclusions à ses parents afin de les convaincre.

Voici les renseignements que Clovis a recherchés :

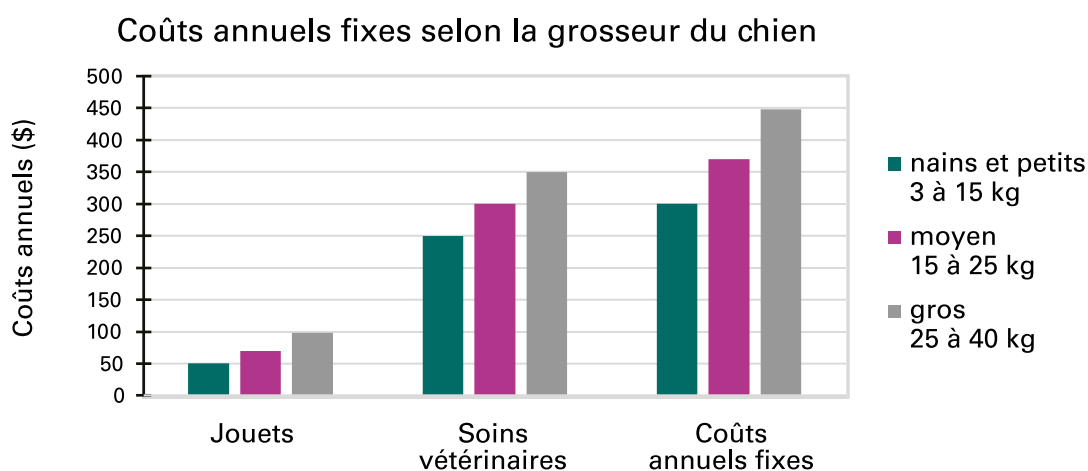
- coût de la nourriture selon le poids du chien (incluant les gâteries);
- coût d'achat;
- coût pour les soins vétérinaires;
- coût pour les jouets;
- coût pour les accessoires (laisse, collier, bols, etc.).

Il a également fait les suppositions suivantes :

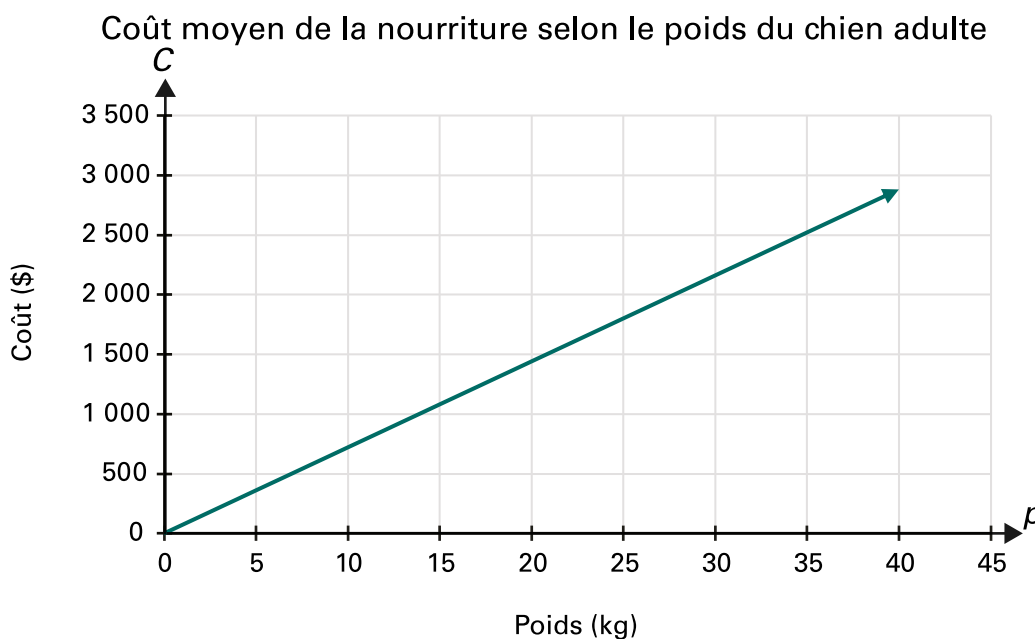
- le coût d'achat et le coût des accessoires sont des montants qui doivent être payés une seule fois, au début;
- les coûts pour les soins vétérinaires initiaux, comme la stérilisation, seront intégrés dans le coût d'achat;
- les autres coûts seront calculés par année.

Après ses recherches de renseignements, Clovis a déterminé que les coûts fixes initiaux seraient d'environ 750 \$ en achetant le chien dans un refuge et non d'un éleveur, qui exigerait un coût plus élevé.

Les coûts annuels fixes en lien avec les jouets et les soins vétérinaires sont présentés dans ce diagramme.



Les coûts liés à la nourriture sont représentés par ce graphique.





Est-ce que les modèles présentés vont permettre à Clovis de présenter ses données afin de convaincre ses parents de la possibilité d'acheter un chien? Analyse le modèle en t'assurant d'indiquer comment le modèle répond à la question, ses limites et comment il peut être utilisé pour faire des prédictions.

Corrigé

Le modèle présente 3 composantes. Des frais fixes initiaux qui ne varient pas selon la grosseur du chien, des frais annuels fixes qui varient selon 3 catégories de grosseur de chien et des frais variables selon le poids du chien. Si on rassemble tous ces éléments, il est possible de déterminer la grosseur maximale de chien que l'on peut se procurer selon un certain budget. Je crois que Clovis a créé un modèle qui lui permettra, au moins, d'avoir une vraie discussion avec ses parents, avec des données et des renseignements pour appuyer ses arguments.

Ce modèle ne tient cependant pas compte de la race de chien et des soins supplémentaires dont certains chiens ont besoin, tel que le toilettage, la nourriture particulière, les soins en cas de maladie, etc. Ces dépenses pourraient être ajoutées au modèle afin de s'assurer d'être plus près de la réalité.

Le modèle peut être utilisé afin de planifier un budget équilibré qui tient compte de l'animal et des dépenses anticipées. Le modèle aura probablement besoin de modifications selon les particularités du chien choisi, l'augmentation des coûts au fil des années et les imprévus possibles.

Retour sur l'exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour analyser le modèle, en déterminer les limites et déterminer comment l'utiliser pour faire des prédictions. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.

- 
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre la question initiale, les données et le modèle et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Comment peux-tu relier les différentes composantes de la modélisation mathématique à ce problème?
 - Dans quelles situations serait-il pertinent de modifier le modèle?
 - Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

1. Crée ou modifie un budget afin d'y inclure la venue d'un animal de compagnie dans la maison.
2. Détermine l'équation de la droite présentée dans le graphique « Coût moyen de la nourriture selon le poids du chien adulte » dans l'exemple 2 afin de pouvoir estimer le coût de la nourriture pour un chien qui pèse 65 kg.

Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves de faire quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou autres preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement et des élèves pour qu'elles et ils s'améliorent.

Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Corrigé

1. Un emploi d'été possible est une petite entreprise de nettoyage de fenêtres résidentielles. Afin de déterminer le prix à exiger, Luka a créé un modèle algébrique basé sur une collecte d'éléments d'information et de données.

Voici son modèle :

$$P = (7f_p + 10f_m + 15f_g) + 20n$$

où P représente le prix total en dollars;

f_p le nombre de petites fenêtres;

f_m le nombre de moyennes fenêtres;

f_g le nombre de grandes fenêtres;

n le nombre d'étages de la maison.

Quelles prédictions ce modèle te permettrait-il de faire?

Processus mathématique préconisé : réflexion

L'élève doit poser un regard critique sur le modèle, évaluer ce qui a du sens et ce qui n'en a pas et déterminer comment le modèle peut être utilisé pour faire des prédictions.

Ce modèle permet de déterminer le prix à exiger pour nettoyer les fenêtres d'une maison. Si je connais le nombre moyen de fenêtres pour les maisons de mon quartier, je pourrais déterminer le nombre de maisons dont je devrai nettoyer les fenêtres afin de ramasser un certain montant d'argent.

Par exemple, disons que je veux gagner 6 000 \$ durant l'été. Si je prends ma maison comme exemple, nous avons 6 petites fenêtres, 4 moyennes et 2 grandes. Les fenêtres sont sur 2 étages, le rez-de-chaussée et le sous-sol.

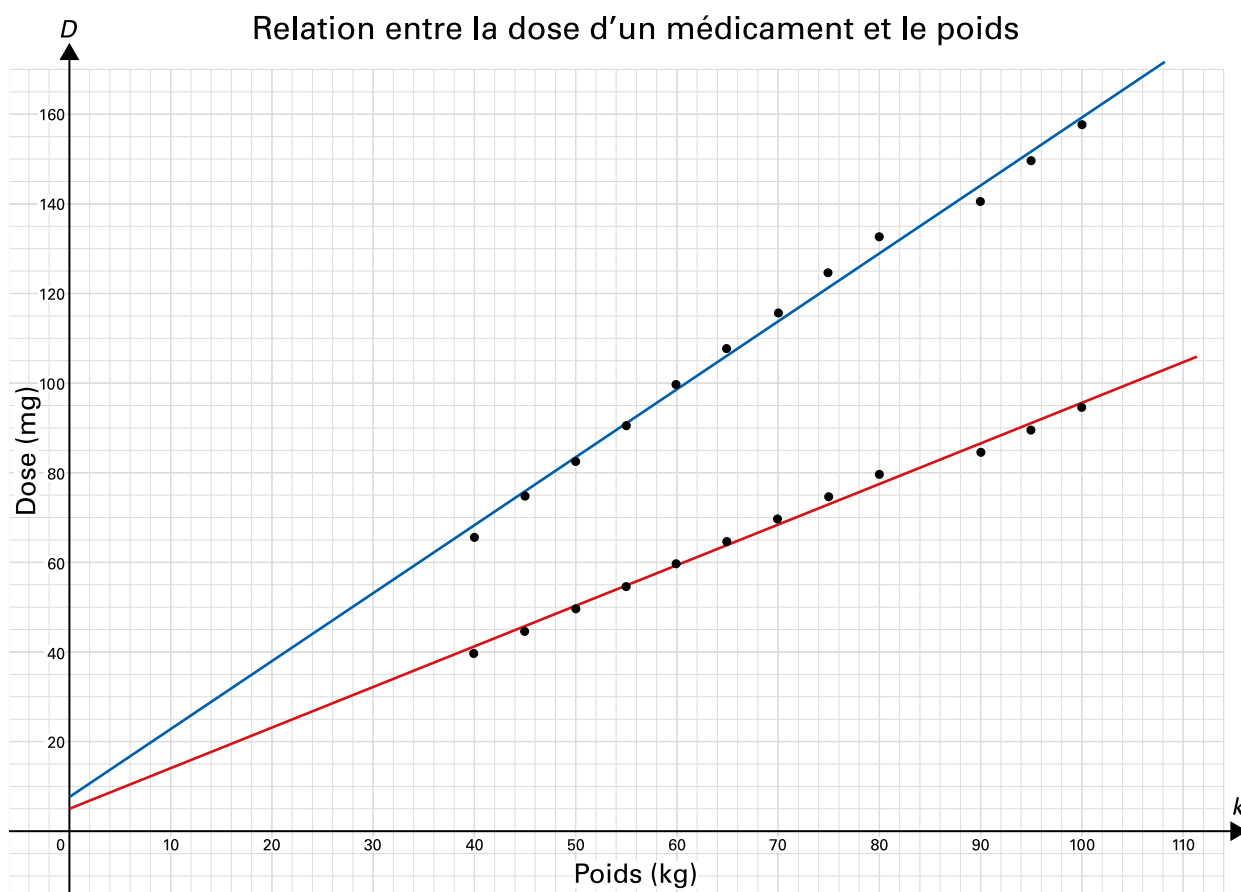
$$P = [7(6) + 10(4) + 15(2)] + 20(2)$$

$$P = 42 + 40 + 30 + 40$$

$$P = 152 \$$$

Si je divise 6 000 par 150, j'obtiens 40. Cela signifie que je devrais nettoyer les fenêtres d'environ 40 maisons semblables à la mienne afin de gagner 6 000 \$. Cela représente environ 5 maisons par semaine, ce qui est raisonnable, car je dois considérer des éléments tels que la température, puisque je ne pourrai pas nettoyer de fenêtres s'il pleut.

- Le graphique ci-dessous représente la dose d'un certain médicament pour les infections bactériennes graves. Une des droites représente la dose minimale et l'autre la dose maximale qui peut être prescrite par un médecin.



Processus mathématique préconisé : raisonnement et justification

L'élève doit justifier son raisonnement à l'aide d'exemples et d'explications concrets. L'enseignante ou l'enseignant pourra diriger des discussions afin de développer la pensée critique de l'élève en posant des questions telles que :

- Quelles autres données ou quels autres éléments d'information recommanderais-tu d'ajouter afin de préciser son modèle?
- Que remarques-tu en observant le graphique?
- a) Comment peux-tu utiliser ce modèle pour déterminer la dose d'une personne?

Lorsque je regarde ce graphique, je déduis que la dose minimale qui devrait être prescrite par un médecin est représentée par la droite rouge tandis que la dose maximale pouvant être prescrite par un médecin est représentée par la droite bleue. Je peux donc utiliser ce modèle pour déterminer la dose d'une personne sachant son poids. La quantité de mg qu'une personne peut prendre selon son poids devra se trouver entre les deux droites.

- b) Quelles limites ce modèle présente-t-il?

Une des limites de ce modèle est que seul le poids de l'individu est considéré et non la grandeur, le sexe à la naissance ou le niveau d'infection de la personne. Il est donc difficile de déterminer avec certitude la dose optimale pour chaque individu. Il serait intéressant de prendre en considération les différents facteurs dans le modèle en plus du poids afin de pouvoir faire des prédictions plus exactes pour chaque individu.

3. La table de valeurs ci-dessous indique le nombre approximatif d'objets non fonctionnels ou inutiles en orbite autour de la terre de 1966 à 2018. Quelles autres données ou quels autres éléments d'information recommanderais-tu d'ajouter afin de préciser le modèle?

	Nombre approximatif d'objets non fonctionnels ou inutiles dans l'espace
1966	2 000
1974	4 000
1978	6 000
1980	6 000
1986	8 000
1998	11 000
2000	11 000
2008	16 000
2012	18 000
2018	19 000

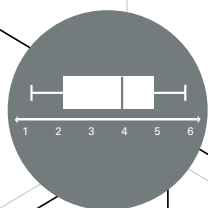
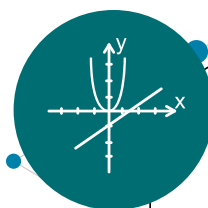
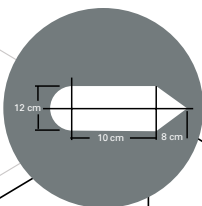
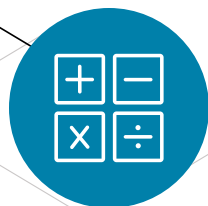
Processus mathématique préconisé : raisonnement et justification

L'élève doit justifier son raisonnement à l'aide d'exemples et d'explications concrets. L'enseignante ou l'enseignant pourra diriger des discussions afin de développer la pensée critique de l'élève en posant des questions telles que :

- Comment peux-tu utiliser ce modèle pour déterminer le nombre d'objets non fonctionnels ou inutiles dans 10 ans, 20 ans?
- Quelles limites ce modèle présente-t-il?

Ce modèle ne prend pas en considération l'avancement technologique et les besoins de la société. Par exemple, parmi les objets non fonctionnels ou inutiles gravitant autour de la Terre, combien sont nécessaires à l'avancement technologique sur la Terre? Y a-t-il des satellites liées à la télécommunication, à l'environnement, voire à la cartographie? Il faudrait récolter des données sur le nombre de produits qui sont mis en orbite autour de la Terre. Il faudrait aussi déterminer combien d'entre eux sont encore utilisés et combien sont défectueux. En ajoutant ces données au modèle, il serait possible de déterminer le nombre d'objets non fonctionnels ou inutiles gravitant autour de la Terre. De là, il serait possible de trouver des solutions écologiques afin de limiter l'augmentation des déchets spatiaux.

VERSION DE L'ÉLÈVE



$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$

9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

DONNÉES

Analyser et évaluer un modèle
représentant des données

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

Des produits de nettoyage pour voiture

Mike veut démarrer une petite entreprise de nettoyage de voitures durant l'été. Il se demande quels produits seraient les meilleurs à utiliser pour sa petite entreprise, ainsi que le prix qu'il devrait exiger.

Voici les suppositions de Mike et le modèle créé à partir des données qu'il a récoltées.

- Il veut faire un profit de 5 000 \$.
- Il utilisera les outils, l'eau et la cour de ses parents.
- À la suite d'une collecte de données, il estime qu'environ 2 400 personnes souhaitent utiliser un service de nettoyage de véhicules.
- Le coût pour les produits est d'environ 4 \$ par véhicule.

Voici le modèle de Mike :

$$D = -4x$$

$$R = ax$$

$$P = R + D$$

D représente les dépenses

R représente les revenus

P représente le profit

x représente le nombre de véhicules nettoyés

a représente le prix demandé pour le nettoyage du véhicule.

- a) Comment peux-tu utiliser ce modèle pour déterminer le prix que Mike devrait exiger pour chaque véhicule?
- b) Quelles autres données ou quels autres éléments d'information lui recommanderais-tu d'ajouter afin de préciser son modèle?
- c) Quelles limites ce modèle présente-t-il?



TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

Le coût d'entretien d'un chien

Clovis rêve d'avoir un chien depuis longtemps, mais ses parents disent que cela coûte trop cher. Clovis décide donc de déterminer le coût d'avoir un chien et de présenter ses conclusions à ses parents afin de les convaincre.

Voici les renseignements que Clovis a recherchés :

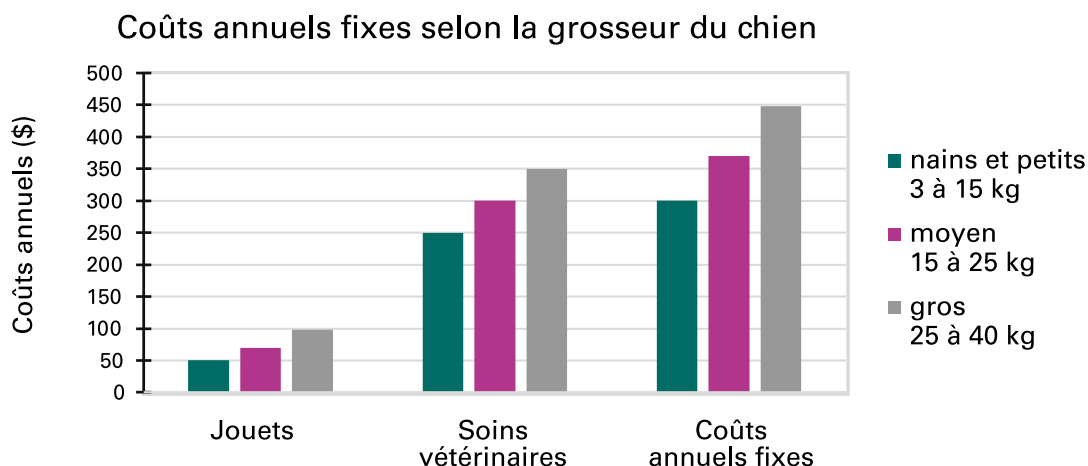
- coût de la nourriture selon le poids du chien (incluant les gâteries);
- coût d'achat;
- coût pour les soins vétérinaires;
- coût pour les jouets;
- coût pour les accessoires (laisse, collier, bols, etc.).

Il a également fait les suppositions suivantes :

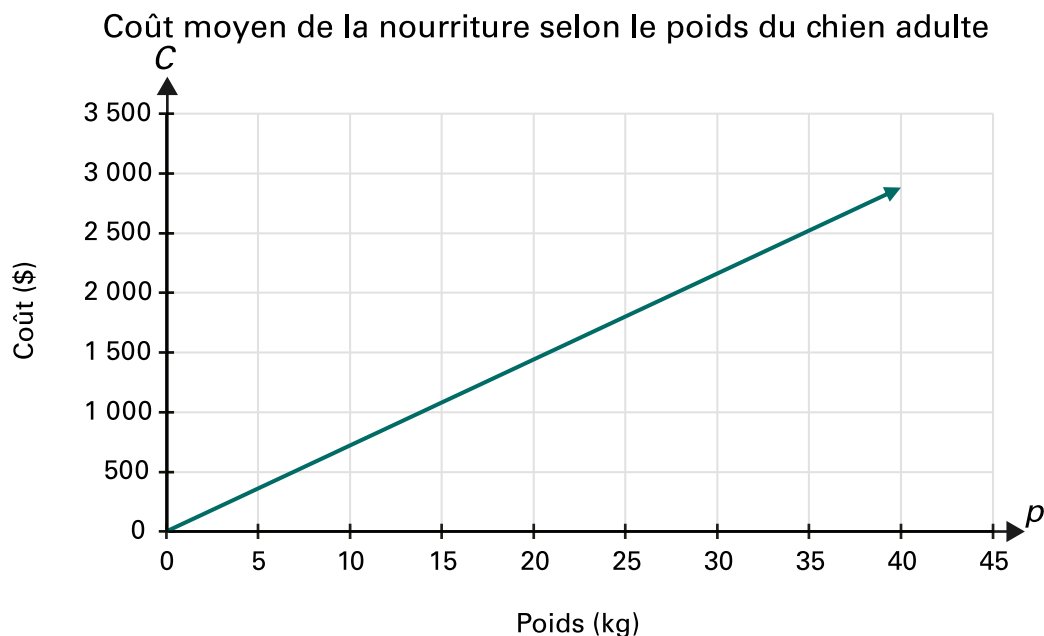
- le coût d'achat et le coût des accessoires sont des montants qui doivent être payés une seule fois, au début;
- les coûts pour les soins vétérinaires initiaux, comme la stérilisation, seront intégrés dans le coût d'achat;
- les autres coûts seront calculés par année.

Après ses recherches de renseignements, Clovis a déterminé que les coûts fixes initiaux seraient d'environ 750 \$ en achetant le chien dans un refuge et non d'un éleveur, qui exigerait un coût plus élevé.

Les coûts annuels fixes en lien avec les jouets et les soins vétérinaires sont présentés dans ce diagramme.



Les coûts liés à la nourriture sont représentés par ce graphique.



Est-ce que les modèles présentés vont permettre à Clovis de présenter ses données afin de convaincre ses parents de la possibilité d'acheter un chien? Analyse le modèle en t'assurant d'indiquer comment le modèle répond à la question, ses limites et comment il peut être utilisé pour faire des prédictions.



TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

1. Un emploi d'été possible est une petite entreprise de nettoyage de fenêtres résidentielles. Afin de déterminer le prix à exiger, Luka a créé un modèle algébrique basé sur une collecte d'éléments d'information et de données.

Voici son modèle :

$$P = (7f_p + 10f_m + 15f_g) + 20n$$

où P représente le prix total en dollars;

f_p le nombre de petites fenêtres;

f_m le nombre de moyennes fenêtres;

f_g le nombre de grandes fenêtres;

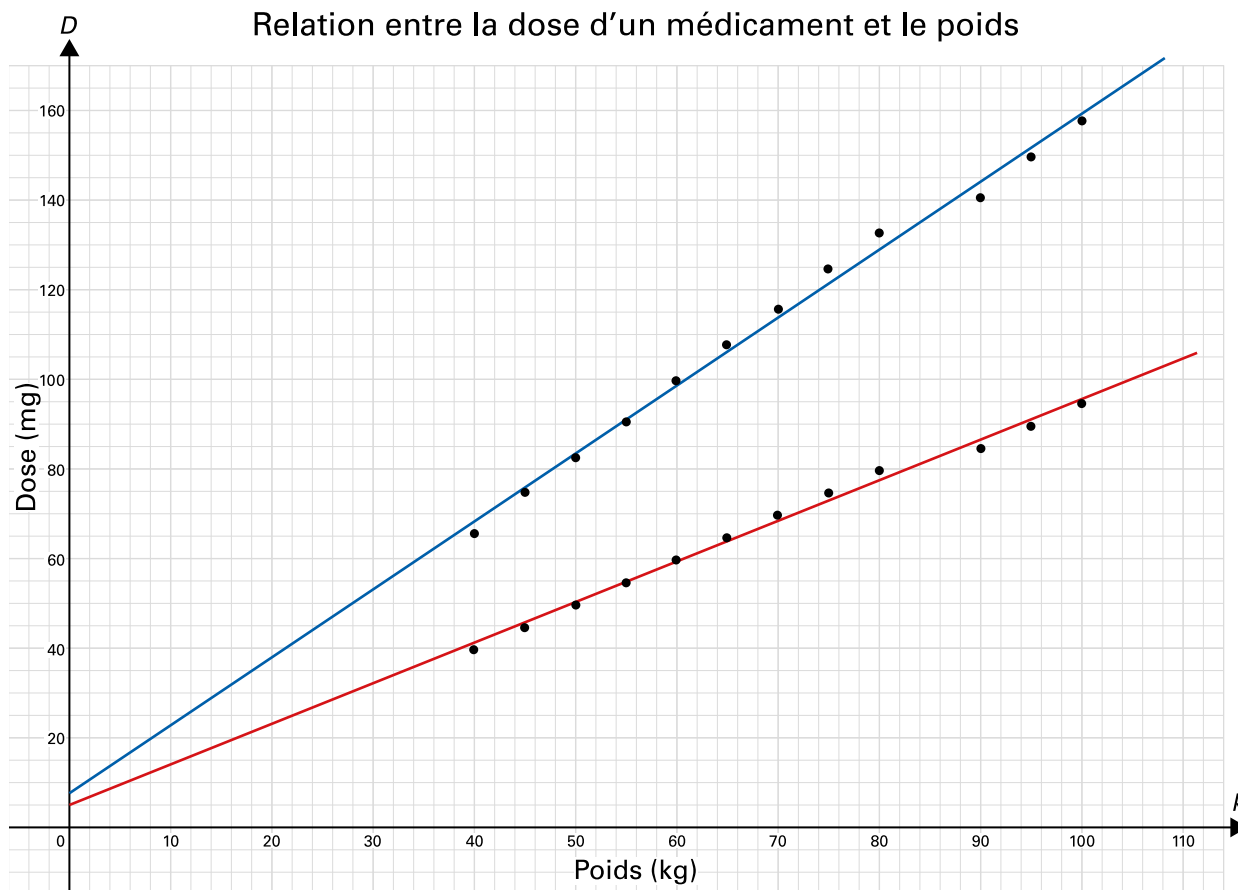
n le nombre d'étages de la maison.

Quelles prédictions ce modèle te permettrait-il de faire?



TA STRATÉGIE

2. Le graphique ci-dessous représente la dose d'un certain médicament pour les infections bactériennes graves. Une des droites représente la dose minimale et l'autre la dose maximale qui peut être prescrite par un médecin.



- a) Comment peux-tu utiliser ce modèle pour déterminer la dose pour une personne?
- b) Quelles limites ce modèle présente-t-il?



TA STRATÉGIE

3. La table de valeurs ci-dessous indique le nombre approximatif d'objets non fonctionnels ou inutiles en orbite autour de la terre de 1966 à 2018. Quelles autres données ou quels autres éléments d'information recommanderais-tu d'ajouter afin de préciser le modèle?

	Nombre approximatif d'objets non fonctionnels ou inutiles dans l'espace
1966	2 000
1974	4 000
1978	6 000
1980	6 000
1986	8 000
1998	11 000
2000	11 000
2008	16 000
2012	18 000
2018	19 000



TA STRATÉGIE