

9^e
ANNÉE

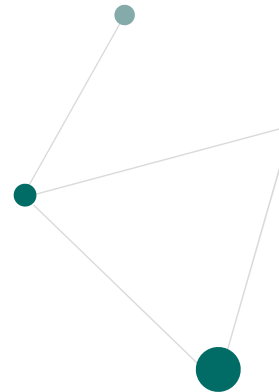
PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Minileçon

ALGÈBRE

Comparer les caractéristiques des relations
linéaires et non linéaires



RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève compare les caractéristiques des représentations graphiques, des tables des valeurs et des équations qui représentent des relations linéaires et non linéaires.

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- › détermine l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine;
- › détermine si le taux de variation est constant et non constant;
- › détermine si la relation est croissante ou décroissante;
- › détermine si la relation est linéaire ou non linéaire.

MATÉRIEL

- › calculatrice graphique;
 - › crayons rouges;
 - › feuilles blanches;
 - › règles;
 - › papier quadrillé en cm^2 .
-

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débiter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Algèbre	Les expressions algébriques
Algèbre	Les expressions équivalentes
Algèbre	Les prédictions des représentations des relations linéaires et non linéaires
Algèbre	Les caractéristiques de relations linéaires et non linéaires

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- Le taux de variation est constant pour une relation linéaire.
- Le taux de variation peut être déterminé à partir de différentes représentations (table de valeurs, graphiques et équations).
- Une relation est linéaire lorsque le changement des valeurs en y est proportionnel au changement des valeurs en x .

Déroulement pour l'exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **Les caractéristiques de relations linéaires et non linéaires** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves le taux de variation, l'abscisse à l'origine, l'ordonnée à l'origine et les variables dépendantes et indépendantes ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l'activité.
- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
 - Qu'est-ce qui fait qu'une relation est linéaire ou non?
 - Quelles situations de la vie courante peuvent être représentées par des relations linéaires et non linéaires?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit Les caractéristiques d'une relation linéaire.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève met en œuvre diverses stratégies pour trouver le taux de variation d'une relation donnée.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement relativement aux processus mathématiques et aux éléments de difficulté que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 1

Le choix de stratégie est l'établissement des liens. L'élève doit montrer les liens entre les caractéristiques des différentes représentations de relations linéaires, soit une équation, un graphique et une table de valeurs.

Notes pédagogiques

Cet exemple permet à l'élève d'appliquer le processus mathématique de la sélection d'outils et de stratégies en utilisant une calculatrice graphique pour faire ressortir les caractéristiques de relations linéaires.

EXEMPLE 1

Les caractéristiques d'une relation linéaire

Compare les caractéristiques des équations, des graphiques et des tables de valeurs pour les deux équations suivantes :

$$y = \frac{3}{2}x + 3 \text{ et } y = -2x + 8.$$

Corrigé

Notes pédagogiques

L'élève trouve les taux de variation à partir de deux équations linéaires en utilisant le coefficient dominant.

Les questions ci-dessous peuvent être utilisées pour aider l'élève :

- Comment peux-tu déterminer si les équations sont linéaires ou non?
- Que représentent les coefficients devant les valeurs de x dans ces équations?
- Y a-t-il d'autres informations qui peuvent être tirées des équations de relations linéaires?

Équations

Je remarque que les deux équations ont le même degré et que le coefficient du terme dominant est positif pour l'une et négatif pour l'autre.

Puisque le degré est 1, les équations sont linéaires, et je peux également dire que le coefficient dominant représente le taux de variation pour chacun.

Donc, le taux de variation pour $y = \frac{3}{2}x + 3$ et $y = -2x + 8$ est $\frac{3}{2}$ et -2 respectivement.

Je peux également déterminer les ordonnées à l'origine dans ces équations, soit 3 et 8 respectivement.

Notes pédagogiques

L'élève peut choisir de tracer son graphique sur une feuille quadrillée ou à l'aide d'un outil technologique.

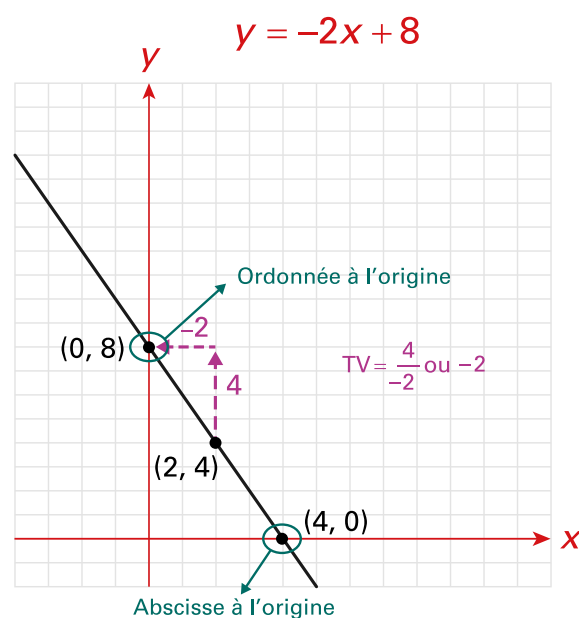
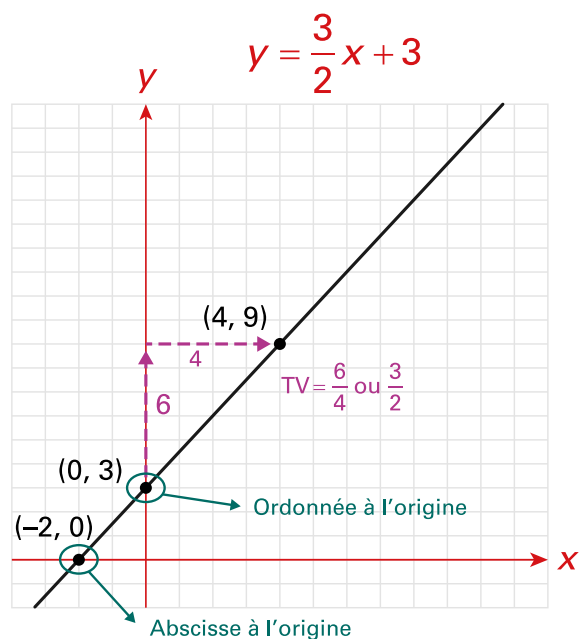
L'élève soustrait les y de façon systématique afin de déterminer si la différence est constante d'un y à l'autre. L'élève qui éprouve de la difficulté doit se rappeler que lorsque l'on parle de **différence**, il s'agit d'une soustraction.

Les valeurs obtenues pour les différences en y doivent augmenter proportionnellement avec les valeurs de x .

L'élève qui éprouve de la difficulté à déterminer si la relation est linéaire ou non à partir des coordonnées pourra tracer une droite pour voir si elle passe par tous les points tracés.

Graphiques

À l'aide d'un outil technologique, je trace les graphiques de chaque équation afin de les comparer.



Les deux graphiques représentent des relations linéaires, car leur taux de variation est constant. Le graphique de gauche représente une relation croissante et celui de droite, une relation décroissante.

Les coordonnées des ordonnées à l'origine sont $(0, 3)$ et $(0, 8)$, respectivement.

Les coordonnées des abscisses à l'origine sont $(-2, 0)$ et $(4, 0)$, respectivement.

Table de valeurs

$$y = \frac{3}{2}x + 3$$

x	y
-6	-6
-4	-3
-2	0
0	3
2	6
4	9
6	12

Annotations pour $y = \frac{3}{2}x + 3$:

- À gauche : flèches verticales indiquant une augmentation de 2 unités pour x (de -6 à -4, -4 à -2, -2 à 0, 0 à 2, 2 à 4, 4 à 6). Une flèche horizontale pointe vers la cellule (-2, 0) avec l'annotation "Abscisse à l'origine".
- À droite : flèches verticales indiquant une augmentation de 3 unités pour y (de -6 à -3, -3 à 0, 0 à 3, 3 à 6, 6 à 9, 9 à 12).

$$y = -2x + 8$$

x	y
-2	12
-1	10
0	8
1	6
2	4
3	2
4	0

Annotations pour $y = -2x + 8$:

- À gauche : flèches verticales indiquant une augmentation de 1 unité pour x (de -2 à -1, -1 à 0, 0 à 1, 1 à 2, 2 à 3, 3 à 4).
- À droite : flèches verticales indiquant une diminution de 2 unités pour y (de 12 à 10, 10 à 8, 8 à 6, 6 à 4, 4 à 2, 2 à 0). Une flèche horizontale pointe vers la cellule (0, 8) avec l'annotation "Ordonnée à l'origine".

Les taux de variation sont constants pour les deux tables de valeurs. Donc la relation est linéaire.

Pour celle de gauche, le taux de variation est constant puisqu'à chaque fois que l'on augmente y de 3, le x augmente de 2. Donc le taux de variation est $\frac{3}{2}$, ce qui correspond au coefficient de x de la première équation soit $\frac{3}{2}$.

Pour celle de droite, le taux de variation est constant puisqu'à chaque fois que l'on diminue y de 2, le x augmente de 1. Donc le taux de variation est $\frac{-2}{1}$, ce qui correspond au coefficient de x de la deuxième équation soit -2.

Les coordonnées des ordonnées à l'origine sont (0, 3) et (0, 8), respectivement.

Les coordonnées des abscisses à l'origine sont (-2, 0) et (4, 0), respectivement.

Retour sur l'exemple 1

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour mettre en évidence les différentes stratégies de résolution de problèmes possibles. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les différentes formes d'une expression et les manières de reconnaître ses caractéristiques, et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si cela est nécessaire, poser des questions telles que :
 - Comment peux-tu savoir qu'une relation est linéaire ou non linéaire à partir d'une équation, d'un graphique ou d'une table de valeurs?
 - Comment fais-tu pour déterminer le taux de variation d'une relation à partir d'une table de valeurs?
 - Y a-t-il d'autres stratégies possibles afin de déterminer si une relation quelconque est linéaire ou non?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit La comparaison de relations linéaires et non linéaires.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour accomplir la tâche de l'exemple 2.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement relativement aux processus mathématiques et aux éléments de difficulté que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

Justifier les ressemblances et les différences entre les relations en utilisant différentes représentations.

Notes pédagogiques

Cet exemple permet à l'élève d'appliquer le processus mathématique du raisonnement et de la justification. L'élève communique son raisonnement et le justifie à partir de preuves mathématiques.

EXEMPLE 2

La comparaison de relations linéaires et non linéaires

Compare les trois équations suivantes :

$$y = 3x$$

$$y = x^3$$

$$y = 3^x$$

- Quelles sont les ressemblances et les différences entre les graphiques?
- Quelles sont les ressemblances et les différences entre leurs tables de valeurs et leurs équations?

Corrigé

Notes pédagogiques

L'élève qui reconnaît bien l'équation d'une droite devrait reconnaître rapidement son graphique. Si l'élève éprouve de la difficulté, voici des exemples de questions à poser :

- Quelles sont les caractéristiques d'une relation linéaire?
- Qu'est-ce que l'ordonnée à l'origine?
- Quelle est l'équation d'une relation linéaire?
- Que représentent les variables a et b dans l'équation d'une relation linéaire?

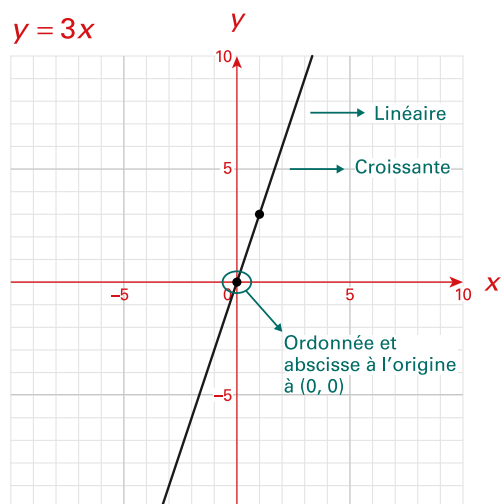
Si l'élève éprouve de la difficulté à déterminer si la relation est croissante ou décroissante, voici des exemples de questions à poser :

- Qu'est-ce qui nous indique qu'une relation est croissante ou décroissante dans un graphique?
- Est-ce possible qu'une relation soit croissante même si les valeurs de x et de y dans un graphique sont négatives?

L'idée de proportionnalité entre les valeurs de x et de y est importante à faire ressortir. Même si les valeurs de y ne semblent pas augmenter de façon constante, il faut les comparer avec celles de x pour voir si l'augmentation est proportionnelle.

a) Comparaison des graphiques

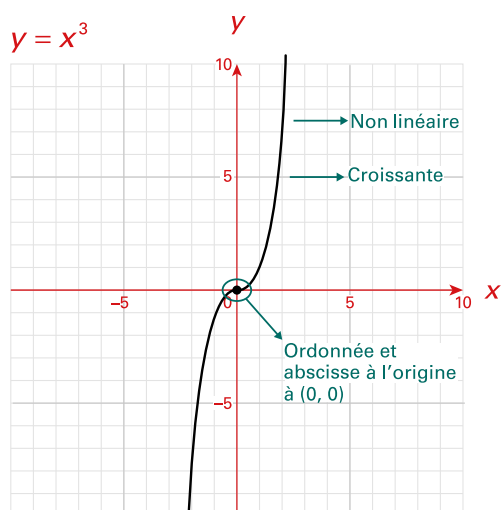
À l'aide d'un outil technologique, je trace les graphiques des trois équations.



Le graphique représente une relation linéaire.

La droite est croissante.

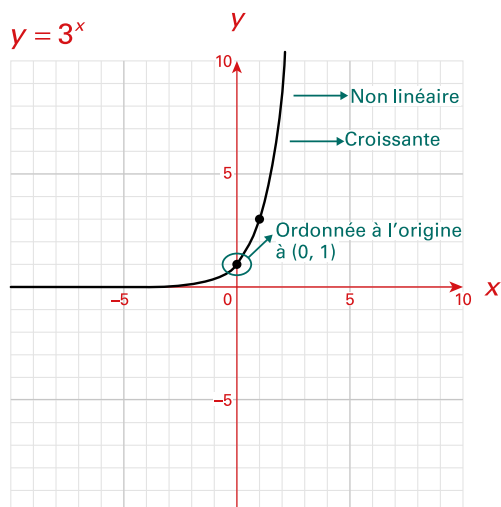
Les coordonnées de l'ordonnée et de l'abscisse à l'origine sont toutes les deux (0, 0).



Le graphique représente une relation non linéaire.

La courbe est croissante.

Les coordonnées de l'ordonnée et de l'abscisse à l'origine sont toutes les deux (0, 0).



Le graphique représente une relation non linéaire.

La courbe est croissante.

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont (0, 1).

Je remarque que les trois graphiques sont semblables, car toutes les relations sont croissantes.

Seulement deux relations ont des abscisses à l'origine, car le graphique de $y = 3^x$ ne traverse pas l'axe des abscisses.

Deux de ces relations sont non linéaires, mais n'ont ni la même ordonnée à l'origine ni la même l'abscisse à l'origine.

b) Je confirme mes observations en créant une table de valeurs pour chaque équation.

$y = 3x$

	x	y	
+1 ↻	-2	-6	↻ +3
+1 ↻	-1	-3	↻ +3
+1 ↻	0	0	↻ +3
+1 ↻	1	3	↻ +3
+1 ↻	2	6	↻ +3
+1 ↻	3	9	↻ +3
+1 ↻	4	12	↻ +3

Ordonnée et abscisse à l'origine

La relation est linéaire, car les valeurs de y augmentent proportionnellement avec les valeurs de x .

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine et celles de l'abscisse à l'origine sont toutes les deux (0, 0).

Les valeurs de x et y augmentent, alors la relation est croissante.

$y = x^3$

	x	y	
+1 ↻	-2	-8	↻ +7
+1 ↻	-1	-1	↻ +1
+1 ↻	0	0	↻ +1
+1 ↻	1	1	↻ +7
+1 ↻	2	8	↻ +19
+1 ↻	3	27	↻ +37
+1 ↻	4	64	

Ordonnée et abscisse à l'origine

La relation est non linéaire, car les valeurs de y n'augmentent pas proportionnellement avec les valeurs de x .

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine et celles de l'abscisse à l'origine sont toutes les deux (0, 0).

Les valeurs de x et de y augmentent, alors la relation est croissante.

$y = 3^x$

	x	y	
+1 ↻	-2	$\frac{1}{9}$	↻ $+\frac{2}{9}$
+1 ↻	-1	$\frac{1}{3}$	↻ $+\frac{2}{3}$
+1 ↻	0	1	↻ +2
+1 ↻	1	3	↻ +6
+1 ↻	2	9	↻ +18
+1 ↻	3	27	↻ +54
+1 ↻	4	81	

Ordonnée à l'origine

La relation est non linéaire, car les valeurs de y n'augmentent pas proportionnellement avec les valeurs de x .

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont (0, 1).

Il n'y a pas d'abscisse à l'origine, car plus la valeur de y tend vers 0, plus la valeur de x tend vers l'infini négatif.

Les valeurs de x et y augmentent, alors la relation est croissante.

Retour sur l'Exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer si la relation est linéaire ou non. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les caractéristiques des relations linéaires et non linéaires et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Quelles sont les caractéristiques d'une relation linéaire?
 - Selon vous, quelle stratégie est la plus efficace pour déterminer si une relation est linéaire ou non?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

1. Créer une mise en situation qui peut être représentée par une relation linéaire.
2. Créer une mise en situation qui peut être représentée par une relation non linéaire.

Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves de faire quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou de preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement en vue d'aider les élèves à s'améliorer.

Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Corrigé

1. Mila vient de commencer un emploi à Postes Canada. Elle devra livrer du courrier sur une route prédéfinie chaque jour. Son salaire de base sera de 50 \$ en plus de 0,20 \$ par maison visitée. Détermine les trois représentations à partir de cette situation et donne les caractéristiques.

Processus mathématique préconisé : représentation

L'élève doit déterminer les caractéristiques de la situation à l'aide de différentes représentations.

Je trouve les variables dans mon problème :

- soit S , le salaire total que Mila recevra;
- soit n , le nombre de maisons visitées.

Table de valeurs

Je crée une table de valeurs pour représenter mathématiquement la situation et faire ressortir les caractéristiques.

	n	S	
	0	50	
+10 ↺	10	52	↻ +2
+10 ↺	20	54	↻ +2
+10 ↺	30	56	↻ +2
+70 ↺	100	70	↻ +14
+400 ↺	500	150	↻ +80

La relation est linéaire, car les valeurs de S augmentent proportionnellement avec les valeurs de n .

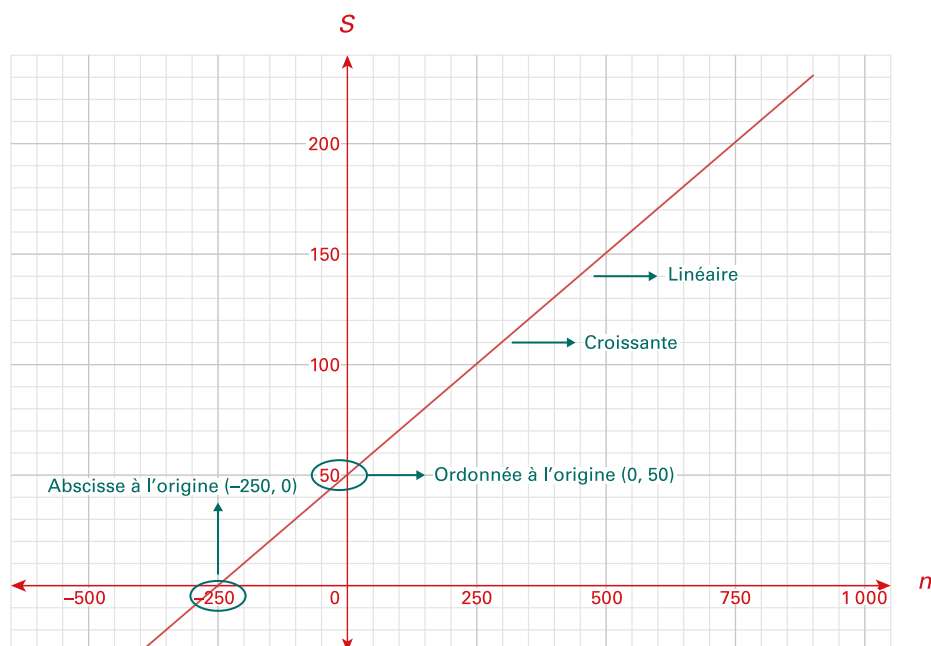
Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont $(0, 50)$.

L'abscisse à l'origine se trouve dans l'intersection entre le 2^e et le 3^e quadrant.

Les valeurs de n et de S augmentent, alors la relation est croissante.

Graphique

Je crée un graphique pour représenter mathématiquement la situation et faire ressortir les caractéristiques.



Le graphique représente une relation linéaire.

La droite est croissante.

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont $(0, 50)$.

L'abscisse à l'origine se trouve dans l'intersection entre le 2^e et le 3^e quadrant.

Équation

Je détermine l'équation représentant la relation entre le salaire de Mila et le nombre de maisons visitées.

Pour une équation de la forme $y = ax + b$, dans ce cas $S = an + b$, la pente est le taux de variation, a , et l'ordonnée à l'origine est la valeur initiale, b .

La relation entre la somme des angles intérieurs d'un polygone et le nombre de côtés est représentée par l'équation $S = 0,2n + 50$.

2. Compare les trois équations suivantes :

$$y = 2x - 4$$

$$y = x^2 - 4$$

$$y = 2^x - 4$$

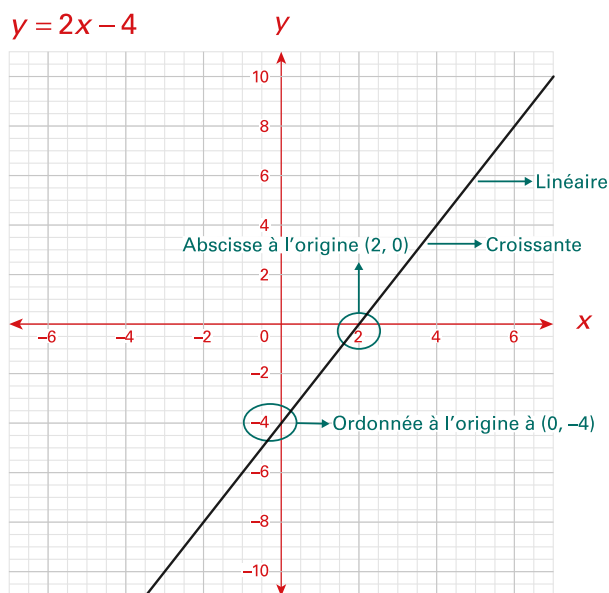
- Quelles sont les ressemblances et les différences entre leur graphique respectif?
- Quelles sont les ressemblances et les différences entre leur table de valeurs et leur équation respectives?

Processus mathématiques préconisés : le raisonnement et la justification

L'élève compare les différentes caractéristiques de relations linéaires et non linéaires. L'élève justifie son raisonnement et interprète les données ressorties à l'aide de chacune des représentations.

a) Comparaison des graphiques

À l'aide d'un outil technologique, je trace les graphiques des trois équations.

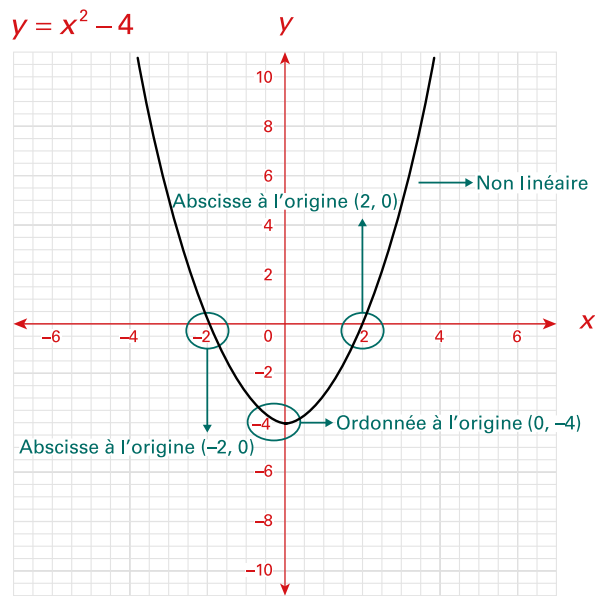


Le graphique représente une relation linéaire.

La droite est croissante.

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont (0, -4).

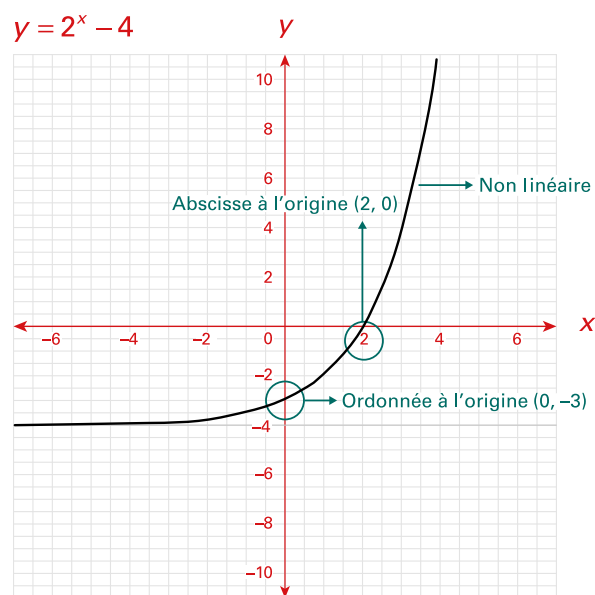
Les coordonnées de l'abscisse à l'origine sont (2, 0).



Le graphique représente une relation non linéaire.

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont $(0, -4)$.

Les coordonnées de l'abscisse à l'origine sont $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.



Le graphique représente une relation non linéaire.

La courbe est croissante.

Les coordonnées de l'ordonnée à l'origine sont $(0, -3)$.

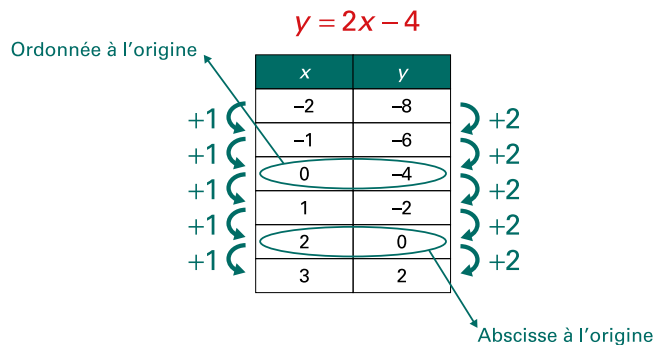
Les coordonnées de l'abscisse à l'origine sont $(2, 0)$.

Je remarque que $y = 2x - 4$ et $y = 2^x - 4$ sont des relations croissantes. Le graphique de la relation $y = x^2 - 4$ montre une section décroissante pour les valeurs de x plus petites que 0 et croissante pour les valeurs de x plus grandes que 0.

Les trois ont une abscisse à l'origine dont les coordonnées sont $(2, 0)$. Le graphique $y = x^2 - 4$ a une deuxième abscisse à l'origine $(-2, 0)$.

Les relations $y = x^2 - 4$ et $y = 2^x - 4$ sont des relations non linéaires. Elles n'ont pas les mêmes ordonnées à l'origine.

b) Je confirme mes observations en créant une table de valeurs pour chaque équation.

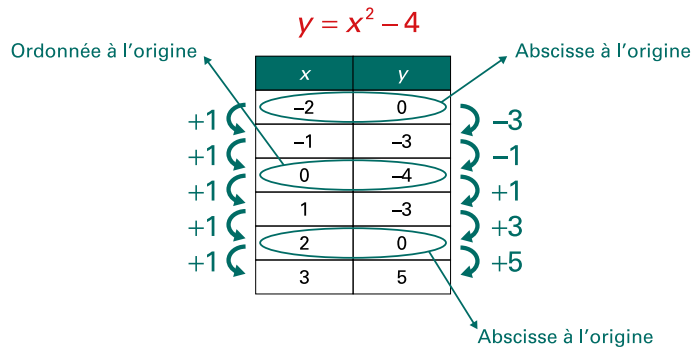


La relation est linéaire,
car les valeurs de y augmentent
proportionnellement avec
les valeurs de x .

Les coordonnées de l'ordonnée
à l'origine sont $(0, -4)$.

Les coordonnées de l'abscisse
à l'origine sont $(2, 0)$.

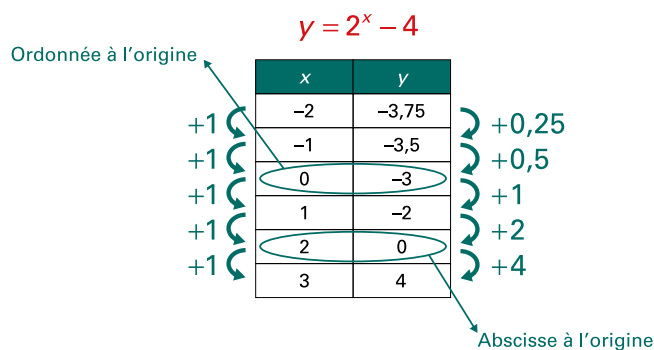
Les valeurs de x et de y augmentent,
alors la relation est croissante.



La relation est non linéaire,
car les valeurs de y n'augmentent
pas proportionnellement avec les
valeurs de x .

Les coordonnées de l'ordonnée
à l'origine sont $(0, -4)$.

Les coordonnées de l'abscisse
à l'origine sont $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.



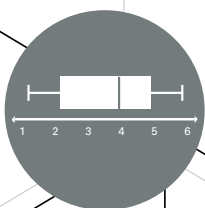
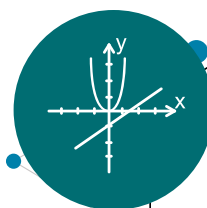
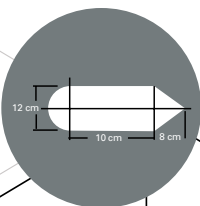
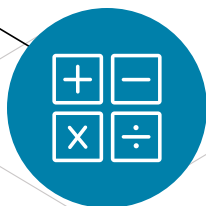
La relation est non linéaire,
car les valeurs de y n'augmentent
pas proportionnellement avec les
valeurs de x .

Les coordonnées de l'ordonnée
à l'origine sont $(0, -3)$.

Les coordonnées de l'abscisse
à l'origine sont $(2, 0)$.

Les valeurs de x et de y augmentent,
alors la relation est croissante.

VERSION DE L'ÉLÈVE



$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$

9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

ALGÈBRE

Comparer les caractéristiques des relations
linéaires et non linéaires

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

Les caractéristiques d'une relation linéaire

Compare les caractéristiques des équations, des graphiques et des tables de valeurs des deux équations suivantes :

$$y = \frac{3}{2}x + 3 \text{ et } y = -2x + 8.$$



TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

La comparaison de relations linéaires et non linéaires

Compare les trois équations suivantes :

$$y = 3x$$

$$y = x^3$$

$$y = 3^x$$

- Quelles sont les ressemblances et les différences entre les graphiques?
- Quelles sont les ressemblances et les différences entre leurs tables de valeurs et leurs équations?



TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

1. Mila vient de commencer un emploi à Postes Canada. Elle devra livrer du courrier sur une route prédéfinie chaque jour. Son salaire de base sera de 50 \$ en plus de 0,20 \$ par maison visitée. Détermine les trois représentations à partir de cette situation et donne les caractéristiques.



TA STRATÉGIE

2. Compare les trois équations suivantes :

$$y = 2x - 4$$

$$y = x^2 - 4$$

$$y = 2^x - 4$$

- a) Quelles sont les ressemblances et les différences entre leur graphique respectif?
- b) Quelles sont les ressemblances et les différences entre leur table de valeurs et leur équation respectives?



TA STRATÉGIE