

9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Minileçon

ALGÈBRE

Créer des expressions algébriques
pour généraliser des relations

RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève crée des expressions algébriques pour généraliser des relations exprimées à l'aide de mots, de nombres et de représentations visuelles.

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- › crée des expressions algébriques pour généraliser des relations exprimées avec des mots et des représentations visuelles;
- › utilise des tuiles algébriques pour résoudre et exprimer l'expression à la suite d'une mise en situation;
- › reconnaît la relation entre 2 variables et peut créer une expression algébrique représentative de cette relation.

MATÉRIEL

- › calculatrice;
 - › crayons rouges;
 - › feuilles blanches;
 - › règle;
 - › papier quadrillé en cm^2 ;
 - › logiciel de géométrie (facultatif).
-

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débiter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Nombres	La simplification d'expressions avec exposants
Algèbre	Les expressions algébriques
Algèbre	La simplification des expressions algébriques

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- Une relation peut être généralisée à partir de différentes représentations, soit :
 - visuelle;
 - avec des mots;
 - avec des nombres;
 - avec un graphique.
- Afin de trouver une généralisation, l'élève peut déterminer des régularités dans les représentations.
- Une représentation visuelle peut être utilisée pour aider à généraliser une situation.

Déroulement pour l'exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **Les expressions algébriques** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves les stratégies à préconiser afin d'exprimer une mise en situation à l'aide d'expressions algébriques ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l'activité.
- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
 - Pourquoi est-il utile de généraliser une représentation algébrique?
 - Comment une représentation visuelle peut-elle être utile pour aider à généraliser une situation?
 - Quelles sont les différentes façons de représenter des expressions algébriques?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit Jeux de nombres.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement en ce qui concerne les processus mathématiques, ainsi que les éléments plus difficiles que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 1

L'élève met en pratique différents nombres proposés dans l'énoncé afin de faire ressortir une régularité pour trouver une généralisation.

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application les processus de mathématiques suivants :
 - Communication
 - Justification
- L'élève discute en petit groupe afin de clarifier ses idées et de vérifier les stratégies choisies. L'élève doit se soucier d'une bonne organisation de son travail.
- Dans le corrigé, les flèches sont utilisées pour démontrer que le résultat d'une ligne devient le début de la ligne suivante.
- L'élève pourrait éprouver de la difficulté à créer l'expression étape par étape. Mettre l'accent sur l'utilisation des parenthèses et possiblement l'encourager à développer l'expression en utilisant 2 colonnes, la première contenant la variable et la deuxième une valeur de départ concrète.
- Afin d'amener l'élève à bien communiquer ses résultats, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution du problème. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion :
 - Quels sont les choix de stratégies possibles pour résoudre ce problème?
 - Compare ton expression avec celles de tes paires; comment se ressemblent-elles et comment sont-elles différentes?

EXEMPLE 1

Jeux de nombres

Généralise l'énoncé suivant par le biais d'une expression algébrique.

- Choisis un nombre
- Ajoute 7 à ce nombre
- Multiplie le résultat par 2
- Soustrais 2
- Divise le résultat par 2
- Soustrais le nombre initial

Quelle est ta réponse?

Vérifie que la réponse obtenue sera toujours la même, peu importe le nombre de départ. Justifie ta réponse.

Corrigé

Je fais appel à avec quelques nombres pour trouver les réponses.

Pour le nombre 4

$$\begin{aligned} 4 + 7 &= 11 \\ 11 \times 2 &= 22 \\ 22 - 2 &= 20 \\ 20 \div 2 &= 10 \\ 10 - 4 &= 6 \end{aligned}$$

Pour le nombre 7

$$\begin{aligned} 7 + 7 &= 14 \\ 14 \times 2 &= 28 \\ 28 - 2 &= 26 \\ 26 \div 2 &= 13 \\ 13 - 7 &= 6 \end{aligned}$$

Pour le nombre 12

$$\begin{aligned} 12 + 7 &= 19 \\ 19 \times 2 &= 38 \\ 38 - 2 &= 36 \\ 36 \div 2 &= 18 \\ 18 - 12 &= 6 \end{aligned}$$

Je remarque que pour les nombres 4, 7 et 12, la réponse finale est toujours 6.

Notes pédagogiques

Afin de généraliser la situation, l'élève doit faire un lien entre la valeur initiale utilisée et l'idée que cette valeur est la partie inconnue de l'énoncé, ce qui nécessite son remplacement par une variable (dans ce cas, « x »).

Je généralise l'énoncé et le transforme en expression algébrique en me posant les questions suivantes :

- À quel endroit puis-je attribuer une variable?

Le seul endroit dans ce problème où il y a un nombre inconnu c'est dans la première phrase de l'énoncé « Choisis un nombre ». J'assigne donc la variable x à ce nombre inconnu.

- Quelles sont les autres opérations que je dois ajouter?

Pour trouver la réponse, j'analyse chaque autre énoncé et je construis l'expression.

- Ajoute 7 à ce nombre

$$x + 7$$

- Multiplie le résultat par 2

$$2(x + 7)$$

- Soustrais 2

$$2(x + 7) - 2$$

- Divise le résultat par 2

$$\frac{2(x + 7) - 2}{2}$$

- Soustrais le nombre initial

$$\frac{2(x + 7) - 2}{2} - x$$

- L'expression $\frac{2(x + 7) - 2}{2} - x$ permet donc de représenter l'énoncé algébriquement.

Retour sur l'exemple 1

- Utiliser la méthode Bansho (présentation des idées sur un tableau) afin de permettre aux élèves de partager leurs solutions et d'expliquer les stratégies utilisées pour trouver une expression qui représente l'énoncé. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre la variable x et le nombre de départ et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Poser la question suivante : Est-il possible de créer un autre problème de nombres semblable qui pourrait être représenté par une expression algébrique dont la réponse est différente du nombre choisi?
- Demander aux élèves de partager et de résoudre leurs énoncés avec le groupe-classe.
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit Un terrain de jeux.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour déterminer des expressions afin de généraliser le nombre de tuiles autour d'une cour.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement à propos des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

L'élève utilise des représentations visuelles afin de déterminer différentes stratégies visant à déterminer une expression générale pour indiquer le nombre de tuiles autour d'une cour.

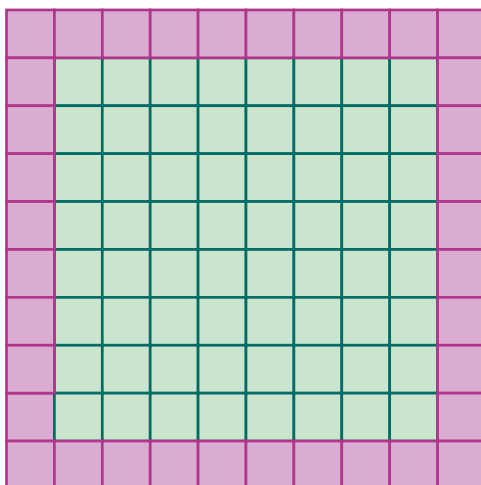
Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application le processus de mathématiques de sélection d'outils et de stratégies pour exprimer l'expression algébrique représentant le nombre de tuiles autour d'une cour.
- L'élève sélectionne la stratégie la plus appropriée pour résoudre le problème en question.
- L'élève utilise des représentations visuelles pour trouver des expressions algébriques équivalentes. L'utilisation de matériel concret peut permettre à l'élève de développer sa compréhension conceptuelle de la situation. L'élève pourrait aussi utiliser une autre stratégie, puisque plusieurs stratégies existent afin de déterminer des expressions algébriques.
- L'élève est encouragé à simplifier les expressions afin de voir si elles sont équivalentes ou non.

EXEMPLE 2

Un terrain de jeux

Un terrain de jeux est entouré d'un trottoir tel qu'illustré ci-dessous. Détermine le nombre de tuiles autour de ce terrain et formule une expression algébrique pour calculer le nombre de tuiles autour de n'importe quelle cour carrée.

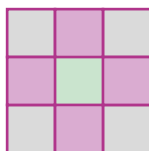




STRATÉGIE 1

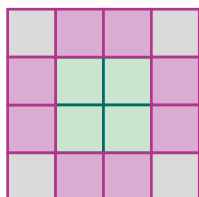
En utilisant la longueur des côtés du terrain

En commençant par un terrain de côté 1, je peux voir qu'il y a 4 fois le nombre de carrés violets plus 4 carrés gris.

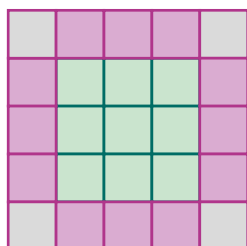


Donc pour un terrain de largeur 1×1 , soit avec un côté de 1, il y a $(4 \times 1) + 4 = 8$ carrés.

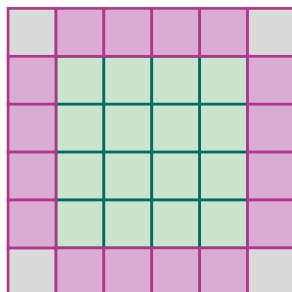
Je répète pour des terrains de côté 2, 3, 4 et 5, afin de trouver une régularité.



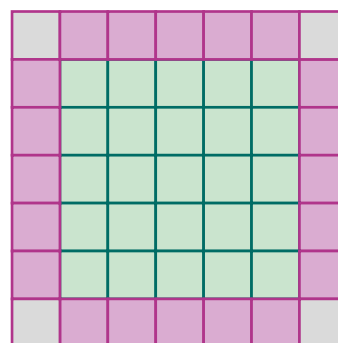
$$(4 \times 2) + 4 = 12 \text{ carrés}$$



$$(4 \times 3) + 4 = 16 \text{ carrés}$$



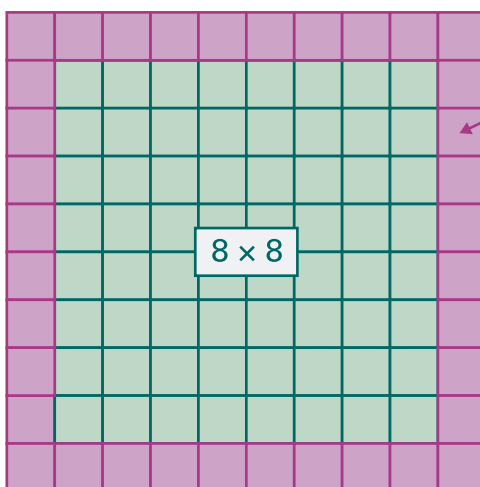
$$(4 \times 4) + 4 = 20 \text{ carrés}$$



$$(4 \times 5) + 4 = 24 \text{ carrés}$$

Le nombre de carrés du trottoir peut donc être généralisé par l'expression $(4 \times n) + 4$ ou $4n + 4$ où n représente la largeur d'un côté du terrain carré.

Voici la figure originale :



36 tuiles de trottoir

Elle contient donc :

$$4n + 4$$

$$4(8) + 4$$

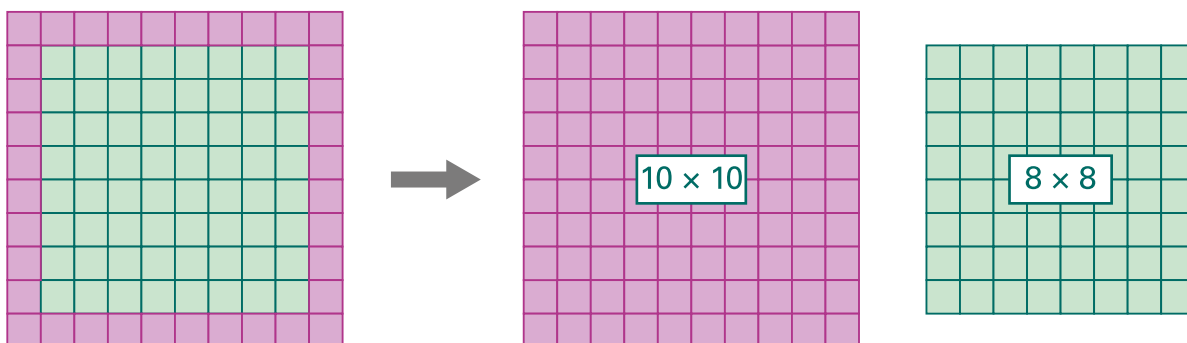
$$= 32 + 4$$

$$= 36 \text{ carrés}$$



STRATÉGIE 2

En comparant les aires des deux rectangles



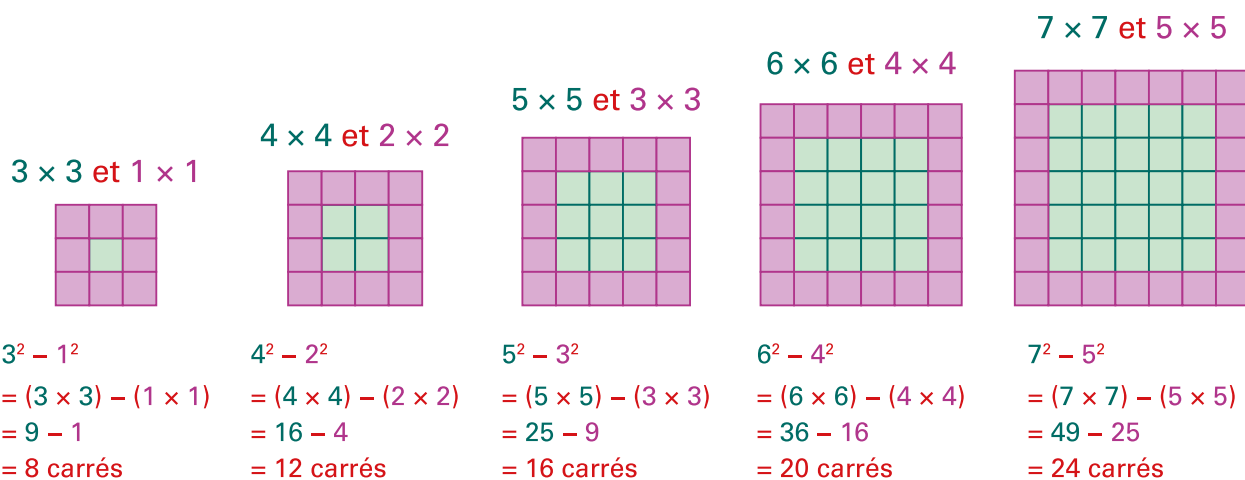
Le trottoir autour du parc représente un carré de 10×10 et le parc, un carré de 8×8 .
En soustrayant l'aire des deux carrés, j'obtiens

$$10^2 - 8^2$$

$$= 100 - 64$$

$$= 36 \text{ carrés}$$

Je répète pour des terrains de côtés 1, 2, 3, 4 et 5, afin de trouver une régularité.



Le nombre de carrés du trottoir peut être donc généralisé par l'expression $(n+2)^2 - n^2$
où n représente la largeur d'un côté du terrain carré.

? **Comment sais-tu que les deux expressions sont équivalentes?**

La première expression $4n + 4$ ne peut pas être simplifiée davantage donc, je simplifie la deuxième expression, soit $(n+2)^2 - n^2$ afin de déterminer si elles sont égales.

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - n^2 \\&= (n+2) \times (n+2) - n^2 \\&= n^2 + 4n + 4 - n^2 \\&= 4n + 4 + n^2 - n^2 \\&= 4n + 4\end{aligned}$$

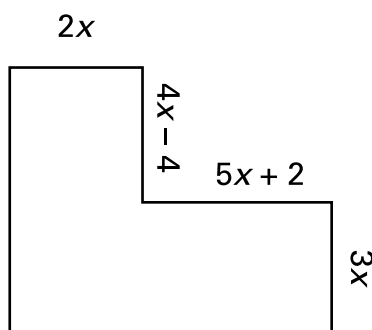
Je peux déterminer que les deux expressions sont équivalentes.

Retour sur l'exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer l'expression algébrique représentant le nombre de tuiles autour du terrain de jeu. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les opérations mathématiques qui favorisent l'utilisation des tuiles algébriques et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, posez des questions telles que :
 - Combien d'autres expressions peux-tu trouver pour déterminer le nombre de tuiles au tour d'un parc carré?
 - Est-il important que les expressions soient équivalentes? Explique ton raisonnement.
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

1. Dans l'exemple 2, qu'arriverait-il si le terrain était un rectangle au lieu d'un carré?
2. Une cour a des côtés dont les dimensions sont indiquées dans le diagramme ci-dessous. Donne l'expression générale pour le périmètre de cette cour.



Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves de faire quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou autres preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement et des élèves pour qu'elles et ils s'améliorent.

Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Processus mathématique préconisé : communication

L'élève communique le résultat de ses réponses en y ajoutant toutes les étapes afin de clarifier ses idées. L'enseignante ou l'enseignant peut poser les questions suivantes afin d'aider l'élève à résoudre le problème :

- De quelle façon pourras-tu expliquer ton raisonnement?
- Comment peux-tu vérifier si les termes sont justes lorsque tu réponds à une question?
- As-tu utilisé un moyen efficace pour organiser ta réponse afin de t'assurer de la compréhension d'un autre élève qui voudrait lire ton travail?

Corrigé

1. Imagine une machine à algèbre qui prend des nombres (ENTRÉE) et qui produit des nombres pour chaque nombre entré (SORTIE). J'insère les chiffres ci-dessous dans la machine pour obtenir des nombres à la sortie. Identifie l'expression qui représente chacun des résultats.

ENTRÉE		SORTIE	
a) 0			2
b) 3			11
c) 4			18
d) 7			51
e) 11			123





Je transforme l'expression en mots en me posant les questions suivantes :

- Quelle est la relation entre les deux familles de nombres (les entrées et les sorties)?
- Quel genre de questions puis-je me poser pour trouver la relation entre l'entrée et la sortie des nombres ?
- Que dois-je faire à 3 pour obtenir 11?

Je peux additionner 8. Je peux également multiplier par 3 et additionner 2.

- Est-ce que ça fonctionne avec 4?

Pas pour l'addition, car la réponse serait 12.

Une multiplication par 3 avec une addition de 2 ne fonctionne pas non plus, car la sortie serait 14.

- Est-ce qu'il y a d'autres possibilités pour la valeur de 4?

Si je multiplie 4 par soi-même et j'additionne 2, j'obtiens 18 comme dans ce calcul : $(4 \times 4) + 2 = 18$

Je peux vérifier pour 7 et 11 pour voir si la règle tient.

$$(7 \times 7) + 2 = 51$$

et

$$(11 \times 11) + 2 = 123$$

- Quelle généralisation est-ce que je peux trouver à la suite de mes essais?

Je peux donc généraliser cette relation en utilisant le nombre de l'entrée que je multiplie par lui-même et j'additionne 2.

$$(\text{Valeur d'entrée} \times \text{Valeur d'entrée}) + 2 = \text{Valeur de sortie}$$

En remplaçant ma valeur d'entrée par n , je peux écrire mon expression algébrique en additionnant le terme algébrique et la valeur constante, ce qui me donne :

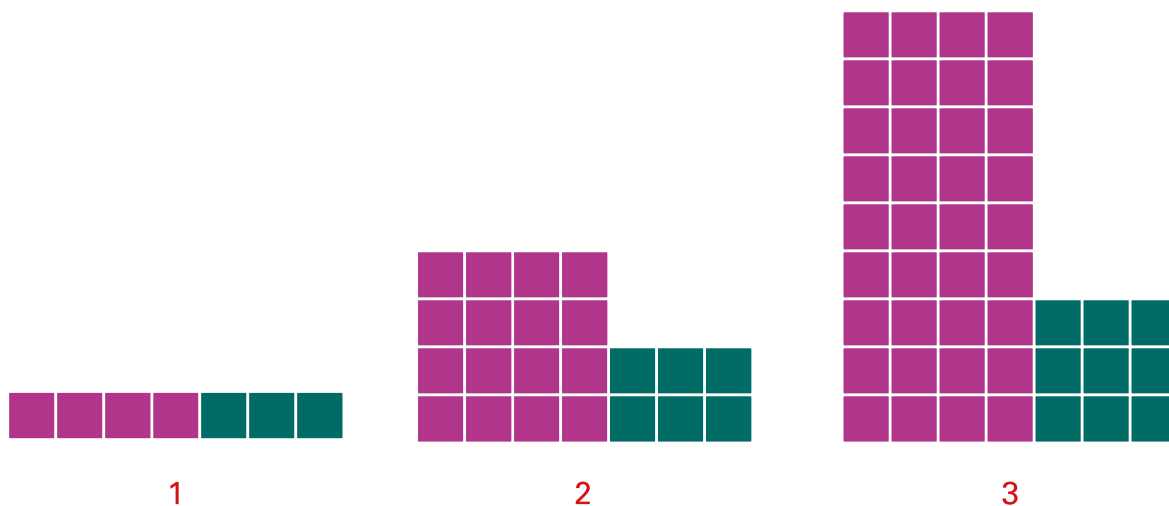
$$(n \times n) + 2$$

$$= n^2 + 2$$

2. Quelle expression algébrique représente cette suite à motifs croissants?

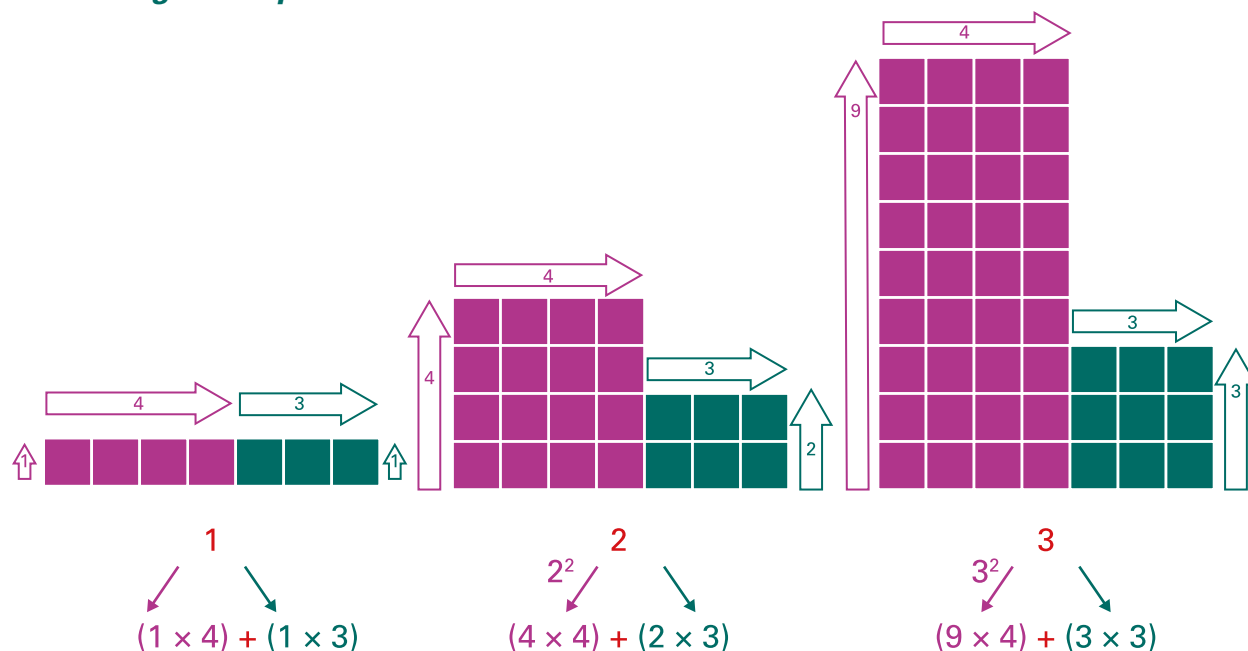
Processus mathématique préconisé : réflexion

L'élève réfléchit afin de déterminer l'expression qui représente le prix de location du studio de danse relatif aux nombres d'heures de location. Dans cet exemple, le corrigé démontre une stratégie de représentation visuelle.



Calcul de l'aire (la hauteur $\times$ la largeur) des blocs

? *Quelle régularité peux-tu observer?*



L'aire des blocs violets augmente avec la régularité $n^2 \times 4$, où n représente le numéro de la figure.

L'aire des blocs verts augmente avec la régularité $n \times 3$, où n représente le numéro de la figure.

L'expression générale est donc $n^2 \times 4 + n \times 3 = 4n^2 + 3n$.

3. Tes amis et toi louez un studio de danse pour la préparation du spectacle de fin d'année. Le prix de location du studio de danse est de 20 \$ par heure, en plus d'un prix de base de 30 \$ pour l'activation du contrat. Écris l'expression qui représente le prix de location du studio de danse relatif aux nombres d'heures de location.

Représentation visuelle

? *Comment peux-tu organiser les données afin de t'aider à résoudre le problème?*

J'utilise la représentation visuelle pour déterminer l'expression qui représente le prix total de location du studio de danse relatif au nombre d'heures de location.

Aucune
heure de
location



=



Activation du
contrat

Prix de
location

30 \$

30 \$

$$0 + 30 = 30$$

Le prix pour l'activation du contrat est de 30 \$. Si le nombre d'heures de location est nul, le prix de location est de 30 \$.



1 heure de location

20 \$



Activation du contrat

30 \$

=



Prix de location

50 \$

$$20 + 30 = 50$$

Le prix pour 1 heure de location est de 50 \$.



1 heure de location

20 \$



1 heure de location

20 \$



Activation du contrat

30 \$

=



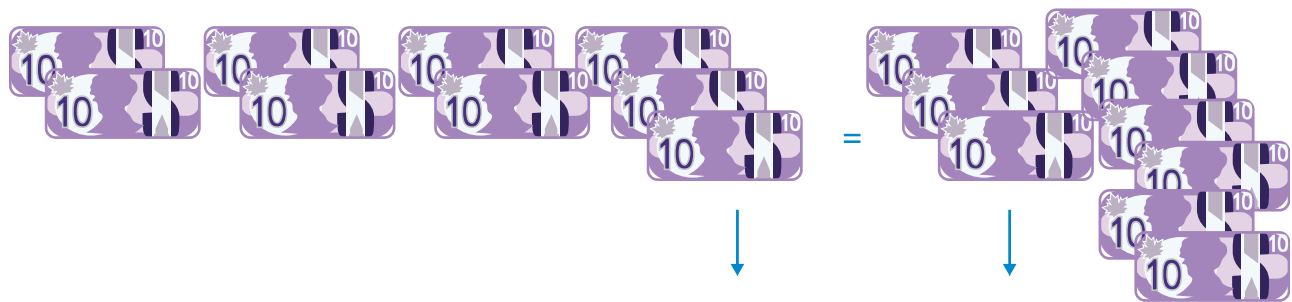
Prix de location

70 \$

$$20 + 20 + 30 = 70$$

$$20(2) + 30 = 70$$

Puisque le nombre 2 représente le nombre d'heures de location, l'expression est $20(2) + 30 = 70$.



1 heure de
location

20 \$

1 heure de
location

20 \$

1 heure de
location

20 \$

Activation du
contrat

30 \$

Prix de
location

90 \$

$$20 + 20 + 20 + 30 = 90$$

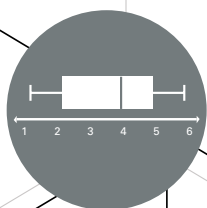
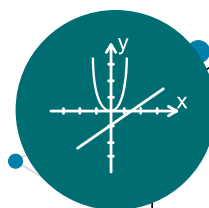
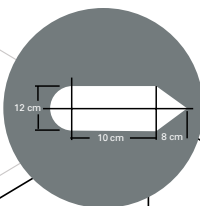
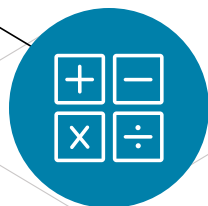
$$20(3) + 30 = 90$$

Puisque le nombre 3 représente le nombre d'heures de location, l'expression est $20(3) + 30 = 90$.

Je généralise donc avec l'expression algébrique $20n + 30$ où n représente le nombre d'heures.

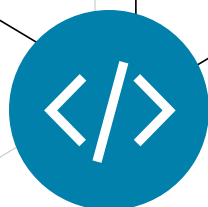


VERSION DE L'ÉLÈVE



$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$

9^e
ANNÉE



PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

ALGÈBRE

Créer des expressions algébriques
pour généraliser des relations

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

Jeux de nombres

Généralise l'énoncé suivant par une expression algébrique.

- Choisis un nombre
- Ajoute 7 à ce nombre
- Multiplie le résultat par 2
- Soustrais 2
- Divise le résultat par 2
- Soustrais le nombre initial

Quelle est ta réponse?

Vérifie que la réponse obtenue sera toujours la même, peu importe le nombre de départ. Justifie ta réponse.

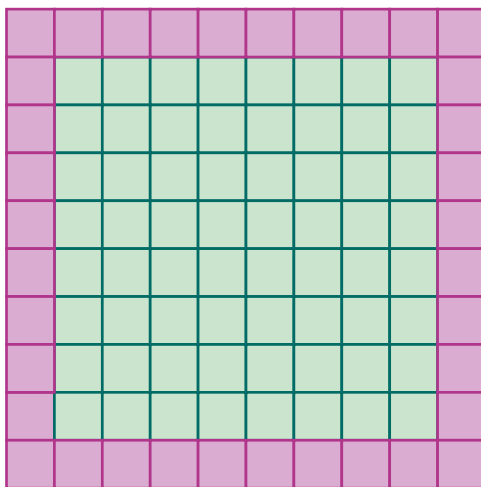


TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

Un terrain de jeux

Un terrain de jeux est entouré d'un trottoir tel qu'illustré ci-dessous. Détermine le nombre de tuiles autour de ce terrain et détermine une expression algébrique pour calculer le nombre de tuiles autour de n'importe quelle cour carrée.



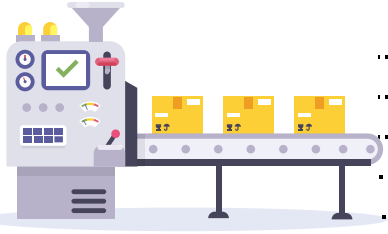
TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

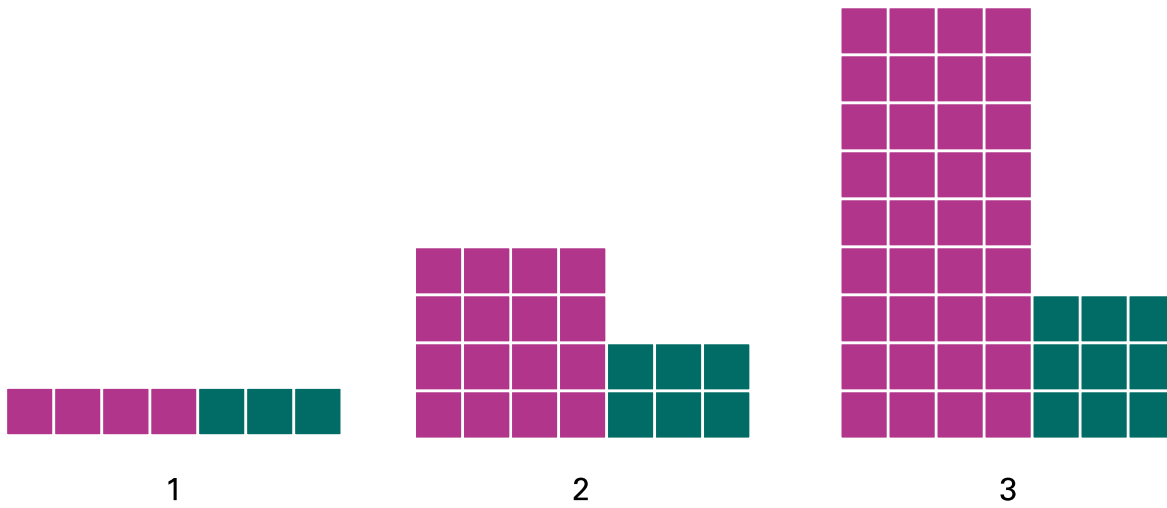
1. Imagine une machine à algèbre qui prend des nombres (ENTRÉE) et qui produit des nombres pour chaque nombre entré (SORTIE). J'insère les chiffres ci-dessous dans la machine pour obtenir des nombres à la sortie. Identifie l'expression qui représente chacun des résultats.

ENTRÉE		SORTIE	
a) 0			2
b) 3			11
c) 4			18
d) 7			51
e) 11			123



TA STRATÉGIE

2. Quelle expression algébrique représente cette suite à motifs croissants?



TA STRATÉGIE

3. Tes amis et toi louez un studio de danse pour la préparation du spectacle de fin d'année. Le prix de location du studio de danse est de 20 \$ par heure, en plus d'un prix de base de 30 \$ pour l'activation du contrat. Écris l'expression qui représente le prix de location du studio de danse relatif aux nombres d'heures de location.



TA STRATÉGIE