9e ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

NOMBRES

Trouver des stratégies de résolution de problèmes comportant des fractions positives et négatives

RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève résout des problèmes de la vie quotidienne comportant des opérations sur les fractions positives et les nombres fractionnaires.

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- résout des problèmes à l'aide de différentes stratégies;
- utilise du matériel concret afin de résoudre des problèmes;
- établit des liens entre le concept mathématique des fractions et son application dans la vie de tous les jours.

MATÉRIEL

- calculatrice;
- bandes de fractions.

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

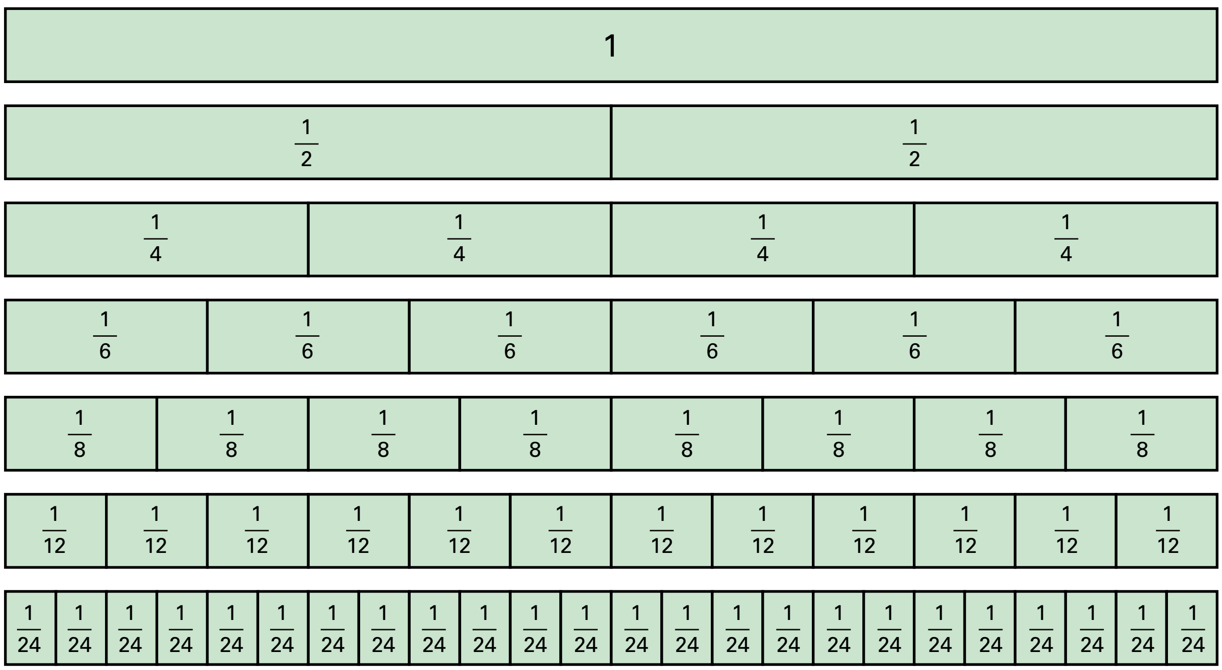
Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débuter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Nombres	Les fractions unitaires
Nombres	Les signes des nombres et l'effet sur les fractions (rapports et taux)
Nombres	Les stratégies de résolution de problèmes comportant des fractions positives et négatives
Algèbre	Les relations linéaires ou non linéaires

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- Les bandes de fractions permettent d’effectuer des opérations mathématiques à partir des fractions en plus de déterminer des fractions équivalentes.



- Un rapport peut être écrit de plusieurs façons : a par rapport à b ou $a{:}b$ ou $\frac{a}{b}$.
- Lors d’une addition ou d’une soustraction de fraction, il est utile de mettre les fractions sur un dénominateur commun : $\frac{3}{4}+\frac{6}{8}=\frac{6}{8}+\frac{6}{8}=\frac{12}{8}=1\frac{1}{2}$.

Déroulement pour l’exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **Les stratégies de résolution de problèmes comportant des fractions positives et négatives** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves les stratégies à préconiser afin de résoudre des problèmes de la vie courante comportant des fractions ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l’activité. Dans cette minileçon, l’élève découvre des stratégies de résolution de problèmes comportant des fractions positives et négatives.

- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
  - Quels problèmes de la vie quotidienne peux-tu résoudre à l'aide de fractions positives et négatives?
  - Quelle est l'importance des fractions dans le système impérial?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit On gagne à la loterie!
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour additionner et soustraire des fractions.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficulté que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 1

L'élève utilise du matériel de manipulation afin de déterminer la partie du montant total d'argent gagné par madame Julie qu'elle gardera pour elle-même.

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application les processus mathématiques suivants :
  - Communication
  - Établissement des liens

EXEMPLE 1

On gagne à la loterie!

Madame Julie gagne un montant d'argent à la loterie. Elle décide de répartir une partie de ses gains entre 3 associations caritatives. Elle donne $\frac{1}{8}$ de ses gains à une association qui vient en aide aux familles dans le besoin, $\frac{1}{4}$ de ses gains à une association qui vient en aide aux jeunes sportifs et $\frac{1}{6}$ de ses gains à une association qui vient en aide aux étudiants ayant besoin d'un appui financier pour leurs projets postsecondaires. Quelle partie du montant d’argent gagné madame Julie garde-t-elle pour elle-même?

Notes pédagogiques

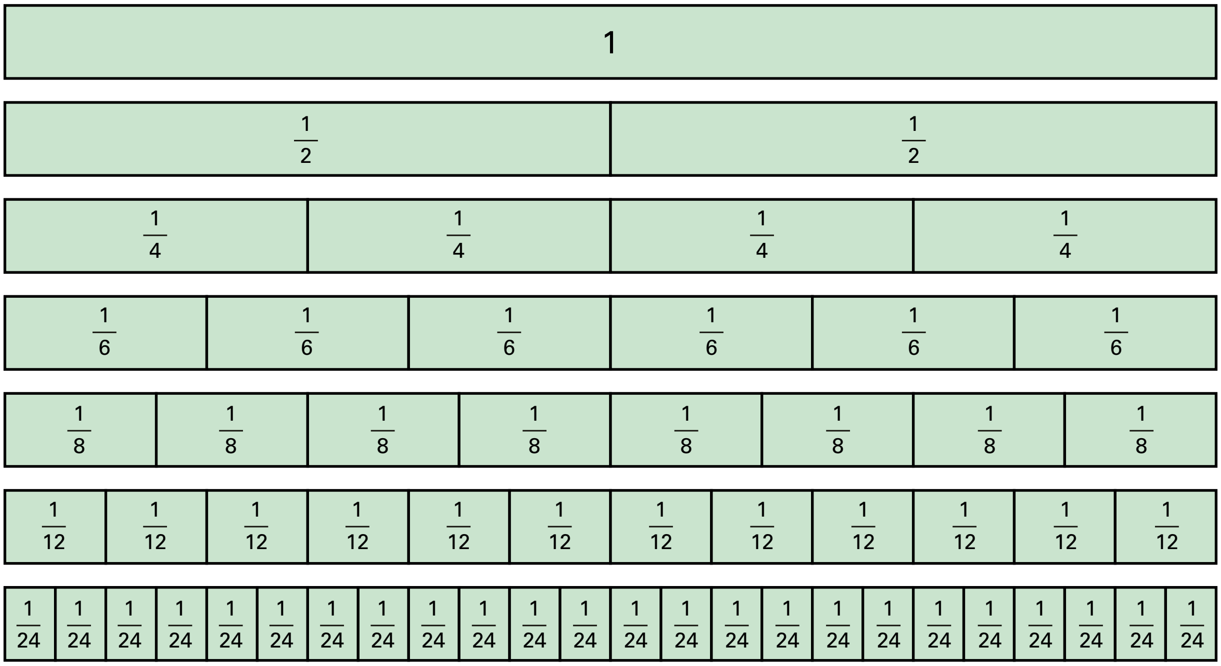
- L’élève est invitée ou invité à communiquer sa pensée afin de résoudre les problèmes en petit groupe de discussion. Ce travail en dyade permet à l’élève de clarifier ses idées et de comparer les différentes stratégies choisies.
- L’élève utilise ses nouvelles connaissances en mathématiques afin d’établir des liens avec les nouveaux concepts et leur application dans la vie de tous les jours.

STRATÉGIE 1

Les bandes de fractions

Quelles sont les données importantes à identifier afin de résoudre le problème?

J’utilise les bandes de fractions afin de déterminer la partie du montant d’argent que madame Julie va garder pour elle-même.



Je détermine la partie d’argent qu’elle va donner aux différentes associations.

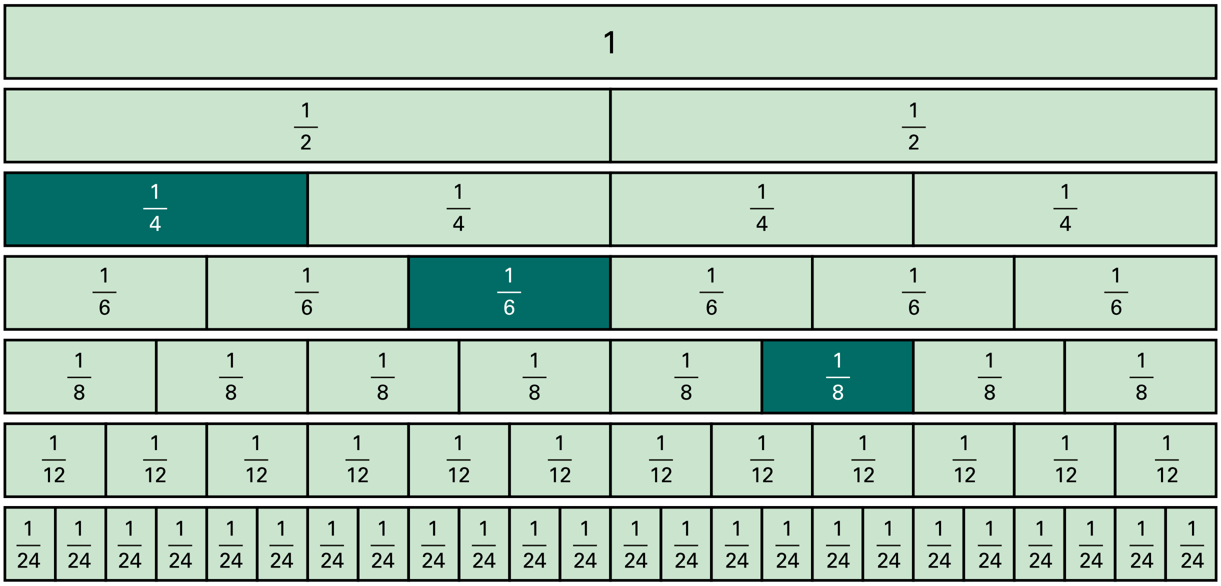
La valeur de 1, soit la plus longue bande, représente le montant total d’argent gagné par madame Julie.

J’identifie chacune des fractions sur les bandes.

Association qui vient en aide aux familles dans le besoin $F = \frac{1}{8}$

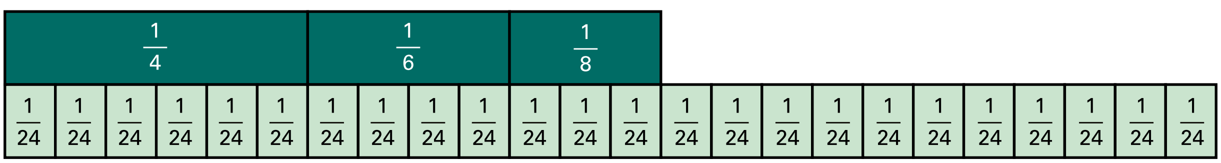
Association qui vient en aide aux jeunes sportifs $S = \frac{1}{4}$

Association qui vient en aide aux étudiants nécessitant une aide financière $E = \frac{1}{6}$



Afin de pouvoir additionner des fractions, le dénominateur doit être le même. Autrement, il devient difficile d'identifier le point de référence. Par exemple, il est difficile de visualiser $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ puisque nous n'avons pas le même point de référence ou dénominateur.

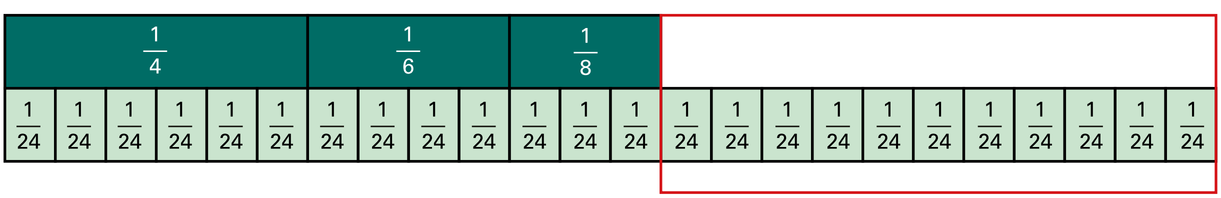
Donc, je place les tuiles identifiées au-dessus des tuiles divisées en vingt-quatrième.



Je calcule que madame Julie va faire don de $\frac{13}{24}$ du montant qu'elle a gagné à la loterie.

***?* Pourquoi est-il nécessaire de trouver des fractions équivalentes afin de résoudre le problème?**

Je détermine la partie des gains que madame Julie va garder pour elle-même. Je remarque qu'il reste 11 tuiles sur 24 qui ne sont pas couvertes par les sections subdivisées.



Selon mes calculs, madame Julie garde $\frac{11}{24}$ du montant qu'elle a gagné à la loterie.

STRATÉGIE 2

Les opérations sur les fractions

J’établis la fraction qui sera répartie pour chacune des parties du problème.

Association qui vient en aide aux familles dans le besoin $F = \frac{1}{8}$

Association qui vient en aide aux jeunes sportifs $S = \frac{1}{4}$

Association qui vient en aide aux étudiants nécessitant une aide financière $E = \frac{1}{6}$

Montant d’argent gagné à la loterie $G = 1$

Est-ce que ta solution est claire et bien organisée?
Utilises-tu les termes justes lorsque tu communiques ta démarche?

$J = G - (F + S + E)$ J’établis une équation qui représentera la partie gardée par madame Julie (J).

$J = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$ J’établis l’addition des 3 nombres positifs. Je mets temporairement entre parenthèses la somme d’argent qui sera répartie pour la mettre en évidence.

$J = 1 - \left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{4}\right)$ Afin de comparer les fractions, je trouve des fractions équivalentes ayant le même dénominateur. Le dénominateur commun permet une addition ou une soustraction des fractions. Donc, je trouve des fractions équivalentes sur 24 en effectuant une multiplication sur chacune. Je note que cette multiplication ne change pas le calcul, car elle est égale à 1.

$J = 1 - \left(\frac{3}{24} + \frac{6}{24} + \frac{4}{24}\right)$ J’effectue l’addition.

$J = 1 - \left(\frac{13}{24}\right)$ Je retire les parenthèses afin d’effectuer la soustraction.

$J = 1 \times \frac{24}{24} - \frac{13}{24}$ Je trouve une fraction équivalente sur 24 pour la valeur numérique de 1.

$J = \frac{24}{24} - \frac{13}{24}$ J’effectue la soustraction.

$J = \frac{11}{24}$

Selon mes calculs, madame Julie garde $\frac{11}{24}$ du montant qu’elle a gagné à la loterie.

As-tu utilisé le moyen le plus efficace pour exprimer ta solution?

Notes pédagogiques

- Afin d'amener l'élève à établir des liens entre l'exemple et sa vie quotidienne, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution du problème. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion :
  – Dans quel autre contexte de ta vie quotidienne ce genre d'opérations avec les fractions pourrait-il être utile?
  – Comment tes connaissances sur ces concepts mathématiques peuvent-elles t'aider à résoudre le problème?

Retour sur l'exemple 1

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour additionner et soustraire des fractions. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les bandes de fractions et les opérations afin de créer des fractions équivalentes et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
  - Quelles sont les stratégies qui permettent d'additionner et de soustraire des fractions?
  - Utilise les différentes représentations de fractions afin d'expliquer pourquoi il est nécessaire de trouver le dénominateur commun avant d'additionner des fractions?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit Le rebondissement d'une balle.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour déterminer des valeurs à l'aide de fractions ou rapports équivalents.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficulté que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

L'élève utilisera différentes stratégies de résolution de problèmes afin de pouvoir déterminer la hauteur atteinte par la balle après le premier rebond.

Notes pédagogiques

Cet exemple permet à l'élève d'appliquer le processus mathématique de sélection d'outils et de stratégies à l'aide de rapports.

EXEMPLE 2

Le rebondissement d'une balle

On laisse tomber une balle à une hauteur de 343 pieds. Au premier rebond, elle atteint une hauteur égale à $\frac{2}{7}$ de la hauteur initiale. Quelle est la hauteur du premier rebond?

Corrigé

Notes pédagogiques

L'élève sélectionne la stratégie la plus appropriée pour résoudre le problème en question. L'élève utilise soit un tableau de rapports soit une proportion afin de déterminer la hauteur de la balle après le premier rebond. Demander à l'élève d'expliquer pourquoi il tente de trouver le facteur entre 7 et 343.

STRATÉGIE 1

En multipliant par une fraction

Puisque je cherche à trouver $\frac{2}{7}$ de 343, j'effectue une multiplication.

$$\frac{2}{7} \times 343$$

$$= \frac{2}{7} \times \frac{343}{1}$$

$$= \frac{686}{7}$$

$$= 98$$

Donc la balle atteindra une hauteur de 98 pieds au premier rebond.

La stratégie utilisant un rapport met en valeur l'utilité du tableau de rapports. Cet outil permet à l'élève de démontrer sa compréhension des entiers et de puiser dans ses connaissances en lien avec le sens du nombre.

Aider l'élève à développer davantage son sens du nombre et de l'opération en étant exposé à plusieurs représentations du même calcul. Par exemple, $7 \times 20 \times 2 + (7 \times 9) = 343$ ou 7×49, alors $2 \times 49 = 98$. Cette représentation symbolise les produits partiels qu'on retrouve dans le tableau de rapports.

STRATÉGIE 2

En utilisant un tableau de rapports

Je peux transformer le problème en comparant des fractions de cette façon :

$$\frac{2}{7} = \frac{h}{343}$$

J'utilise un tableau de rapports pour trouver la valeur de *h.*

$\times 9$

$\times 20$ $\times 2$ $h = 98$ pieds

2	40	80	18	80 + 18 = 98	h
7	140	280	63	280 + 63 = 343	343

$\times 20$ $\times 2$

$\times 9$

Donc la balle atteindra une hauteur de 98 pieds au premier rebond.

Notes pédagogiques

- La stratégie utilisant la proportion met en valeur l'isolement d'une variable. L'élève devra puiser dans les concepts acquis en algèbre afin de résoudre le problème.
- Afin d'amener l'élève à effectuer le problème, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution du problème. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion afin d'aider l'élève à simplifier des expressions algébriques :
  - Connais-tu une autre stratégie qui te permet d'effectuer ces calculs?
  - Quelle stratégie est la plus efficace si les nombres sont dans les dizaines? les centaines? les milliers?

STRATÉGIE 3

En utilisant des proportions

J'établis les proportions en utilisant le rapport préétabli.

$$\frac{2}{7}=\frac{h}{343}$$

Je résous en multipliant les 2 côtés de l'équation par 343 afin d'isoler la variable h.

$$\begin{aligned}\frac{2}{7}&=\frac{h}{343}\\ \frac{2}{7}\times 343&=\frac{h}{343}\times 343\\ \frac{2}{7}\times 343&=h\\ \frac{686}{7}&=h\\ 98\text{ pieds}&=h\end{aligned}$$

Je détermine que la hauteur de la balle après 1 rebond sera de 98 pieds.

Retour sur l'exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer la hauteur de la balle après son premier rebond. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les rapports et les fractions et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés.
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

On laisse tomber une balle à une hauteur de 250 pieds. Chaque rebond atteint une hauteur égale à $\frac{3}{8}$ de la hauteur du rebond précédent.

- Trace un graphique pour démontrer la hauteur des 7 premiers rebonds. Quelles sont les caractéristiques de ce graphique?

Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves de faire quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou autres preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement et des élèves en vue de les aider à s'améliorer.

  Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Corrigé

1. Un boulanger vend $\frac{3}{8}$ de ses pains le matin et $\frac{1}{2}$ de ses pains le reste de la journée. À la fermeture, il lui reste 11 pains. Combien y avait-il de pains à l'ouverture du magasin?

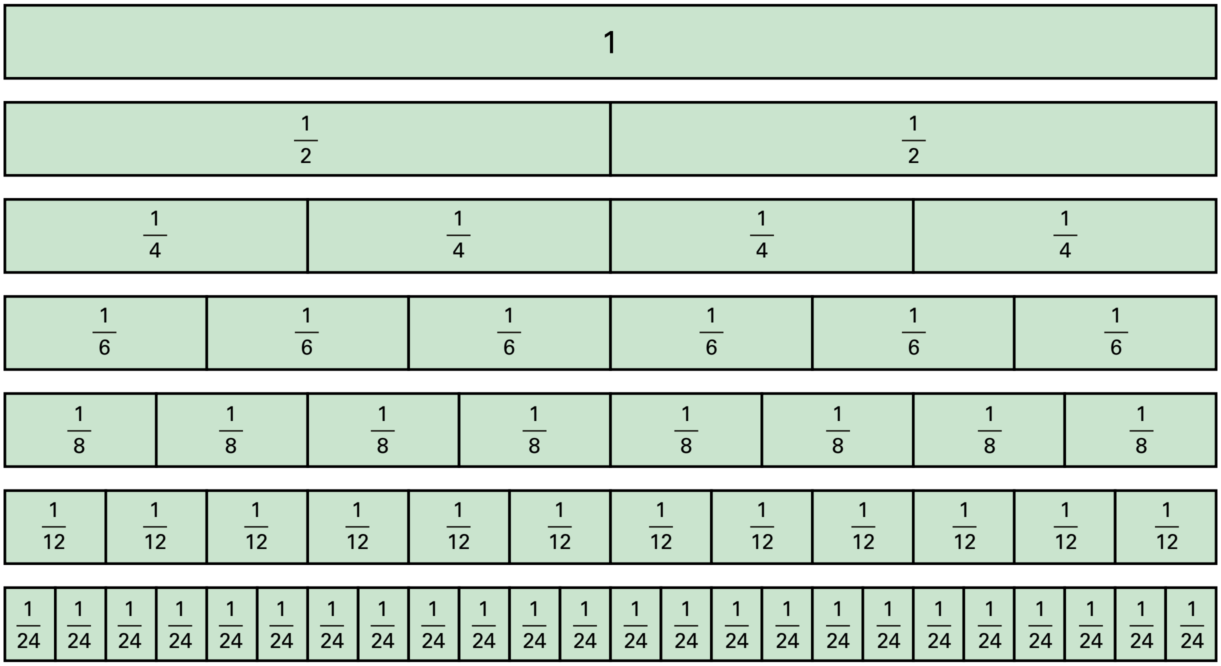
Processus mathématique préconisé : représentation

L'élève doit choisir une façon adéquate de représenter les fractions afin de résoudre la situation.

STRATÉGIE 1

Utilisation des bandes de fractions

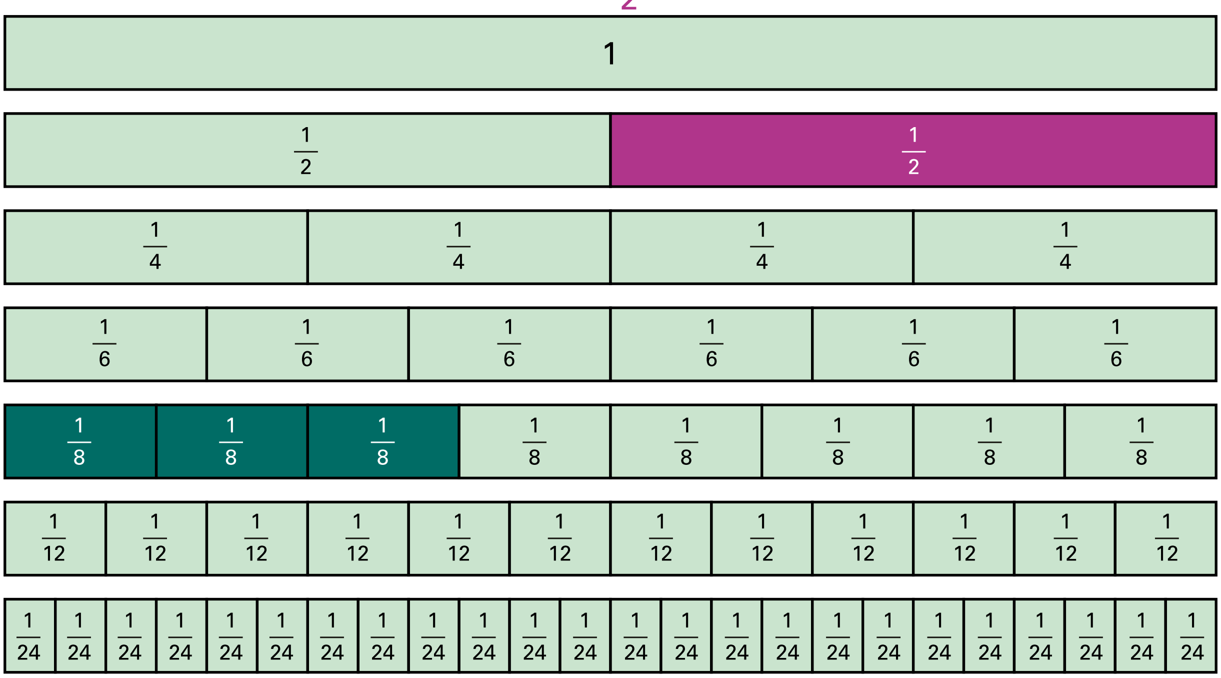
J’utilise les bandes de fractions afin de déterminer la quantité de pains.



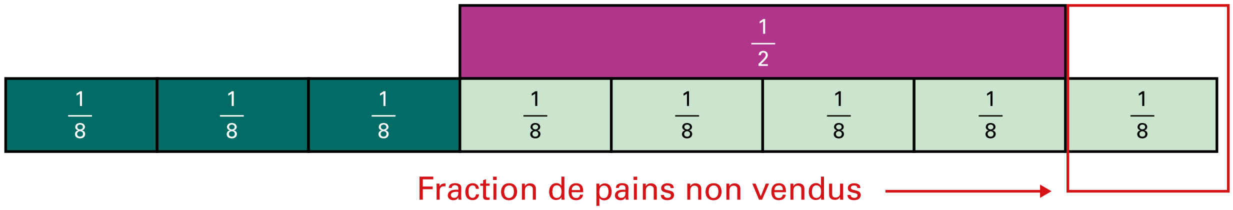
J’identifie chacune des fractions sur les bandes.

Quantité de pains vendus le matin = $\frac{3}{8}$

Quantité de pains vendus en après-midi = $\frac{1}{2}$



Je place les tuiles identifiées au-dessus des tuiles divisées en huitième.



Je calcule que le boulanger a vendu $\frac{7}{8}$ de ses pains pendant la journée et qu'il en reste $\frac{1}{8}$.

J'utilise un tableau de rapports afin de déterminer le nombre de pains que le boulanger avait en sa possession en début de journée dans son magasin.

Puisqu'il reste 11 pains et que ceux-ci représentent $\frac{1}{8}$ du nombre du départ, je peux écrire cet énoncé à l'aide de la proportion suivante :

$$\frac{1}{8} = \frac{11}{n}$$

J'utilise un tableau de rapports pour trouver la valeur de n.

Je multiplie 1 et 8 par 10, j'obtiens donc $\frac{10}{80}$.

Je peux additionner 1 et 10 et 80 et 8; j'obtiens donc $\frac{11}{88}$.

Donc le nombre de pains au début de la journée est 88.

$\times$ 10

1	10			1 + 10 = 11	11
8	80			8 + 80 = 88	n

$\times$ 10

n = 88 pains

Je détermine que le boulanger avait 88 pains en sa possession en début de journée.

STRATÉGIE 2

Utilisation d'une équation

Je peux utiliser une équation où *p* représentent le nombre de pains au début de la journée.

Donc,

p = le nombre de pains en tout

$\frac{3}{8}p$ = ce qui est vendu le matin

$\frac{1}{2}p$ = ce qui est vendu en après-midi

L'équation suivante représente donc ce qui reste à la fin de la journée.

$$p-\left(\frac{3}{8}p\right)-\left(\frac{1}{2}p\right)=11$$

Je résous l'équation

$$p-\frac{3}{8}p-\frac{1}{2}p=11$$

$$p-\frac{3}{8}p-\frac{4}{8}p=11$$

$$p-\frac{7}{8}p=11$$

$$\frac{8}{8}p-\frac{7}{8}p=11$$

$$\left(\frac{1}{\cancel{8}}p\right)\cancel{8}=11\times 8$$

$$p=88$$

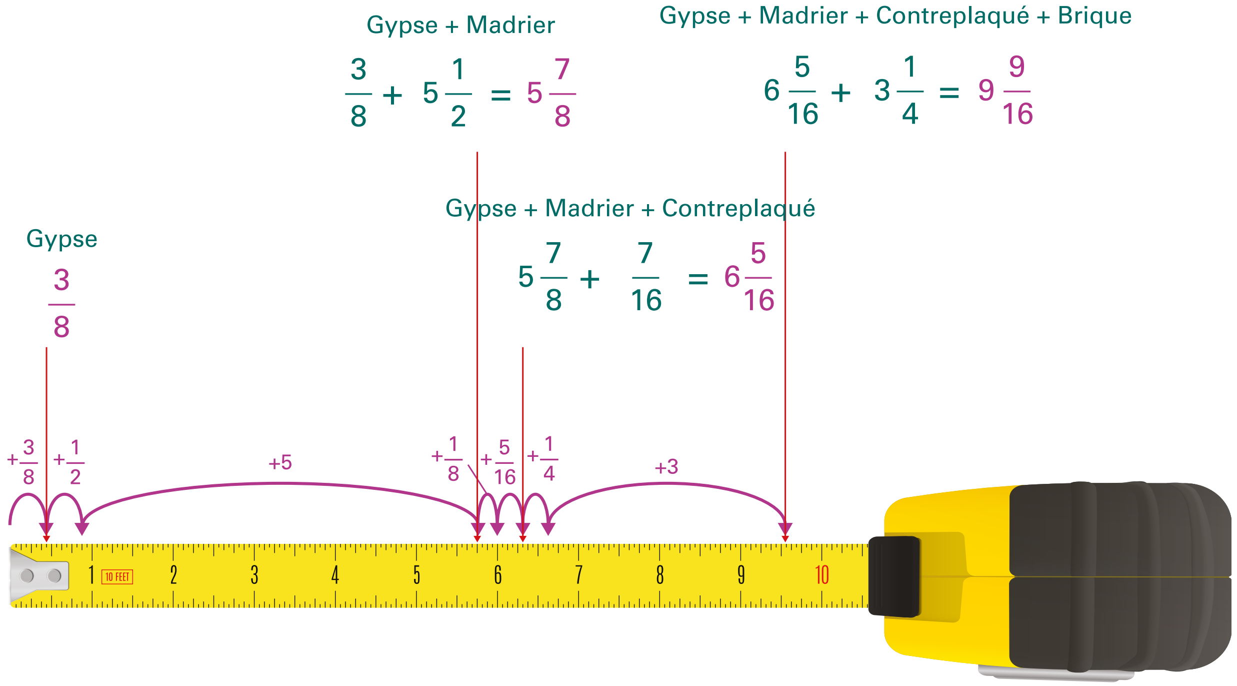
Il y avait donc 88 pains en début de journée.

2. Jake veut passer un fil électrique au travers du mur extérieur de sa maison afin d'installer une lampe. Afin de traverser l'épaisseur du mur, Jake devra percer un panneau de gypse de $\frac{3}{8}$ pouce, un madrier de $5\frac{1}{2}$ pouces, un panneau de contreplaqué de $\frac{7}{16}$ pouce et finalement $3\frac{1}{4}$ pouces de brique. Quelle longueur de mèche devra-t-il utiliser pour percer son trou dans le mur afin d'installer la lampe?

Processus mathématique préconisé : sélection d'outils et de stratégies

L'élève doit utiliser le meilleur outil afin de résoudre le problème et prendre des décisions éclairées.

J'utilise une droite numérique afin de déterminer la longueur de la mèche qui devra être utilisée pour percer un trou dans le mur et installer la lampe.



Je commence mon addition à partir du 0.

J'ajoute la valeur qui correspond à l'épaisseur du gypse, qui est égale à $\frac{3}{8}$ pouce.

J'ajoute la valeur qui correspond à l'épaisseur du madrier, soit $5\frac{1}{2}$ pouces.

J'ajoute la valeur qui correspond au panneau de contreplaqué, qui a une épaisseur de $\frac{7}{16}$ pouce.

J'ajoute l'épaisseur qui correspond à la brique, soit $3\frac{1}{4}$ pouces.

Je calcule que l'épaisseur du mur est de $9\frac{9}{16}$ pouces, donc Jake aura besoin d'une mèche qui mesure au moins $9\frac{9}{16}$ pouces.

3. Antoine doit couper des planches de bois de 8 pi pour faire des embouts de $\frac{2}{3}$ pi pour un mur de maison. Il possède 5 planches. Combien d'embouts peut-il couper en tout?

STRATÉGIE 1

Avec une représentation visuelle

J'utilise une image d'une planche de bois de 8 pi et je la divise en sections de 1 pi.

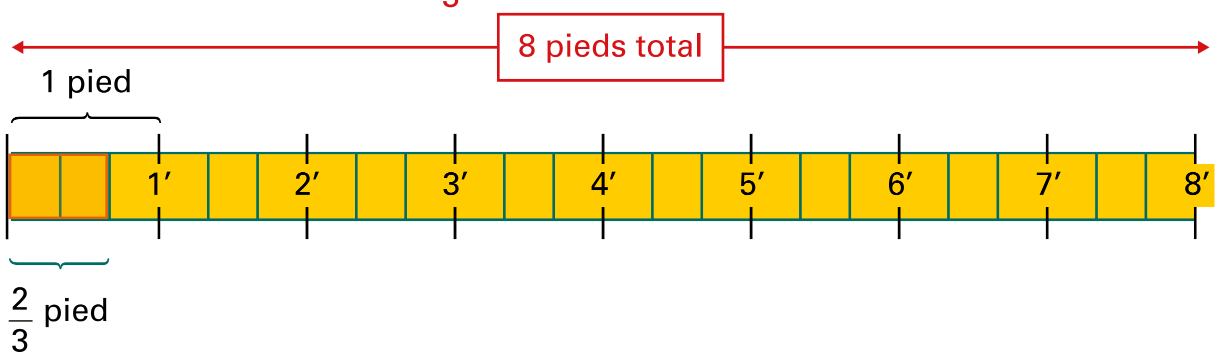
Chaque section de 1 pied est ensuite divisée en 3 et je représente $\frac{2}{3}$ d'un pied.

J'ai des tiers et j'ai un morceau de 8 pieds. Donc si je divise 8 pieds en tiers, j'obtiens 24 tiers.

J'ai donc 8×3 tiers soit 24 tiers dans 8 pieds.

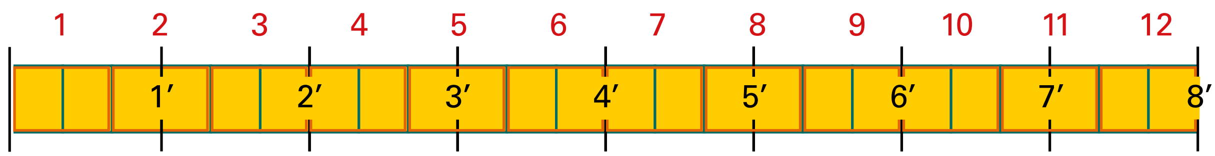
Puisque je veux des morceaux de 2 tiers de pieds, je dois donc diviser mes 24 tiers par 2 tiers.

J'obtiens donc 12 embouts de $\frac{2}{3}$ de pieds dans une planche de 8 pieds.



Je compte le nombre d'embouts de $\frac{2}{3}$ d'un pied qui rentrent dans la planche, soit 12.

12 embouts de $\frac{2}{3}$ pied



Puisqu'il y a 5 planches, Antoine peut couper $5 \times 12 = 60$ embouts au total.

STRATÉGIE 2

Avec une stratégie numérique

J'utilise la division de fractions pour voir combien de $\frac{2}{3}$ pi il y a dans 8 pieds. Puisque $\frac{2}{3}$ est plus petit que 1, la réponse sera plus grosse que 8 donc j'utilise la division par une fraction, soit :

$$8 \div \frac{2}{3}$$
$$= 8 \times \frac{3}{2}$$
$$= \frac{24}{2}$$
$$= 12$$

Donc il y a 12 embouts de 2/3 pied qui peuvent être coupés dans un morceau de 8 pieds.

Puisqu'il y a 5 planches, j'aurai $5 \times 12 = 60$ morceaux en tout.

VERSION DE L'ÉLÈVE

9e ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

NOMBRES

Trouver des stratégies de résolution de problèmes comportant des fractions positives et négatives

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

On gagne la loterie!

Madame Julie gagne un montant d’argent à la loterie. Elle décide de répartir une partie de ses gains entre 3 associations caritatives. Elle donne $\frac{1}{8}$ de ses gains à une association qui vient en aide aux familles dans le besoin, $\frac{1}{4}$ de ses gains à une association qui vient en aide aux jeunes sportifs et $\frac{1}{6}$ de ses gains à une association qui vient en aide aux étudiants ayant besoin d’un appui financier pour leurs projets postsecondaires. Quelle partie du montant d’argent gagné madame Julie garde-t-elle pour elle-même?

TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

Le rebondissement d’une balle

On laisse tomber une balle à une hauteur de 343 pieds. Au premier rebond, elle atteint une hauteur égale à $\frac{2}{7}$ de la hauteur initiale. Quelle est la hauteur du premier rebond?

TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

1. Un boulanger vend $\frac{3}{8}$ de ses pains le matin et $\frac{1}{2}$ de ses pains le reste de la journée. À la fermeture, il lui reste 11 pains. Combien y avait-il de pains à l'ouverture du magasin?

TA STRATÉGIE

2. Jake veut passer un fil électrique au travers du mur extérieur de sa maison afin d'installer une lampe. Afin de traverser l'épaisseur du mur, Jake devra percer un panneau de gypse de $\frac{3}{8}$ pouce, un madrier de $5\frac{1}{2}$ pouces, un panneau de contreplaqué de $\frac{7}{16}$ pouce et finalement $3\frac{1}{4}$ pouces de brique. Quelle longueur de mèche devra-t-il utiliser pour percer son trou dans le mur afin d'installer la lampe?

TA STRATÉGIE

3. Antoine doit couper des planches de bois de 8 pi pour faire des embouts de $\frac{2}{3}$ pi pour un mur de maison. Il possède 5 planches. Combien d’embouts peut-il couper en tout?

TA STRATÉGIE