

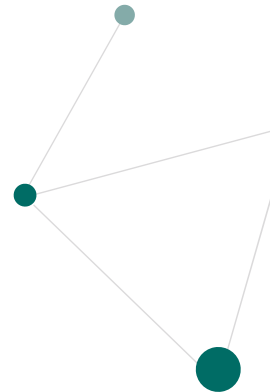
9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Minileçon

NOMBRES
Déterminer la limite de relations



RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève découvre le principe des limites et de l'infini. L'élève résout des problèmes de limites sur différents types de relations. De plus, l'élève applique ces connaissances à l'aide du concept de la demi-vie.

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- › montre sa compréhension du concept de limite;
- › reconnaît la relation entre la tendance de la limite et l'emplacement de la variable dans la fraction;
- › montre sa compréhension de l'infini;
- › détermine la limite lorsqu'une variable tend vers zéro ou vers infini;
- › établit des liens entre les concepts de limite et de demi-vie.

MATÉRIEL

- › calculatrices;
 - › crayons rouges;
 - › feuilles blanches;
 - › règles.
-

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débiter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Nombres	La limite et l'infini
Algèbre	Les graphiques d'équations linéaires et non linéaires
Littératie financière	L'appréciation et la dépréciation, et les liens graphiques (croissance et décroissance exponentielles)

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- La limite de $a = \frac{1}{kx}$ (où k est une constante) est égale à 0 lorsque x tend vers l'infini.
- La limite de $a = kx$ (où k est une constante) est l'infini lorsque x tend vers l'infini.
- La limite de $a = kx$ (où k est une constante) est égale à 0 lorsque x tend vers 0.
- Un élément radioactif ayant une demi-vie ne va jamais complètement se désintégrer. Il en restera toujours une petite trace minuscule. La limite de $a = \frac{1}{kx}$ (où k est une constante) est égale à 0 lorsque x est positif et tend vers 0.

Déroulement pour l'exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **La limite et l'infini** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves les calculs permettant de déterminer la limite d'une équation, ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l'activité. Il importe de ne pas présenter la limite lorsque le numérateur est une variable. Les élèves doivent le découvrir dans cette minileçon.
- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
 - Qu'est-ce qu'une limite?
 - As-tu des exemples qui impliquent l'utilisation de limites?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit L'effet sur la limite lorsque le numérateur est une variable ou lorsque le dénominateur est une variable.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour déterminer la limite des différentes relations.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 1

Une table de valeurs est utilisée pour cet exemple. Ceci permet à l'élève de trouver une certaine régularité afin de créer une suite qui permettra de comparer les limites lorsque x tend vers 0 ou l'infini pour chacune des relations.

Notes pédagogiques

Cet exemple permet à l'élève de mettre en application le processus de mathématiques de représentation.

EXEMPLE 1

L'effet sur la limite lorsque le numérateur est une variable ou lorsque le dénominateur est une variable

Examine les relations $a = \frac{4}{5x}$ et $b = \frac{5x}{4}$.

- Détermine et compare les limites de a et de b lorsque x est positif et tend vers l'infini.
- Détermine et compare les limites de a et de b lorsque x tend vers zéro.

Corrigé

Notes pédagogiques

- L'élève parvient à déterminer la limite de a et de b lorsque x est positif et tend vers l'infini. L'enseignante ou l'enseignant utilise une table de valeurs afin de comparer les limites pour chacune des relations.
- L'élève pourrait avoir de la difficulté à représenter les résultats obtenus dans un format efficace. Afin d'amener l'élève à représenter efficacement ses résultats, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution du problème. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion :
 - Quelles sont les caractéristiques d'une suite?
 - Pourquoi une suite nous permet-elle de bien représenter les résultats de cet exercice?

? Quelle serait la meilleure représentation des résultats obtenus dans tes calculs?

- a) Afin d'étudier la régularité de la suite de nombres a et b lorsque x tend vers l'infini, je vais augmenter les valeurs de x par des facteurs de 10 et les placer dans la table de valeurs.

x	$a = \frac{4}{5x}$	$b = \frac{5x}{4}$
0,001	800	0,001 25
0,01	80	0,012 5
0,1	8	0,125
1	0,8	1,25
10	0,08	12,5
100	0,008	125
1 000	0,000 8	1 250

Suite a : 800; 80; 8; 0,8; 0,08; 0,008; 0,000 8; ...

Suite b : 0,001 25; 0,012 5; 0,125; 1,25; 12,5; 125; 1 250; ...

Selon mes résultats, je détermine que la limite de a est zéro et celle de b est infinie lorsque x tend vers l'infini.

? Quelle est la représentation la plus efficace pour résoudre ce problème?

- b) Afin d'étudier la régularité de la suite de nombres a et b lorsque x est positif et tend vers 0, je vais diminuer les valeurs de x par des facteurs de 10 et les placer dans la table de valeurs.

x	$a = \frac{4}{5x}$	$b = \frac{5x}{4}$
1000	0,000 8	1 250
100	0,008	125



x	$a = \frac{4}{5x}$	$b = \frac{5x}{4}$
10	0,08	12,5
1	0,8	1,25
0,1	8	0,125
0,01	80	0,012 5
0,001	800	0,001 25

Suite a : 0,000 8; 0,008; 0,08; 0,8; 8; 80; 800; ...

Suite b : 1 250; 125; 12,5; 1,25; 0,125; 0,012 5; 0,001 25; ...

Selon mes résultats, je détermine que la limite de a est infinie et celle de b est zéro lorsque x est positif et tend vers zéro.

Retour sur l'exemple 1

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer les limites de a et de b . Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre la limite et l'emplacement de la variable sur la fraction et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Quelle est la différence dans la limite d'une expression lorsque la variable est au numérateur ou au dénominateur?
 - Lorsque la limite d'une expression tend vers 0, est-ce que cette limite atteint 0?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit l'application de la limite dans un contexte de demi-vie d'un élément périodique.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour calculer la demi-vie d'un échantillon de brome 77.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Demi-vie. Temps nécessaire pour qu'une substance perde la moitié de sa composition.

La demi-vie est une caractéristique utilisée relativement aux dates d'expiration des médicaments, des piles et de la datation.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

Une table de valeurs est utilisée dans cet exemple. Celle-ci permet à l'élève de trouver une certaine régularité afin de déterminer la quantité de brome 77 restante après chacun des cycles.

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève de mettre en application le processus de mathématiques d'établissement de liens.
- L'élève peut faire des liens avec les concepts de la chimie afin d'établir des liens entre la limite et son utilisation dans le monde scientifique. L'élève est invité à calculer la quantité de substance résiduelle après x nombres de cycles de demi-vie.

EXEMPLE 2

L'application de la limite dans le contexte de demi-vie d'un élément périodique

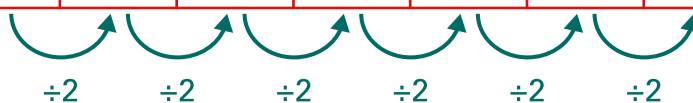
L'isotope du brome 77 a une demi-vie d'environ 57 heures. Un échantillon de cet élément se retrouve dans un laboratoire de sciences.

- Crée une table de valeurs qui représente la demi-vie (la dégradation par une demie) de cet isotope à différents moments pour un échantillon de 500 mg.
- Combien de temps faudra-t-il pour décomposer entièrement l'isotope de brome 77 jusqu'à ce qu'il n'en reste plus (0 mg)?

Corrigé

- a) Je crée une table de valeurs qui représente la demi-vie de 500 mg de l'isotope de brome 77.

Nombre de cycles de 57 heures, c	0	1	2	3	4	5	6
Quantité de Brome (mg), Q	500	250	125	62,50	31,25	15,625	7,812 5



? As-tu déjà utilisé une stratégie semblable afin de déterminer la valeur subséquente de la table de valeurs?

Puisque la quantité de brome 77 diminue de moitié à chacun des cycles. Après 6 cycles, il ne restera que 7,812 5 mg de brome 77 de l'échantillon initial de 500 mg.

Notes pédagogiques

- Pour l'élève ayant une plus grande difficulté à déterminer une limite, l'enseignante ou l'enseignant pourrait encourager l'élève à trouver la quantité de brome pour des nombres de cycles plus grands que 6, jusqu'à ce que les valeurs soient plus petites que 1 mg.
- L'enseignante ou l'enseignant pourra organiser une période de questionnement et de discussion afin d'expliquer l'importance des limites en sciences. L'enseignante ou l'enseignant pourrait animer une discussion sur les calottes glaciaires, les piles, les usines nucléaires, etc.

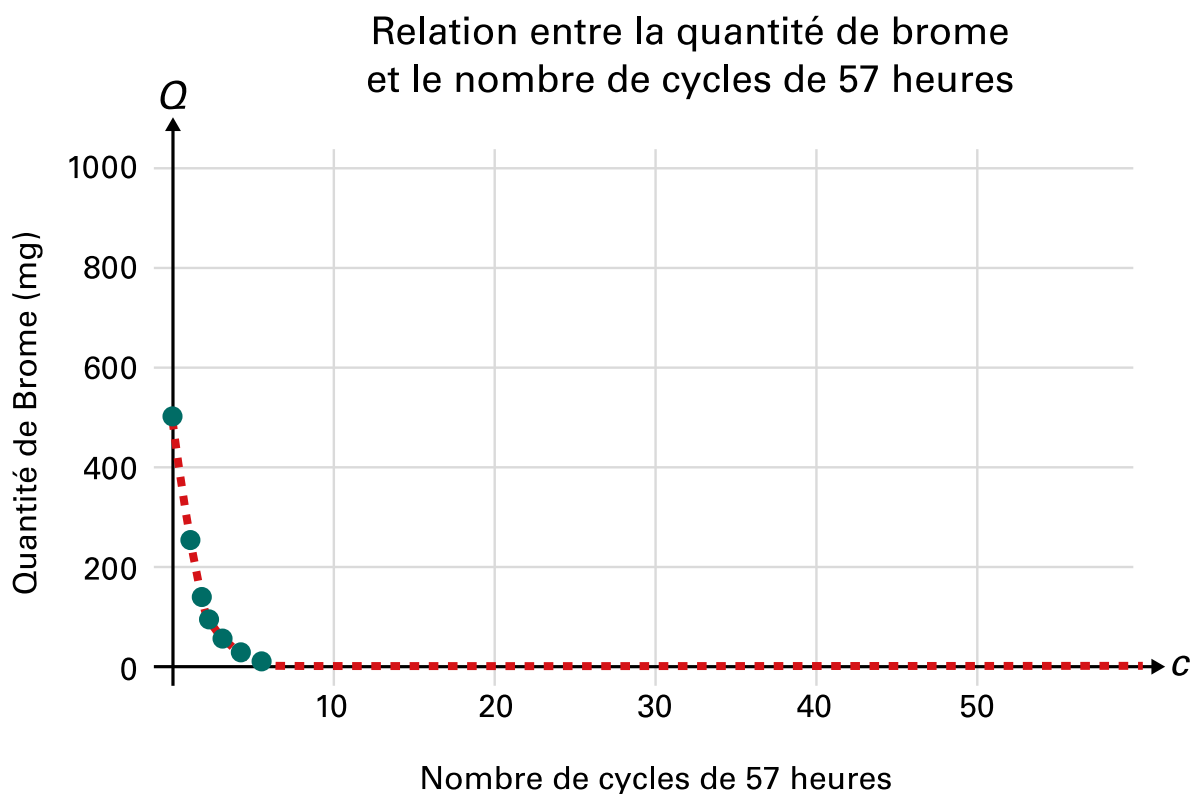
b) Je réutilise la table de valeurs afin de déterminer la limite vers l'infini.

Le nombre de cycles de 57 heures tend vers infini

Nombre de cycles de 57 heures, c	0	1	2	3	4	5	6
Quantité de Brome (mg), Q	500	250	125	62,50	31,25	15,625	7,812 5

$\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$

J'ajoute les points sur un graphique et je continue la courbe pour analyser la tendance.



Je remarque que lorsque le nombre de cycles de demi-vie tend vers l'infini, la limite de la quantité de l'isotope de brome 77 tend vers zéro.

? Pour quels emplois ou métiers ces connaissances seraient-elles utiles?

Retour sur l'exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer la quantité de substance après chacun des cycles. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre le concept de demi-vie et une limite qui tend vers zéro lorsque le nombre de cycles tend vers l'infini.
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

1. À l'aide d'un graphique, détermine le type de relation représentée par la demi-vie du brome 77.
2. Élabore un problème à résoudre à partir des résultats provenant de l'exemple 1.

Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves d'effectuer quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou autres preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement et des élèves pour qu'elles et ils s'améliorent.

Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Corrigé

1. Soit $a = \frac{7}{5x}$. Détermine la limite de la valeur a lorsque x tend vers l'infini.

Processus mathématique préconisé : communication

L'élève communique le résultat de ses réponses en y insérant toutes les étapes afin de clarifier ses idées.

Afin d'étudier la régularité de la suite de nombres a lorsque x tend vers l'infini, je vais augmenter les valeurs de x par des facteurs de 10.

$$\text{Si } x = 0,001, \text{ alors } a = \frac{7}{0,005} = 1\,400$$

$$\text{Si } x = 0,01, \text{ alors } a = \frac{7}{0,05} = 140$$

$$\text{Si } x = 0,1, \text{ alors } a = \frac{7}{0,5} = 14$$

$$\text{Si } x = 1, \text{ alors } a = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\text{Si } x = 10, \text{ alors } a = \frac{7}{50} = 0,14$$

$$\text{Si } x = 100, \text{ alors } a = \frac{7}{500} = 0,014$$

$$\text{Si } x = 1\,000, \text{ alors } a = \frac{7}{5\,000} = 0,001\,4$$

$$\text{Si } x = 10\,000, \text{ alors } a = \frac{7}{50\,000} = 0,000\,14$$

? As-tu utilisé un moyen efficace pour organiser ta réponse afin de t'assurer de la compréhension d'un autre élève qui voudrait lire ton travail?

Suite : 1 400; 140; 14; 1,4; 0,14; 0,014; 0,001 4; 0,000 14; ...

La limite de la valeur de a dans l'équation est zéro lorsque x tend vers l'infini.

? Utilises-tu les termes justes lorsque tu réponds à la question?

La limite de la valeur de a dans l'équation $a = \frac{7}{5x}$ est zéro lorsque x tend vers l'infini.

2. Soit $a = \frac{7}{5x}$. Détermine la limite de la valeur lorsque x est positif et tend vers zéro.

Processus mathématique préconisé : communication

L'élève communique le résultat de ses réponses en y insérant toutes les étapes afin de clarifier ses idées.

Afin d'étudier la régularité de la suite de nombres a lorsque x est positif et tend vers zéro, je vais diminuer les valeurs de x par des facteurs de 10.

Si $x = 10\ 000$, alors $a = \frac{7}{50\ 000} = 0,000\ 14$

Si $x = 1\ 000$, alors $a = \frac{7}{5\ 000} = 0,001\ 4$

Si $x = 100$, alors $a = \frac{7}{500} = 0,014$

Si $x = 10$, alors $a = \frac{7}{50} = 0,14$

Si $x = 1$, alors $a = \frac{7}{5} = 1,4$

Si $x = 0.1$, alors $a = \frac{7}{0,5} = 14$

Si $x = 0.01$, alors $a = \frac{7}{0,05} = 140$

Si $x = 0.001$, alors $a = \frac{7}{0,005} = 1\ 400$

? As-tu utilisé un moyen efficace pour organiser ta réponse afin de t'assurer de la compréhension d'un autre élève qui voudrait lire ton travail?

Suite : 0,000 14; 0,001 4; 0,014; 0,14; 1,4; 14; 140; 1 400; ...

La limite de la valeur de a est infinie lorsque x est positif et tend vers 0.

? **Utilises-tu les termes justes lorsque tu réponds à la question?**

La limite de la valeur de a dans l'équation $a = \frac{7}{5x}$ est l'infini lorsque x est positif et tend vers zéro.

3. La table de valeurs ci-dessous représente la demi-vie (la dégradation par une demie) d'un isotope d'oxygène 15 à différents moments (environ toutes les 120 secondes) dans un échantillon de 150 mg en laboratoire. En analysant cette régularité, combien de temps faudra-t-il pour que l'isotope d'oxygène 15 se décompose entièrement jusqu'à ce qu'il n'en reste presque plus (0 mg)?

Nombre de cycles de 120 secondes, c	0	1	2	3	4	5	6
Quantité d'Oxygène (mg), Q	150	75	37,5	18,75	9,375	4,687 5	2,343 75

$\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$

Processus mathématique préconisé : établissement de liens

L'élève établit des liens entre le concept mathématique des limites, le processus et l'utilisation des limites dans le domaine des sciences. L'élève peut commencer à comprendre la pertinence des mathématiques dans des domaines en dehors de la salle de classe de mathématiques. L'enseignante ou l'enseignant peut poser les questions suivantes afin d'aider l'élève à résoudre le problème :

- Qui pourrait avoir besoin de résoudre un tel problème?
- Comment tes connaissances sur ces concepts mathématiques peuvent-elles t'aider à résoudre le problème?
- Comment ton travail se compare-t-il avec celui des autres? Quelles sont les ressemblances? Les différences?

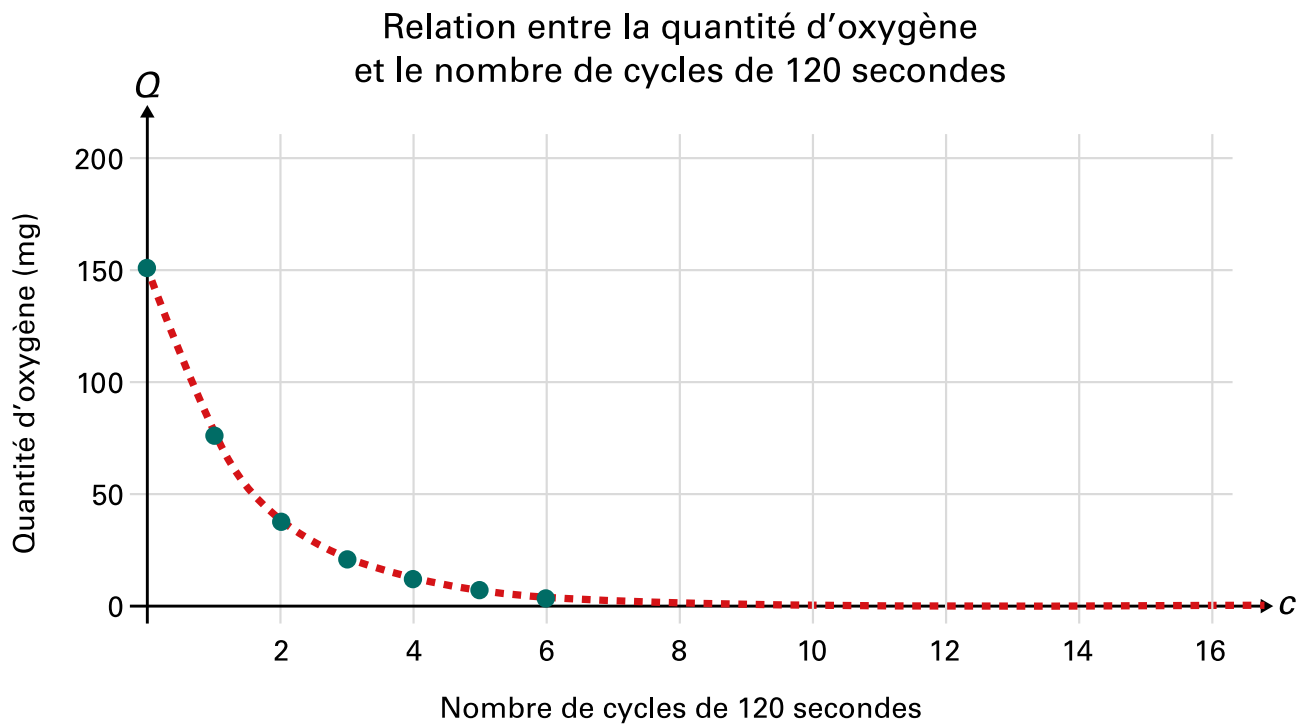
Je détermine que la quantité d'oxygène diminue de moitié à chacun des cycles de demi-vie.

Le nombre de cycles de 120 secondes tend vers infini

Nombre de cycles de 120 secondes, c	0	1	2	3	4	5	6
Quantité d'Oxygène (mg), Q	150	75	37,5	18,75	9,375	4,687 5	2,343 75

$\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$

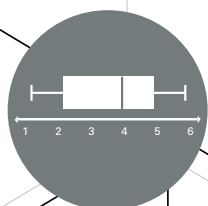
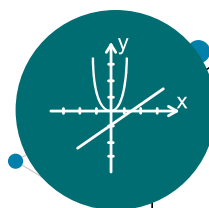
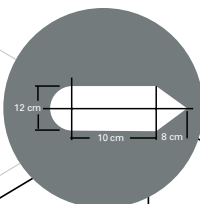
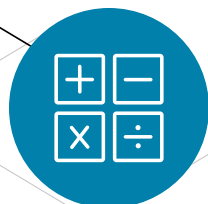
J'ajoute les points sur un graphique et je continue la courbe pour analyser la tendance afin de trouver le moment où la quantité d'oxygène est presque 0 mg.



Selon la calculatrice graphique, ça va prendre presque 14 cycles pour atteindre la valeur de 0,01 mg d'oxygène.

Je remarque que lorsque le nombre de cycles de demi-vie tend vers l'infini, la limite de la quantité de l'isotope d'oxygène 15 tend vers zéro.

VERSION DE L'ÉLÈVE



$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$

9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

NOMBRES

Déterminer la limite de relations

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

L'effet sur la limite lorsque le numérateur est une variable ou lorsque le dénominateur est une variable

Examine les relations $a = \frac{4}{5x}$ et $b = \frac{5x}{4}$.

- a) Détermine et compare les limites de a et de b lorsque x est positif et tend vers l'infini.
- b) Détermine et compare les limites de a et de b lorsque x tend vers zéro.



TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

L'application de la limite dans le contexte de demi-vie d'un élément périodique

L'isotope du brome 77 a une demi-vie d'environ 57 heures. Un échantillon de cet élément se retrouve dans un laboratoire de sciences.

- Crée une table de valeurs qui représente la demi-vie (la dégradation par une demie) de cet isotope à différents moments pour un échantillon de 500 mg.
- Combien de temps faudra-t-il pour décomposer entièrement l'isotope de brome 77 jusqu'à ce qu'il n'en reste plus (0 mg)?



TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

1. Soit $a = \frac{7}{5x}$. Détermine la limite de la valeur a lorsque x tend vers l'infini.



TA STRATÉGIE

2. Soit $a = \frac{7}{5x}$. Détermine la limite de la valeur a lorsque x est positif et tend vers zéro.



TA STRATÉGIE

3. La table de valeurs ci-dessous représente la demi-vie (la dégradation par une demie) d'un isotope d'oxygène 15 à différents moments (environ toutes les 120 secondes) dans un échantillon de 150 mg en laboratoire. En analysant cette régularité, combien de temps faudra-t-il pour que l'isotope d'oxygène 15 se décompose entièrement jusqu'à ce qu'il n'en reste presque plus (0 mg)?

Nombre de cycles de 120 secondes, c	0	1	2	3	4	5	6
Quantité d'Oxygène (mg), Q	150	75	37,5	18,75	9,375	4,687 5	2,343 75



TA STRATÉGIE