

9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Minileçon

NOMBRES

Déterminer la densité pour différents
sous-ensembles de nombres

RÉSUMÉ

Dans cette minileçon, l'élève peut comparer la densité de différents sous-ensembles dans des ensembles de nombres plus grands. L'élève utilise le rapport de cardinalité afin de déterminer la densité

PISTES D'OBSERVATION

L'élève :

- › reconnaît la relation entre la densité et le rapport de cardinalité;
- › calcule le rapport de cardinalité;
- › compare la densité de différents sous-ensembles;
- › reconnaît les sous-ensembles dont un nombre peut faire partie;
- › représente des ensembles et des sous-ensembles de nombres.

MATÉRIEL

- › calculatrice;
- › logiciel de géométrie, facultatif;
- › crayons rouges;
- › feuilles blanches;
- › règles;
- › papier quadrillé en cm^2 .

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Les concepts mathématiques nommés ci-dessous sont nécessaires pour bien accomplir cette minileçon. Il est important de s'assurer de leur compréhension avant de débiter. Une explication de ceux-ci se trouve dans la section **Concepts mathématiques**.

Domaine d'étude	Concept mathématique
Nombres	Les sous-ensembles du système de nombres
Nombres	La densité et l'infini

Partie 1 – Exploration guidée

Éléments à faire ressortir

- La densité est calculée à l'aide du rapport de cardinalité.
- Le rapport de cardinalité est déterminé grâce au rapport suivant :

$$\text{Rapport de cardinalité} = \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}}$$

- La densité est représentée en fraction.
- La densité des nombres réels est plus grande que la densité des nombres rationnels.
- La densité des nombres rationnels est plus grande que la densité des nombres entiers.
- La densité des nombres entiers est plus grande que la densité des nombres naturels.

Déroulement pour l'exemple 1

- Consulter, au besoin, la fiche **La densité et l'infini** de la section **Concepts mathématiques** afin de revoir avec les élèves les calculs qui permettent de déterminer la densité ainsi que la terminologie liée à ces concepts en vue de les aider à réaliser l'activité.
- Animer une discussion afin d'activer les connaissances antérieures ou connexes et établir des liens avec des expériences personnelles en posant des questions telles que :
 - Qu'est-ce que l'infini?
 - Dans quel contexte as-tu déjà entendu parler de la densité?
- Présenter aux élèves l'exemple 1, soit La classification par graphique de la densité d'une liste de nombres à l'aide des différents ensembles de nombres.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre une stratégie qui permet de différencier la densité de différents nombres.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 1 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 1

L'élève sera encouragé à faire un schéma ou un diagramme à la suite de l'établissement d'une liste de nombres dans un tableau afin de catégoriser les différents ensembles de nombres et déterminer la densité de chacun de ces ensembles.

EXEMPLE 1

La classification par graphique de la densité d'une liste de nombres à l'aide des différents ensembles de nombres

Détermine à l'aide d'un tableau les sous-ensembles dont fait partie chacun des nombres dans la liste suivante. Représente-les à l'aide d'un diagramme.

Liste des nombres : π ; $\frac{1}{3}$; 2,3 ; $\sqrt{121}$; - 32,5 ; $-1\frac{3}{7}$; $-8^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{2}$; 25 ; 18,765 ; - 7

Les ensembles de nombres : ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$, ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$.

Corrigé

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève d'appliquer le processus mathématique de représentation.
- L'élève parvient à résoudre le problème et représenter ces résultats à l'aide d'un tableau ainsi que d'un diagramme de son choix. L'élève peut avoir une certaine difficulté à choisir le diagramme idéal pour représenter efficacement les résultats du tableau. Dans cet exemple, le diagramme de Venn est utilisé pour trouver la solution et communiquer les résultats. Ces représentations permettront à l'élève de visualiser la densité des différents ensembles de nombres.
- Afin d'amener l'élève à représenter efficacement ses résultats, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution de problèmes. Voici quelques exemples de questions ou de pistes de réflexion.
 - Comment est-ce qu'on peut calculer la densité de chaque ensemble de nombres?
 - Quelles autres informations sont nécessaires afin de faire les calculs?

Déterminer les nombres qui appartiennent à chacun des ensembles de nombres

Je place un X sous la case lorsque le nombre appartient à cet ensemble de nombres.

	π	$\frac{1}{3}$	2,3	$\sqrt{121}$	-32,5	$-1\frac{3}{7}$	$-8^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{2}$	25	18,765	-7
Nombres réels, $\mathbb{R}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Nombres rationnels, $\mathbb{Q}$		X	X	X	X	X	X		X	X	X
Nombres entiers, $\mathbb{Z}$				X			X		X		X
Nombres naturels, $\mathbb{N}$				X					X		

Selon le tableau, je détermine que l'ensemble des nombres réels contient tous les nombres dans la liste.

Selon le tableau, je détermine que l'ensemble des nombres rationnels contient tous les nombres décimaux, fractionnaires et entiers positifs et négatifs.

Selon le tableau, je détermine que l'ensemble des nombres entiers contient tous les nombres entiers positifs et négatifs.

Selon le tableau, je détermine que l'ensemble des nombres naturels contient tous les nombres entiers positifs.

Je calcule la densité des différents ensembles à partir du tableau.

Quantité de nombres dans l'ensemble : 11

Densité de nombres réels : $\frac{11}{11} = 1$

Densité de nombres rationnels : $\frac{10}{11}$

Densité de nombres entiers : $\frac{4}{11}$

Densité de nombres naturels : $\frac{2}{11}$

À l'aide de mes calculs, je peux conclure que :



Retour sur l'exemple 1

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour déterminer la densité de la liste des nombres. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre les ensembles des nombres et leur densité et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Classifie en ordre décroissant les différents ensembles de nombres.
 - Détermine la densité de chacun des ensembles de nombres en fonction de l'ensemble le plus dense.
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

Déroulement pour l'exemple 2

- Présenter aux élèves l'exemple 2, soit Le calcul du rapport de cardinalité afin de déterminer la densité des différents diviseurs.
- Allouer aux élèves le temps requis pour effectuer le travail. À cette étape-ci, l'élève découvre diverses stratégies pour déterminer le lien entre la densité et la divisibilité des nombres.
- Consulter les notes pédagogiques fournies dans le corrigé de l'exemple 2 pour obtenir des stratégies d'accompagnement au niveau des processus mathématiques et des éléments de difficultés que les élèves risquent de rencontrer.
- Choisir différentes stratégies de regroupements flexibles afin de répondre aux différents besoins des élèves.

Stratégie de résolution de problèmes pour l'exemple 2

L'élève sera encouragé à faire un schéma ou un diagramme à la suite de l'établissement d'une liste de nombres afin de catégoriser les différents sous-ensembles des nombres et de déterminer la densité de chacun des sous-ensembles.

EXEMPLE 2

Le calcul du rapport de cardinalité afin de déterminer la densité des différents diviseurs

Pour le sous-ensemble des nombres naturels compris entre 1 et 60 inclusivement :

- détermine la densité (rapport de cardinalité) pour différents sous-ensembles de nombres (par exemple, les nombres divisibles par 2);
- classifie les sous-ensembles de a) en ordre croissant de densité.

Corrigé

Notes pédagogiques

- Cet exemple permet à l'élève d'appliquer le processus mathématique d'établissement des liens.
- L'élève est amené à réfléchir sur ses connaissances antérieures en faisant référence aux différents sous-ensembles de nombres. L'élève pourra ensuite déterminer la densité de ces différents sous-ensembles à l'aide du rapport de cardinalité.
- L'élève devra réfléchir sur les différents ensembles qui sont contenus dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60 inclusivement. L'enseignante ou l'enseignant pourra guider l'élève afin de faire ressortir les sous-ensembles suivants : nombres divisibles par 2, par 3, par 4 et par 5.
- Afin de déterminer les densités pour chacun des sous-ensembles, il sera important pour l'élève de calculer le rapport de cardinalité. L'enseignante ou l'enseignant pourrait conduire l'élève à faire un lien entre les concepts de rapport et de densité.
- Afin d'amener l'élève à établir des liens entre les différents concepts mathématiques, il est important de fournir des pistes de réflexion ou un questionnement adéquat tout au long de la résolution de problèmes. Voici quelques exemples de questions ou de piste de réflexion.
 - Comment peux-tu choisir tes sous-ensembles afin de pouvoir faire une analyse de densité?
 - Comment est-ce que la comparaison des nombres divisibles nous permettra-t-elle d'analyser la densité des sous-ensembles?
- L'élève peut avoir de la difficulté à trouver les nombres divisibles par chacun des diviseurs. L'enseignante ou l'enseignant peut faire référence au concept de multiples que l'élève a vu en 7^e et en 8^e année.

? *Comment est-ce que tes connaissances des rapports peuvent t'aider à résoudre ce problème?*

a) Je détermine la quantité de nombres naturels entre 1 et 60.

Il y a 60 nombres naturels entre 1 et 60.

i. Je calcule la densité des nombres divisibles par 2.

- Je trouve les nombres divisibles par 2 compris entre 1 et 60 inclusivement.

Il y a 30 nombres qui sont divisibles par 2, soit :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60.

- Je trouve la densité des nombres divisibles par 2 dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60.

$$\begin{aligned}\text{Rapport de cardinalité} &= \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}} \\ &= \frac{30}{60} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- La densité des nombres divisibles par 2 dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60 est égale à $\frac{1}{2}$.

ii. Je calcule la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 3.

- Je trouve les nombres divisibles par 3 compris entre 1 et 60 inclusivement.

Il y a 20 nombres qui sont divisibles par 3, soit :

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.

- Je calcule la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 3 dans l'ensemble des nombres entiers entre 1 et 60.

$$\begin{aligned}\text{Rapport de cardinalité} &= \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}} \\ &= \frac{20}{60} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- La densité de l'ensemble des nombres divisibles par 3 dans l'ensemble des nombres entiers entre 1 et 60 est égale à $\frac{1}{3}$.

iii. Je calcule la densité des nombres divisibles par 4.

- Je trouve les nombres divisibles par 4 compris entre 1 et 60 inclusivement.

Il y a 15 nombres qui sont divisibles par 4, soit :

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60.

Je calcule la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 4 dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60.

$$\begin{aligned}\text{Rapport de cardinalité} &= \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}} \\ &= \frac{15}{60} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- La densité de l'ensemble des nombres divisibles par 4 dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60 est égale à $\frac{1}{4}$.

iv. Je calcule la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 5.

- Je trouve les nombres divisibles par 5 compris entre 1 et 60 inclusivement.

Il y a 12 nombres qui sont divisibles par 5, soit :

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60.

- Je calcule la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 5 dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60.

$$\begin{aligned}\text{Rapport de cardinalité} &= \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}} \\ &= \frac{12}{60} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

La densité de l'ensemble des nombres divisibles par 5 dans l'ensemble des nombres naturels entre 1 et 60 est égale à $\frac{1}{5}$.

b)

Densité d'ensembles de nombres

Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 4	Divisible par 5
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$



Le plus dense

Le moins dense

Selon mes résultats, l'ensemble des nombres divisibles par 2 est le plus dense, suivi de l'ensemble des nombres divisibles par 3, de l'ensemble des nombres divisibles par 4 et finalement de l'ensemble des nombres divisibles par 5, ce dernier étant le moins dense.

Retour sur l'exemple 2

- Demander à quelques élèves de faire part au groupe-classe de leur solution et d'expliquer les stratégies utilisées pour mettre en ordre croissant de densité les différents diviseurs. Inviter les autres élèves à poser des questions afin de vérifier leur compréhension.
- Pendant les discussions, s'assurer que les élèves établissent des liens entre la valeur du dénominateur et la densité et que les éléments de la section **Éléments à faire ressortir** sont abordés. Si nécessaire, poser des questions telles que :
 - Que représente le rapport de cardinalité?
- Encourager les élèves à ajouter des éléments à leur travail ou à consigner les éléments essentiels dans leur cahier de notes.

ALLER PLUS LOIN

1. À l'aide d'un logiciel de programmation, trouve la densité des ensembles de nombres divisibles par 2, 3, 4 et 5 de 0 à 100.

Note : Afin de vérifier si le reste d'une division par un nombre est 0 (et donc divisible par ce nombre) avec Python, il faut utiliser l'opérateur modulo « % ». En voici un exemple :

```
a = 16
If a % 2 == 0 :
print(" Ce nombre est divisible par 2.")
```

Partie 2 – Apprentissage autonome

Déroulement

- Au besoin, demander aux élèves de faire quelques exercices de la section **À ton tour!**. Ces exercices peuvent servir de billet de sortie ou autres preuves d'apprentissage.
- Recueillir les preuves d'apprentissage des élèves et les interpréter selon l'atteinte des critères d'évaluation et cibler les prochaines étapes de l'enseignement et des élèves en vue de les aider à s'améliorer.

Note : Consulter le corrigé de la partie 2, s'il y a lieu.

Corrigé

1. Classifie les nombres de la liste suivante dans les ensembles de nombres appropriés dans le tableau suivant. (Il se peut que chaque nombre appartienne à plus d'un ensemble).

Liste des nombres : $\left\{ \pi; 5,7; \frac{5}{7}; \sqrt{64}; 31; 3\frac{2}{3}; -\sqrt[3]{64}; \sqrt{2}; -32; 16,251 \right\}$

Processus mathématique préconisé : représentation

L'élève utilise la représentation du tableau afin de communiquer ses résultats et d'identifier l'ensemble des nombres auquel chacun des nombres appartient.

L'enseignante ou l'enseignant pourrait poser les questions suivantes afin d'aider l'élève à répondre à la question :

- Quelle est la représentation la plus efficace qui permettrait de visualiser les résultats?
- Peux-tu représenter la solution d'une autre façon?

Je classifie les nombres selon leur ensemble.

Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$	Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$
Les nombres réels représentent tous les nombres.	Les nombres rationnels représentent tous les nombres décimaux, fractionnaires et entiers positifs et négatifs.	Les nombres entiers représentent tous les nombres entiers positifs et négatifs.	Les nombres naturels représentent tous les entiers positifs.
$\pi; 5,7; \frac{5}{7}; \sqrt{64}; 31;$ $3\frac{2}{3}; -\sqrt[3]{64}; \sqrt{2}; -32;$ 16,251	$5,7; \frac{5}{7}; \sqrt{64}; 31; 3\frac{2}{3};$ $-\sqrt[3]{64}; -32; 16,251$	$\sqrt{64}; 31$ $-\sqrt[3]{64}; -32$	$\sqrt{64}; 31$

2. Pour l'ensemble des nombres naturels entre 21 et 40 inclusivement, détermine la densité (rapport de cardinalité) pour le sous-ensemble des nombres divisibles par 5.

Processus mathématique préconisé : établissement de liens

L'élève établit des liens entre le concept des règles de divisibilité, le concept du rapport et le concept de la densité. L'élève utilise le rapport de cardinalité afin de déterminer la densité des nombres divisibles par 5.

Je détermine la quantité de nombres naturels entre 21 et 40.

Il y a 20 nombres naturels entre 21 et 40.

Je calcule la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 5.

Je trouve les nombres divisibles par 5 compris entre 21 et 40 inclusivement.

Il y a 4 nombres qui sont divisibles par 5, soit 25, 30, 35, 40.

Je trouve la densité de l'ensemble des nombres divisibles par 5 dans l'ensemble des nombres entiers entre 21 et 40.

$$\begin{aligned}
 \text{Rapport de cardinalité} &= \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}} \\
 &= \frac{4}{20} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

La densité des ensembles des nombres divisibles par 5 dans l'ensemble des nombres entiers entre 21 et 40 est égale à $\frac{1}{5}$.

3. Pour l'ensemble des nombres entiers compris entre -20 et 20 inclusivement, détermine la densité (rapport de cardinalité) du sous-ensemble des nombres naturels.

Processus mathématique préconisé : établissement de liens

L'élève établit des liens entre le concept des ensembles de nombres, le concept de rapport et le concept de densité. L'élève utilise le rapport de cardinalité afin de déterminer la densité des nombres naturels.

Je détermine la quantité de nombres entiers entre -20 et 20.

Il y a 41 nombres entiers entre -20 et 20.

Je calcule la densité du sous-ensemble des nombres naturels.

Je trouve les nombres naturels compris entre -20 et 20 inclusivement.

Il y a 21 nombres qui sont des nombres naturels, soit

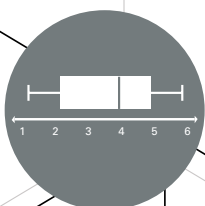
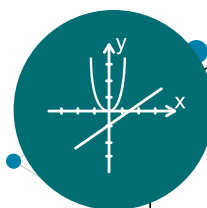
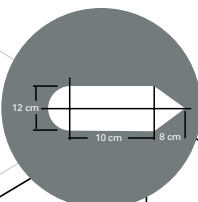
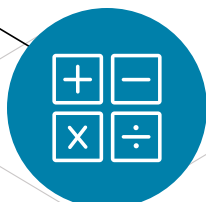
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

Je trouve la densité des nombres naturels dans l'ensemble des nombres entiers entre -20 et 20.

$$\begin{aligned}\text{Rapport de cardinalité} &= \frac{\text{Quantité de nombres dans le sous-ensemble}}{\text{Quantité de nombres dans l'ensemble}} \\ &= \frac{21}{41}\end{aligned}$$

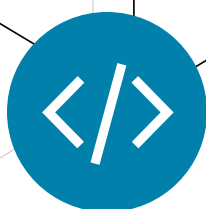
Selon mes calculs, la densité des nombres naturels dans l'ensemble des nombres entiers entre -20 et 20 est égale à $\frac{21}{41}$.

VERSION DE L'ÉLÈVE



$$\pi$$
$$1,4 \times 10^{-8}$$
$$-\frac{3}{4}$$

9^e
ANNÉE



PENSONS MATHÉMATIQUES!

Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques

Minileçon

NOMBRES

Déterminer la densité pour différents
sous-ensembles de nombres

Partie 1 – Exploration guidée

EXEMPLE 1

La classification par graphique de la densité d'une liste de nombres à l'aide des différents ensembles de nombres

Détermine à l'aide d'un tableau, les sous-ensembles dont fait partie chacun des nombres dans la liste suivante. Représente-les à l'aide d'un diagramme.

Liste des nombres : π ; $\frac{1}{3}$; 2,3; $\sqrt{121}$; -32,5; $-1\frac{3}{7}$; $-8^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{2}$; 25; 18,765; -7

Les ensembles de nombres : ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$, ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$.



TA STRATÉGIE

EXEMPLE 2

Le calcul du rapport de cardinalité afin de déterminer la densité des différents diviseurs

Pour le sous-ensemble des nombres naturels compris entre 1 et 60 inclusivement :

- détermine la densité (rapport de cardinalité) pour différents sous-ensembles de nombres (par exemple, les nombres divisibles par 2);
- classifie les sous-ensembles de a) en ordre croissant de densité;



TA STRATÉGIE

Partie 2 – Apprentissage autonome

À ton tour!

1. Classifie les nombres de la liste suivante dans les ensembles de nombres appropriés dans le tableau suivant. (Il se peut que chaque nombre appartienne à plus d'un ensemble).

Liste des nombres : $\left\{ \pi; 5,7; \frac{5}{7}; \sqrt{64}; 31; 3\frac{2}{3}; -\sqrt[3]{64}; \sqrt{2}; -32; 16,251 \right\}$

Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$	Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$



TA STRATÉGIE

2. Pour l'ensemble des nombres naturels entre 21 et 40 inclusivement, détermine la densité (rapport de cardinalité) pour le sous-ensemble des nombres divisibles par 5.



TA STRATÉGIE

3. Pour l'ensemble des nombres entiers compris entre -20 et 20 inclusivement, détermine la densité (rapport de cardinalité) du sous-ensemble des nombres naturels.



TA STRATÉGIE