

9^e
ANNÉE

PENSONS MATHÉMATIQUES!

**Une approche renouvelée pour l'enseignement
et l'apprentissage des mathématiques**

Concepts mathématiques

ALGÈBRE

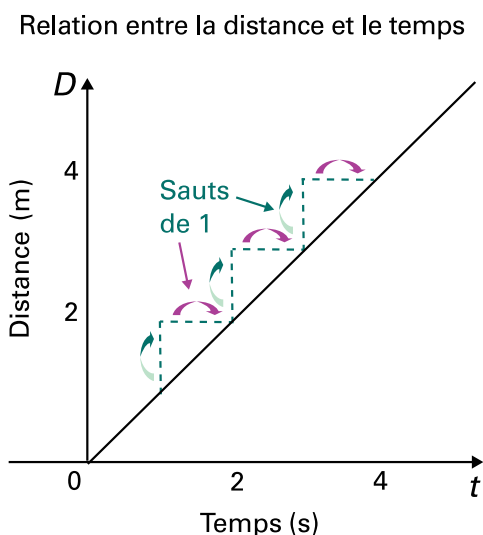
Les prédictions des représentations
des relations linéaires et non linéaires

Terminologie liée au concept mathématique

Relation linéaire. Lorsque deux variables varient à un taux constant, il existe une relation linéaire. Cette relation est positive lorsque les variables varient dans le même sens (par exemple, toutes les deux augmentent ou toutes les deux diminuent). La relation est négative lorsque les variables varient dans des sens opposés (par exemple, une variable augmente pendant que l'autre diminue).

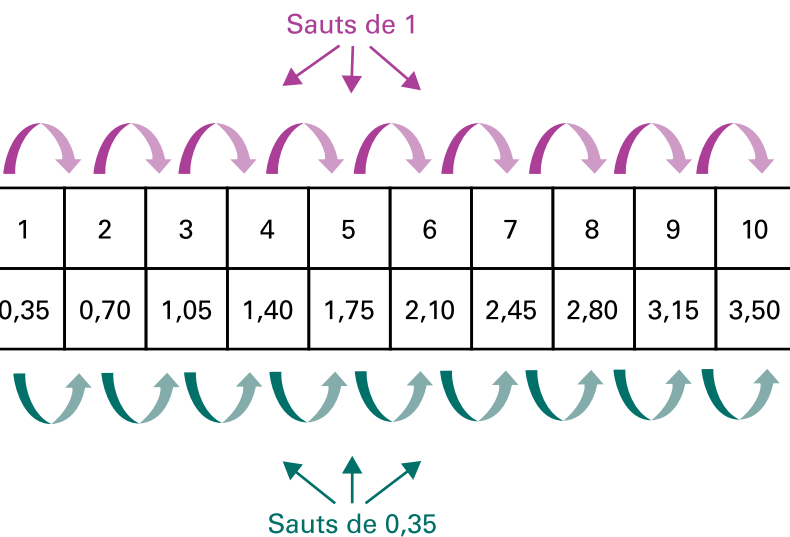
Exemples :

a) Un graphique d'une relation linéaire entre deux variables qui est positive.



- Les sauts représentent des changements identiques pour la distance (vertical) et le temps (horizontal), soit **un taux de variation** de $\frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}}$.
- Puisque les deux variables (distance et temps) changent de façon positive entre chaque point, la **relation est positive**.
- Puisque les deux variables (distance et temps) changent de façon constante (toujours 1 mètre pour chaque seconde), la **relation est linéaire**.

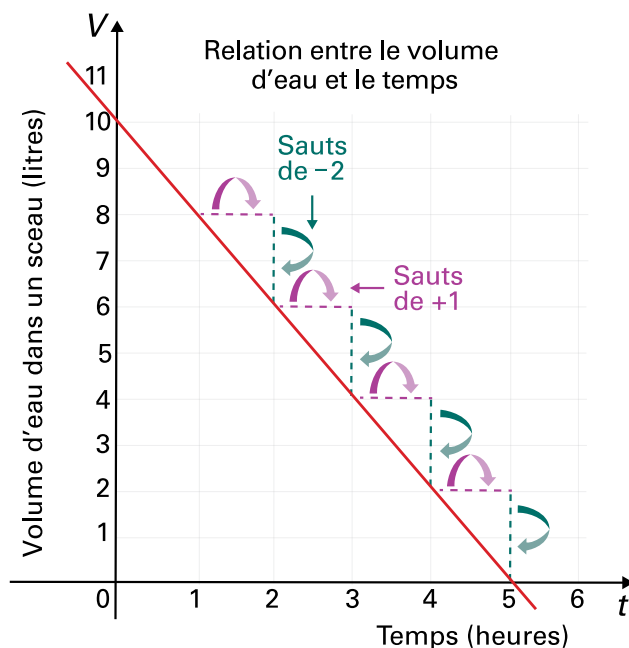
b) Une table de valeurs d'une relation linéaire entre deux variables qui est positive.



Temps de location d'une trottinette (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de location (\$)	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15	3,50

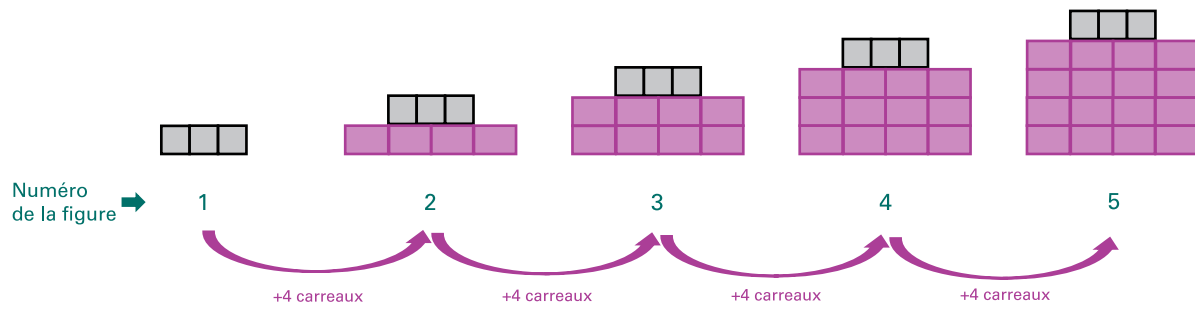
- Les sauts pour le **prix de location** représentent un changement de 0,35 \$.
- Les sauts pour le **temps de location** représentent un changement de 1 min.
- Le taux de variation est 0,35 \$ par minute ou $\frac{0,35 \$}{1 \text{ min}}$.
- Puisque les deux variables (prix et temps) changent de façon positive entre chaque point, la **relation est positive**.
- Puisque les deux variables (prix et temps) changent à un taux constant (toujours 0,35 \$ pour chaque minute), la **relation est linéaire**.

c) Un graphique d'une relation linéaire entre deux variables qui est négative.



- Les sauts pour le **volume d'eau dans la piscine** représentent un changement de **-2 litres**.
- Les sauts pour le **temps en heures** représentent un changement de **1 heure**.
- Le taux de variation est donc $\frac{-2 \text{ litres}}{1 \text{ heure}}$.
- Puisque le niveau change de façon négative tandis que le temps change de façon positive entre chaque point, **la relation est négative**.
- Puisque les deux variables (niveau et temps) changent à un taux constant (toujours -2 litres pour chaque heure), **la relation est linéaire**.

d) Une suite à motifs croissants.



- Les sauts du nombre de carreaux augmente de 4.
- Les sauts du numéro de la figure augmente de 1.
- Le nombre de carreaux augmente de 4 à chaque figure, alors le taux de variation est $\frac{4 \text{ carreaux}}{1 \text{ figure}}$.
- La relation est positive puisque le nombre de carreaux augmente à chaque figure.
- Puisque les deux variables (figure et carreaux) varient de façon constante, la relation est linéaire.

Relation non linéaire. Une relation entre deux variables qui n'est pas constante. En d'autres termes, la variation ne peut pas être représentée par une ligne droite, comme dans l'exemple ci-haut.

Exemple :

Une relation non linéaire peut être représentée par une courbe.

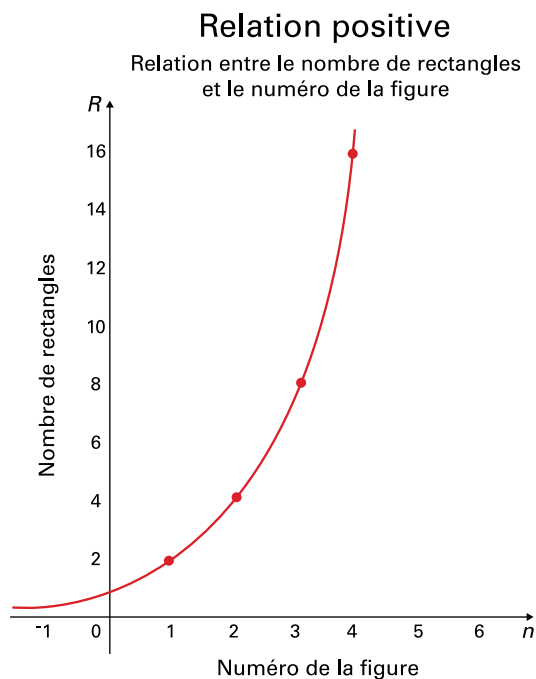


Table des valeurs

Numéro de la figure, n	Nombre de rectangles, R
1	2
2	4
3	8
4	16

	Sauts de 1			
Numéro de la figure, n	1	2	3	4
Nombre de rectangles, R	2	4	8	16
	Saut de 2 Saut de 4 Saut de 8			

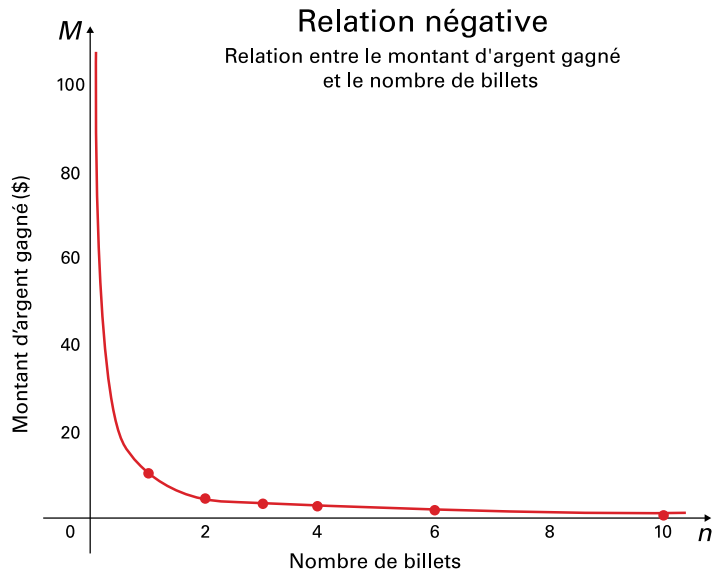


Table des valeurs

Nombre de billets, n	Montant d'argent, M
1	2
2	4
3	8
4	1,25
5	0,625
4	0,3125

Sauts de 1

Nombre de billets, n	1	2	3	4	5	6
Montant d'argent gagné, M (\$)	10	5	2,5	1,25	0,625	0,3125

Saut de -5

Saut de -2,50

Saut de -1,25

Saut de -0,625

Saut de -0,3125

Mise en contexte du concept mathématique

EXEMPLE 1

Une relation linéaire

Joaquim veut remplir la piscine d'enfant pour sa petite sœur Layla, avant que le beau temps arrive! La piscine a besoin de 2 500 litres. La piscine remplit à un taux de variation constant et au bout de 4 heures, il y a 1 000 litres d'eau. Combien de temps en heures s'écouleront avant que Layla entre dans sa piscine remplie?



STRATÉGIE 1

Solution à l'aide de rapports

- Puisque le taux de variation est constant (linéaire) et croissant (car la piscine se remplit), je trouve d'abord le taux de variation unitaire, soit :

$$\frac{1000 \text{ litres}}{4 \text{ heures}} = \frac{250 \text{ litres}}{1 \text{ heure}}$$

- Je calcule pour 2 500 litres :

$$\frac{2\,500 \text{ litres}}{250 \text{ litres/hr}} = 10 \text{ heures}$$

Je peux donc déterminer qu'il faudra 10 heures pour remplir la piscine.

De plus, il ne reste que $10 - 4 = 6$ heures à remplir la piscine puisque 4 heures se sont déjà écoulées selon l'énoncé.



STRATÉGIE 2

Solution à l'aide d'un tableau de rapports

$\div 4$		$\times 10$		
1 000 litres	250 litres	500 litres		2 500 litres
4 heures	1 heure	2 heures		10 heures
$\div 4$		$\times 10$		

Je peux donc déterminer qu'il faudra 10 heures pour remplir la piscine.

De plus, il ne reste que $10 - 4 = 6$ heures à remplir la piscine puisque 4 heures se sont déjà écoulées selon l'énoncé.



STRATÉGIE 3

Solution à l'aide d'une table de valeurs

Je sais qu'après 4 heures il y a 1 000 litres d'eau dans la piscine. Je peux donc remplir la table de valeurs comme suit :

J'augmente de 1 000 litres pour chaque 4 heures.

Je remarque que 1 000 litres pour chaque 4 heures veut dire également que j'augmente de 250 litres à chaque heure.

Temps, t (heures)	Volume, v (litres)
0	0
4	1 000
8	2 000
9	2 250
10	2 500

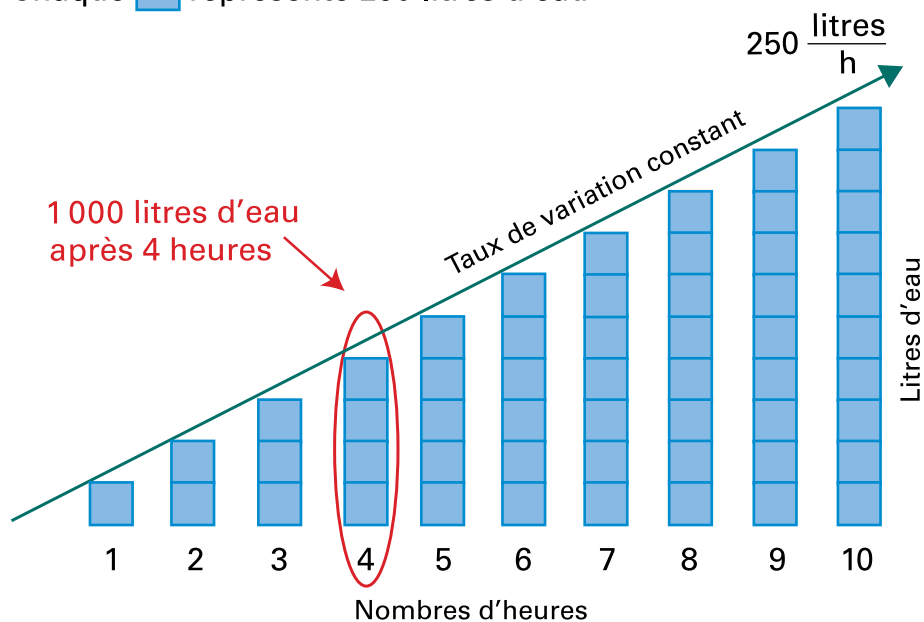
Je peux donc déterminer qu'il faudra 10 heures pour remplir la piscine. De plus, il ne reste que $10 - 4 = 6$ heures à remplir la piscine puisque 4 heures se sont déjà écoulées selon l'énoncé.



STRATÉGIE 4

Solution à l'aide d'une suite à motifs croissants.

Chaque  représente 250 litres d'eau



Je peux donc déterminer qu'il faudra 10 heures pour remplir la piscine. De plus, il ne reste que $10 - 4 = 6$ heures à remplir la piscine puisque 4 heures se sont déjà écoulées selon l'énoncé.

EXEMPLE 2

Une relation non linéaire

La pression atmosphérique au niveau de la mer (à 0 mètre) est de 101,3 kPa (kilopascals). À chaque 1 000 mètres de hauteur, cette pression baisse de 12 %. Prédisez la pression atmosphérique au sommet du mont Kilimandjaro en Tanzanie, qui se trouve à 5 895 mètres.

Prédiction

- La baisse de 12 % à chaque 1 000 mètres m'indique que c'est une décroissance non linéaire, car j'enlève 12 % d'une pression atmosphérique décroissante à chaque fois.
- Je calcule que 12 % de 101,3 kPa est $0,12 \times 101,3 = 12,156$ kPa.
- Je peux estimer la valeur à 5 895 mètres car cette altitude est presque 6 fois 1 000 mètres, la prédiction sera plus grande que 24,34 kPa puisque le taux décroissant de 12 % est aussi recalculé selon une hauteur décroissante.
- Afin d'estimer une décroissance (ou croissance) non linéaire, il est souvent utile d'utiliser un taux de variation moyen (dans ce cas $12,156 \times 6 = 72,936$) et de présumer que cette variation est constante. Il est par la suite plus facile de faire des prédictions sur le comportement d'un graphique.
- Ma prédiction de pression à 5 895 mètres est $101,3 - 72,936 = 28,364$ kPa.



STRATÉGIE 1

Vérification en utilisant la table des valeurs

J'établis une table des valeurs à partir du taux de variation décroissant de 12 % commençant par 101,3 kilopascals (kPa).

Un taux de décroissance (une baisse) de 12 % représente une valeur qui est 88 % (0,88) de la valeur précédente. Je peux donc calculer la pression à tous les mille (1 000) mètres et m'arrêter à 6 000 mètres puisque la montagne n'excède pas cette hauteur.

Hauteur, h (m)	Pression atmosphérique, P (kPa)
0	101,3
1 000	$101,3 \times (0,88) = 89,1$
2 000	$89,1 \times (0,88) = 78,4$
3 000	$78,4 \times (0,88) = 69,0$
4 000	$69,0 \times (0,88) = 60,7$
5 000	$60,7 \times (0,88) = 53,5$
6 000	$53,5 \times (0,88) = 47,0$

Je peux voir que la valeur de la pression atmosphérique doit se trouver entre 53,5 kPa et 47,0 kPa, mais qu'elle se situera plus près de 47,0 kPa (car 5 895 m est proche de 6 000 m). Je prédis donc que la pression atmosphérique se trouve à environ **48 kPa**.

Bien que cette valeur soit loin de ma prédiction de **28,364 kPa**, je peux constater qu'il est normal d'avoir un écart entre ma prédiction et le calcul, car j'ai utilisé une approximation linéaire pour estimer une décroissance non linéaire.

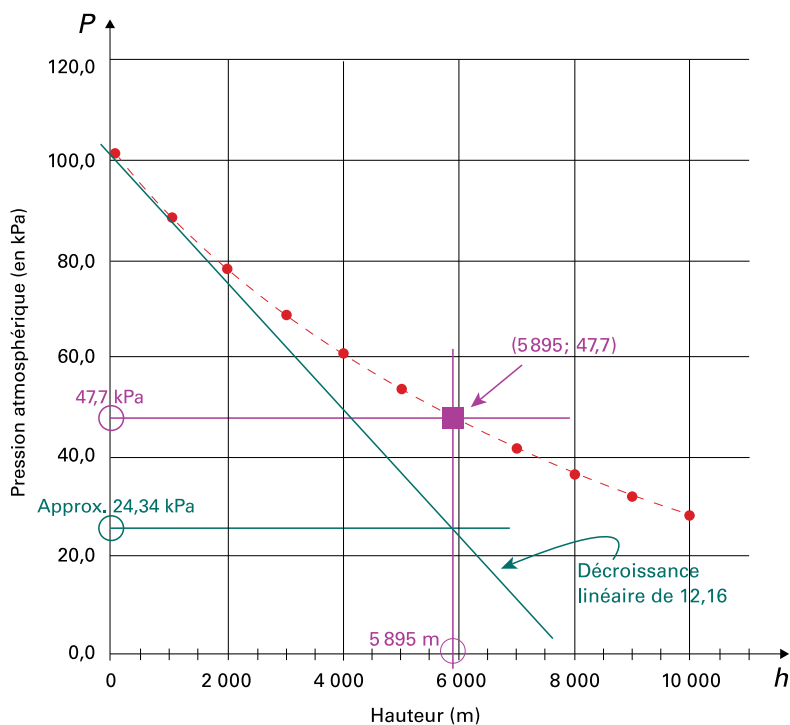


STRATÉGIE 2

Vérification en utilisant un outil technologique pour faire un graphique

En utilisant un outil technologique, je peux déterminer que la pression atmosphérique à 5 893 mètres est de **47,7 kPa**.

Relation entre la pression atmosphérique et la hauteur



De plus, en utilisant une droite, je peux voir la différence entre mon estimation en utilisant une décroissance linéaire de **12,16** et la décroissance non linéaire de **12%**.