7e année

En avant, les maths!

Une approche renouvelée pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

CONCEPTS MATHÉMATIQUES

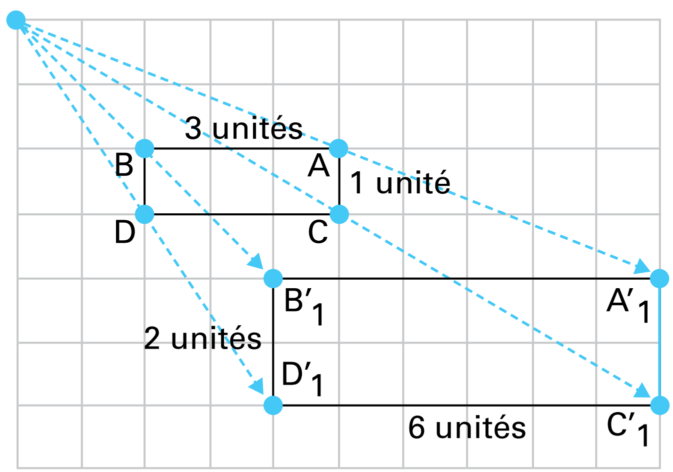
SENS DE L'ESPACE

Transformations d'une figure plane

Terminologie liée au concept mathématique

Transformation géométrique. Opération qui, à partir d'une règle donnée, consiste à faire correspondre tout point du plan à une seule image. La translation, la rotation, la réflexion et l'homothétie sont des exemples de transformations géométriques. Cette modification dans une figure a comme résultat d'en modifier la position, l'orientation ou la taille.

Homothétie. Transformation qui a pour effet d'agrandir ou de réduire une figure selon un rapport donné, de telle sorte que l'image soit semblable à la figure originale.

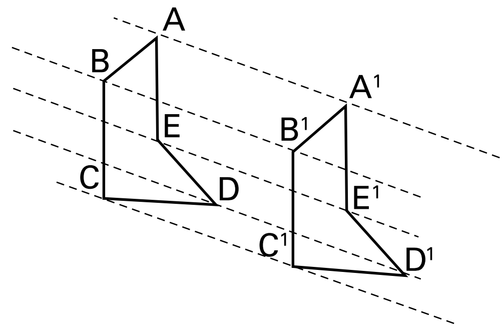


Similarité. Des figures semblables sont des figures qui ont exactement la même forme, dont les mesures d'angle homologues sont équivalentes et dont les mesures de côtés homologues partagent la même proportionnalité.

Image. Figure obtenue à la suite de la transformation d'une figure initiale donnée.

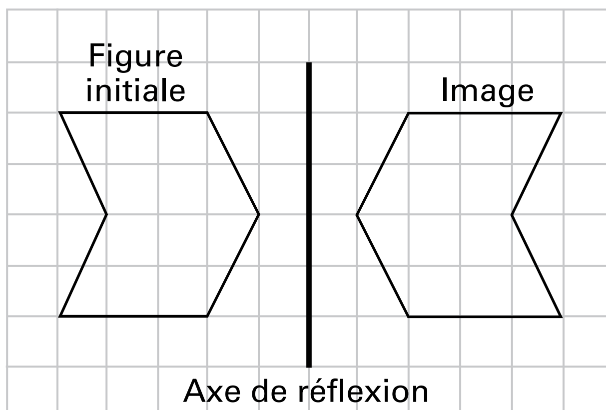
Figure initiale. Figure sur laquelle on applique une transformation géométrique.

Translation. Transformation dans laquelle chaque point d'une figure est déplacé à la même distance, dans la même direction, de sorte à former une figure congruente. Aussi appelée « glissement ».

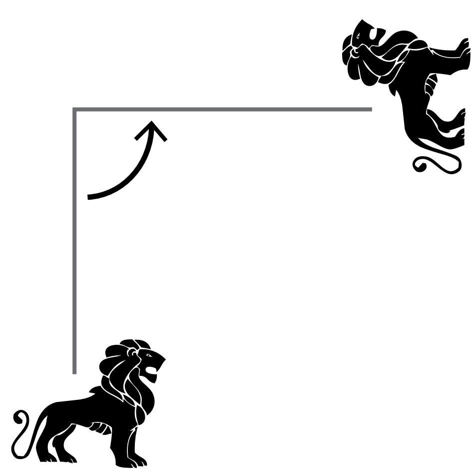


Vecteur. Objet géométrique représenté par une flèche qui définit le sens, la direction et la distance d'une translation.

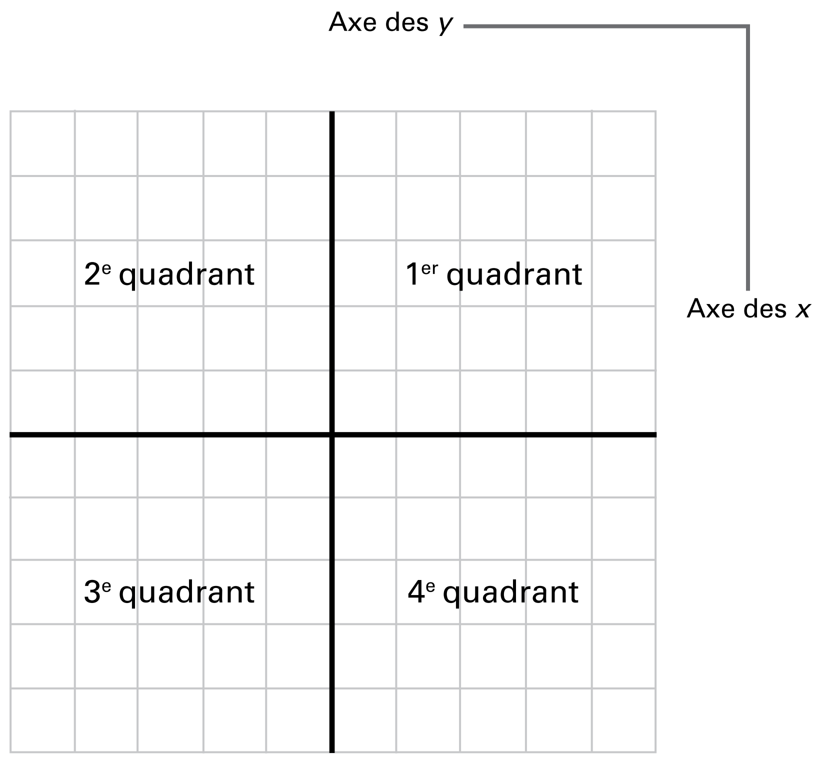
Réflexion. Symétrie par rapport à un axe perpendiculaire à une direction donnée.



Rotation. Transformation selon laquelle chaque point d'une figure tourne autour d'un point fixe appelé centre de rotation, selon un angle de rotation donné.



Plan cartésien. Plan habituellement représenté par une surface plane divisée par 2 droites perpendiculaires graduées, soit l'axe des abscisses (l'axe des *x*) et l'axe des ordonnées (l'axe des *y*). Aussi appelé « grille des coordonnées cartésiennes » ou « plan des coordonnées ».

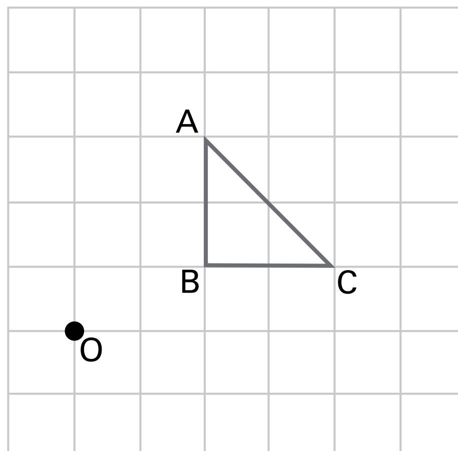


Mise en contexte du concept mathématique

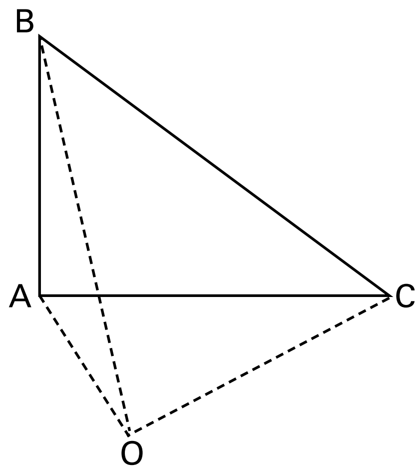
EXEMPLE 1

Homothétie

a) Fais subir une homothétie de rapport 2 au triangle suivant et décris la similarité entre l'image et la figure initiale.



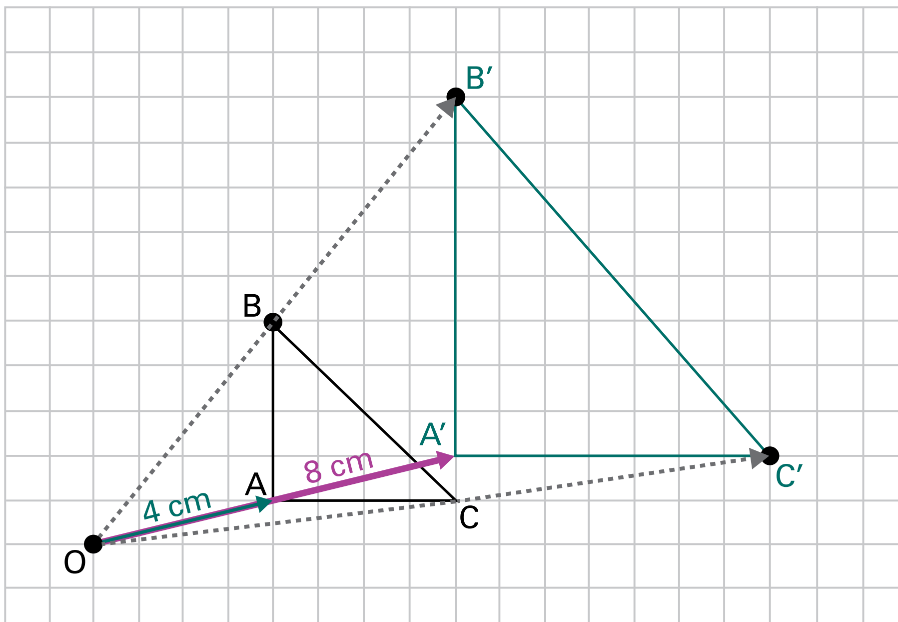
b) Sur une feuille quadrillée, trace un triangle dont les côtés mesurent respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm. Situe un point O à l'extérieur de ton triangle. Trace des segments qui partent du point O et qui joignent chacun des sommets du triangle ABC comme dans l'exemple ci-dessous :



Fais subir une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ au triangle à ta figure initiale et tires-en des conclusions.

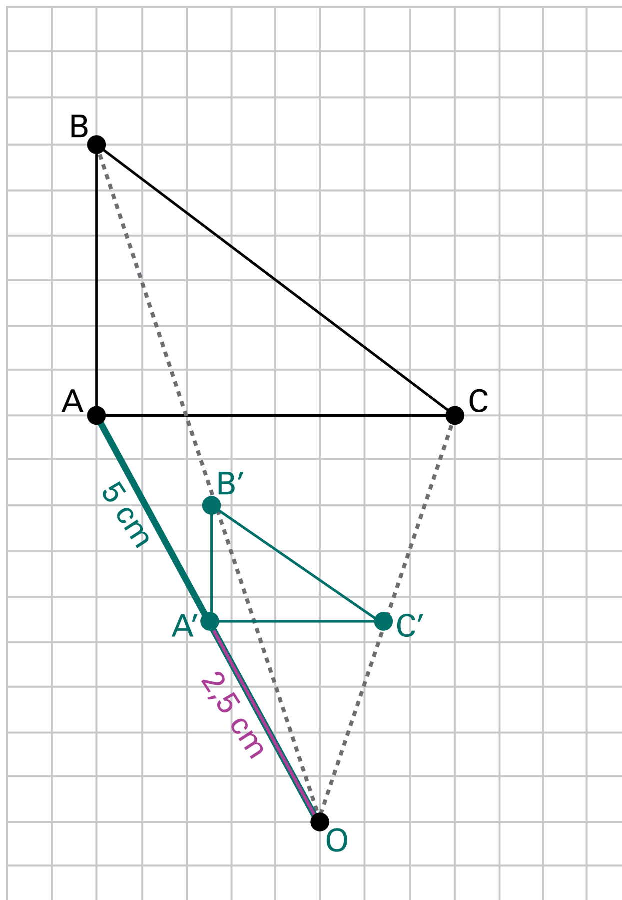
Réponses possibles

a) Pour chaque sommet ABC, je trace une droite qui relie chaque point au centre d'homothétie. À l'aide d'une règle, je mesure la distance entre chaque sommet de la figure et le centre d'homothétie. Je multiplie ensuite chacune des distances par le rapport d'homothétie 2. Par exemple, je mesure la longueur du segment OA. Le segment OA' mesure 4 cm. Je trace alors un segment OA' de 8 cm pour former le segment OA' en passant par le point A, car le rapport d'homothétie est de 2. Je reprends la même démarche pour former les segments OB' et OC'.



Cette homothétie représente une transformation qui a pour effet d'agrandir la figure initiale selon le rapport donné. Je remarque que les côtés du triangle A'B'C' sont deux fois plus longs que ceux du triangle ABC. De plus, la distance entre l'origine et les sommets de l'image est 2 fois plus grande que la distance entre l'origine et les sommets de la figure initiale. Les figures ont la même forme, mais sont de taille différente. Les 2 figures sont proportionnelles; leurs angles restent les mêmes, et la longueur de leur côté est agrandie suivant le rapport d'homothétie.

b) Pour chaque sommet ABC, je trace une droite qui relie chaque point au centre d'homothétie. À l'aide d'une règle, je mesure la distance entre chaque sommet de la figure et le centre d'homothétie. Je divise ensuite chacune des distances par le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$. Par exemple, je mesure la longueur du segment entre O et A. Le segment OA mesure 5 cm. Je trace alors un point sur le segment à 2,5 cm pour former le segment OA'. Je reprends la même démarche pour former les segments OB' et OC'.

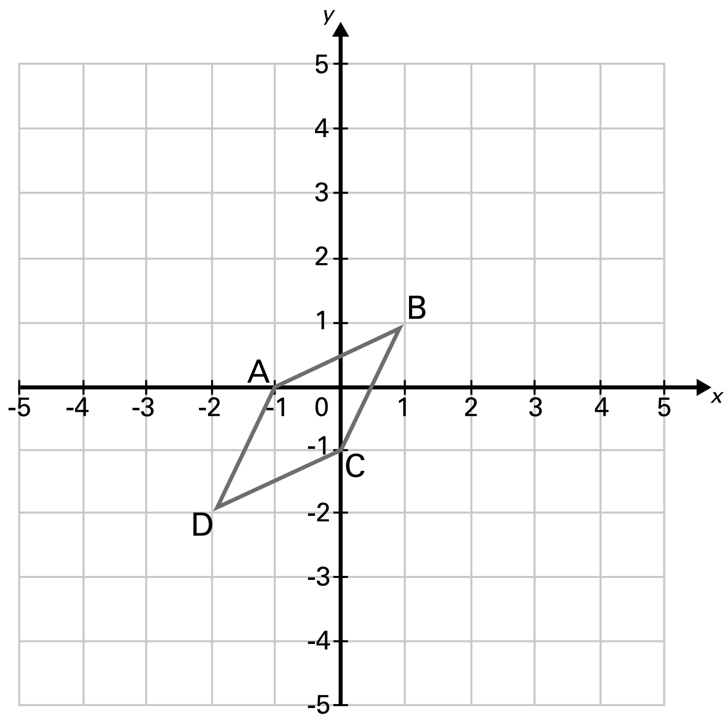


Cette homothétie représente une transformation qui a pour effet de réduire la figure initiale selon le rapport donné, soit $\frac{1}{2}$. Je remarque que les côtés du triangle A'B'C' sont deux fois plus courts que ceux du triangle ABC. De plus, la distance entre l'origine et les sommets de l'image est 2 fois plus petite que la distance entre l'origine et les sommets de la figure initiale. Les figures ont la même forme, mais sont de taille différente. Les deux figures sont proportionnelles; leurs angles restent les mêmes, et la longueur de leur côté est réduite suivant le rapport d'homothétie.

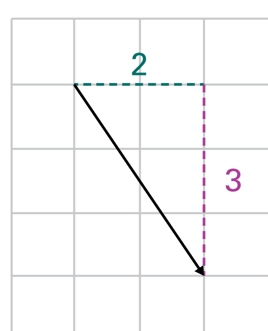
EXEMPLE 2

Translation

Trace l'image d'une translation de (2D, 3B) de la figure ABCD. Décris l'effet de cette translation sur les coordonnées de l'image.



Dans les coordonnées des points, la valeur de *x* augmente de 2 et la valeur de *y* diminue de 3.



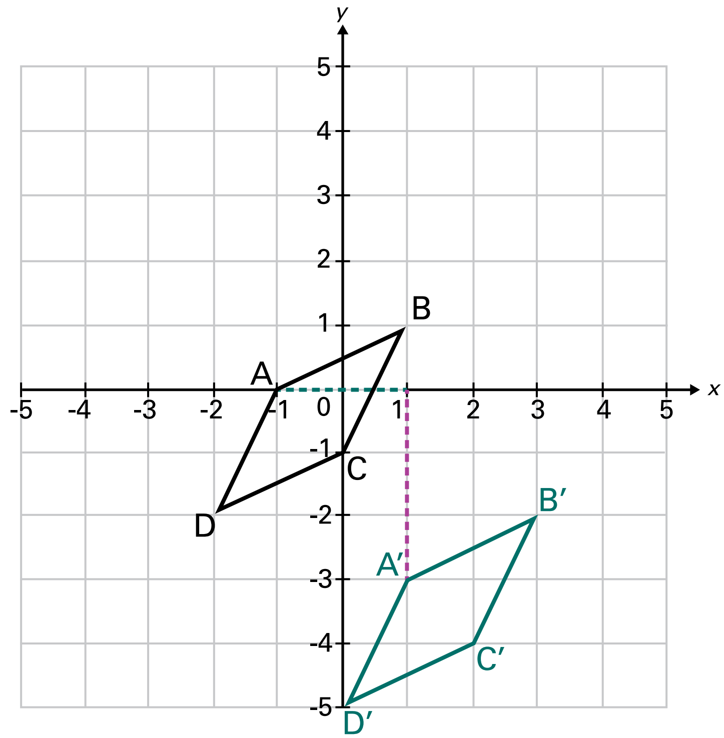


Figure initiale → image

(x, y) → (x + 2, y – 3)

A (-1, 0) → A′ (1, -3)

B (1, 1) → B′ (3, -2)

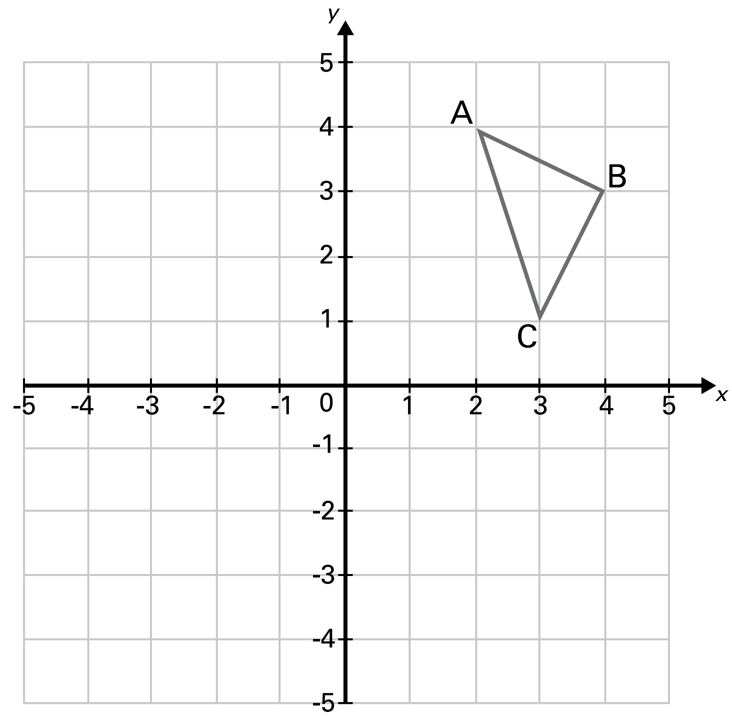
C (0, -1) → C′ (2, -4)

D (-2, -2) → D′ (0, -5)

Je remarque que la translation « fait glisser » la figure initiale sur une distance donnée. J’observe aussi que l’image produite est congruente à la figure initiale. Je remarque également que lorsqu’il y a une translation vers la droite, la valeur de l’abscisse augmente et lorsqu’il y a une translation vers le bas, la valeur de l’ordonnée diminue.

EXEMPLE 3

a) Fais subir au triangle ABC une réflexion par rapport à l'axe des *x*.
Décris l'effet de cette réflexion sur les coordonnées de l'image.



STRATÉGIE

Réflexion par rapport à l'axe des *x*

Dans les coordonnées des points, la valeur de l'ordonnée (y) devient l'opposé (change de signe), alors que la valeur de l'abscisse (x) reste la même.

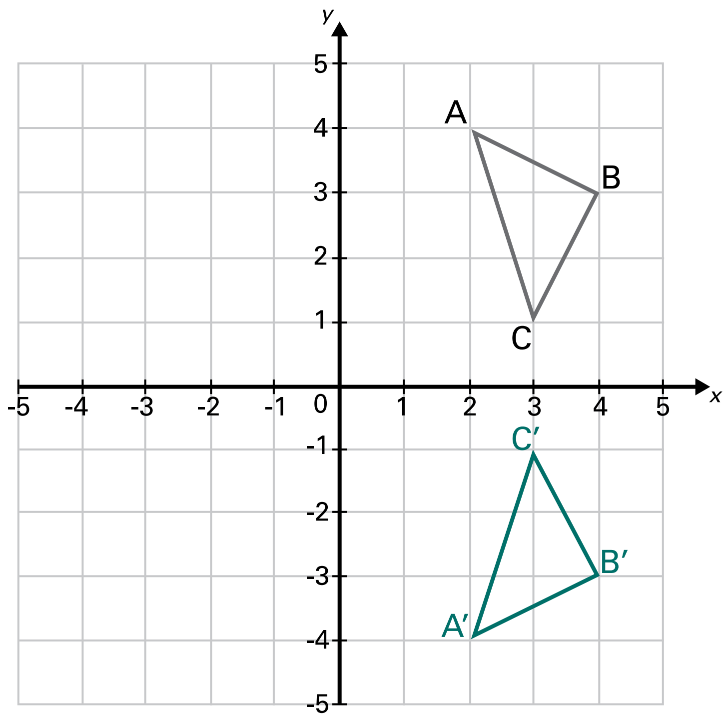


Figure initiale → image

(x, y) → (x, -y)

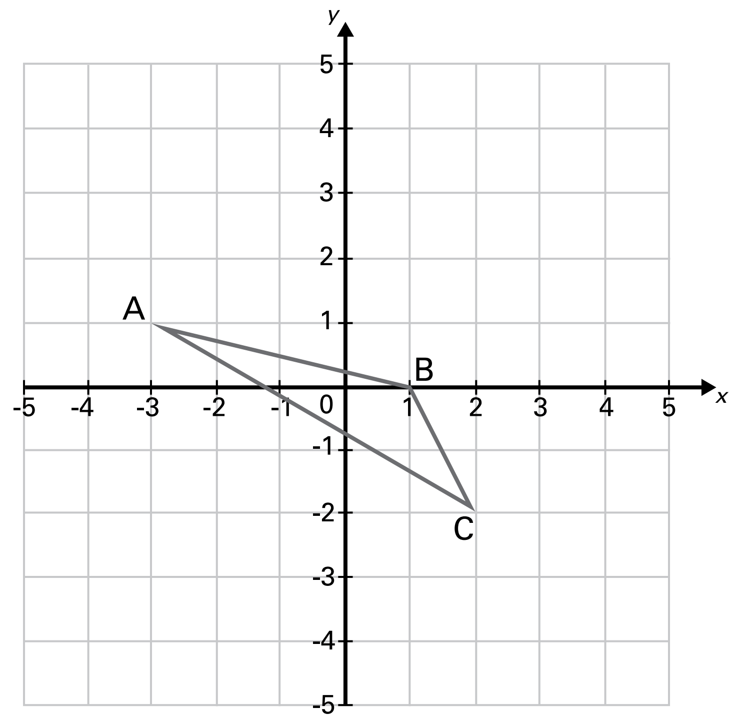
A (2, 4) → A′ (2, -4)

B (4, 3) → B′ (4, -3)

C (3, 1) → C′ (3, -1)

Je remarque que la réflexion « inverse » la figure initiale par rapport à l'axe des x. J'observe que même si la figure A′B′C′ n'a plus les mêmes coordonnées, la réflexion a reproduit une figure congruente à la figure initiale.

b) Fais subir au triangle ABC une réflexion par rapport à l’axe des *y*. Décris l’effet de cette réflexion sur les coordonnées de l’image.



STRATÉGIE

Réflexion par rapport à l'axe des *y*

Dans les coordonnées des points, la valeur de l'abscisse (*x*) devient l'opposé (change de signe), alors que la valeur de l'ordonnée (*y*) reste la même.

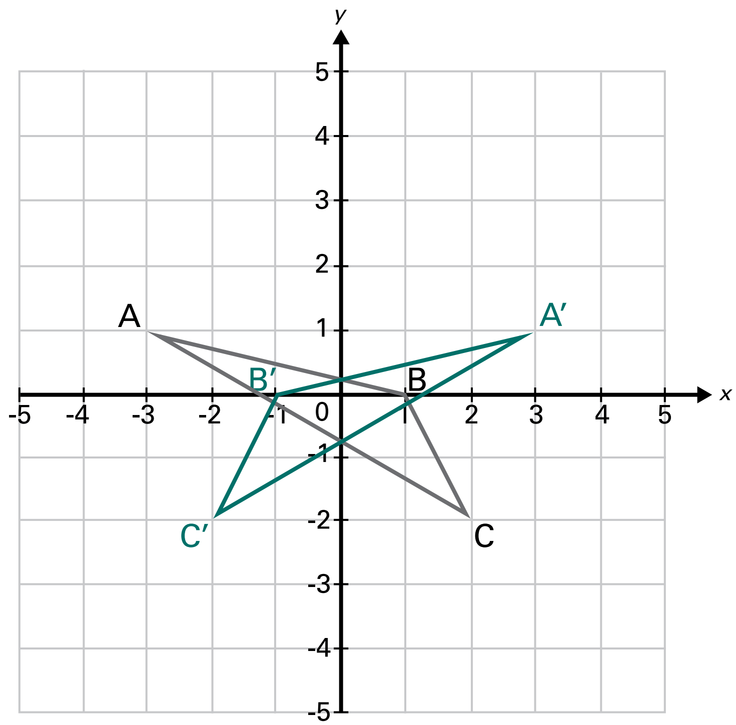


Figure initiale → image

(x, y) → ($-x$, y)

A (-3, 1) → A′ (3, 1)

B (1, 0) → B′ (-1, 0)

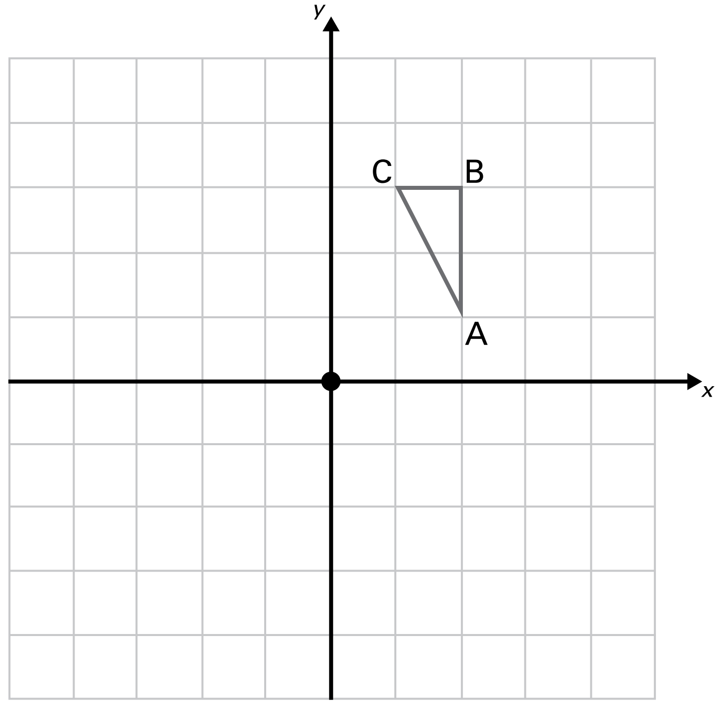
C (2, -2) → C′ (-2, -2)

Je remarque que la réflexion « inverse » la figure initiale par rapport à l'axe des *y*. J'observe que même si la figure A′B′C′ n'a plus les mêmes coordonnées, la réflexion a reproduit une figure congruente à la figure initiale.

EXEMPLE 4

Rotation dans un plan cartésien selon un angle donné

Fais subir au triangle ABC une rotation de 90° et de 180° dans le sens des aiguilles d'une montre. Décris l'effet de ces rotations sur les coordonnées de l'image.



Je fais maintenant subir au triangle ABC une rotation de 90° (d'un quart de tour).

Dans les coordonnées des points, la valeur de l'ordonnée (y) et la valeur de l'abscisse (x) sont inversées et la valeur de l'ordonnée (y) devient l'opposé (change de signe).

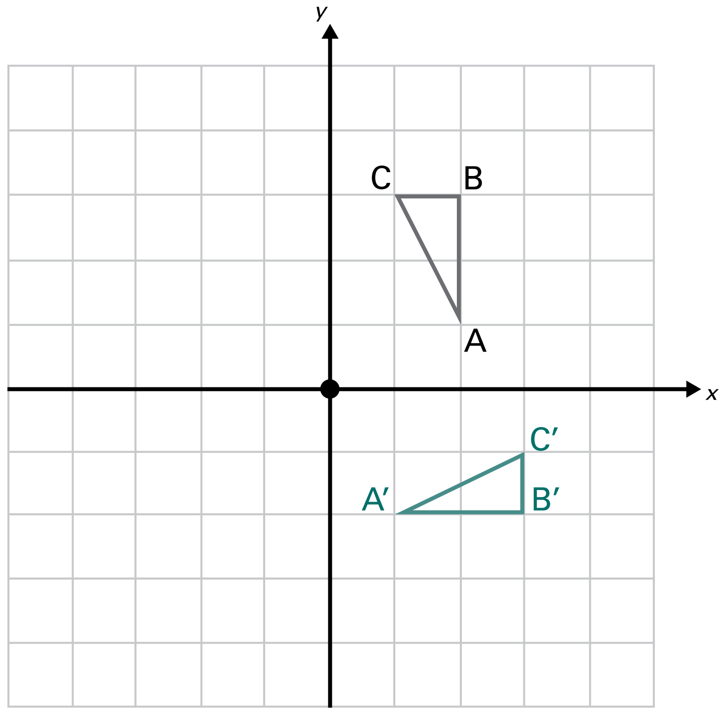


Figure initiale → image

(x, y) → (y, -x)

A (2, 1) → A′ (1, -2)

B (2, 3) → B′ (3, -2)

C (1, 3) → C′ (3, -1)

Je remarque que la rotation « fait tourner » la figure initiale autour d’un centre de rotation selon un angle donné. J’observe aussi que même si la figure A′B′C′ n’a plus les mêmes coordonnées, la rotation a reproduit une figure congruente à la figure initiale.

Je fais maintenant subir au triangle ABC une rotation de 180° (d'un demi-tour). Dans les coordonnées des points, la valeur de l'abscisse (x) et la valeur de l'ordonnée sont l'opposé (changent de signe).

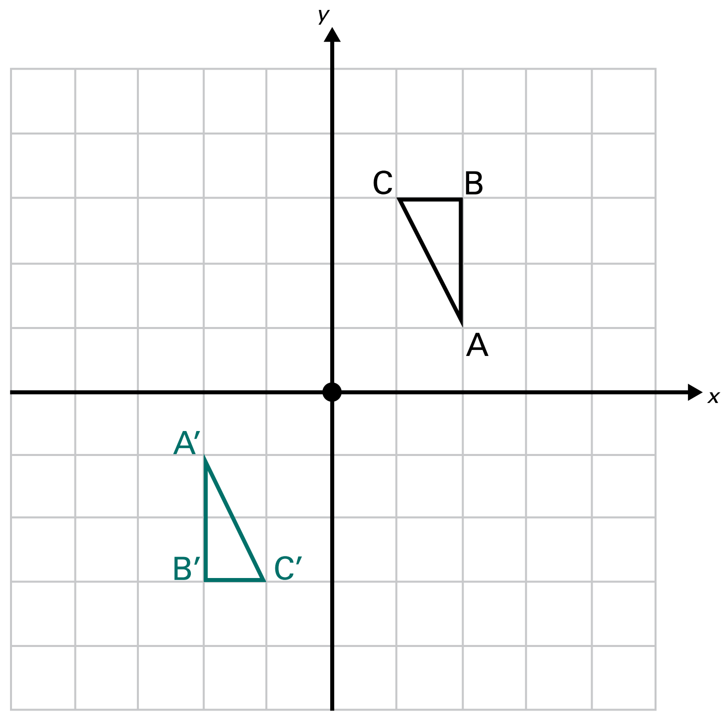


Figure initiale → image

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

A (2, 1) → A′ (-2, -1)

B (2, 3) → B′ (-2, -3)

C (1, 3) → C′ (-1, -3)

Je remarque que la rotation « fait tourner » la figure initiale autour d'un centre

de rotation selon un angle donné. La figure est inversée. J'observe aussi que même si la figure A′B′C′ n'a plus les mêmes coordonnées, la rotation a reproduit une figure congruente à la figure initiale.