Guide d'enseignement efficace des mathématiques

de la 4e à la 6e année

Numération et sens du nombre

Fascicule 1

Nombres naturels

2008

appuyer chaque élève

Ontario

Guide d’enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année
Numération et sens du nombre
Fascicule 1 : Nombres naturels

Le *Guide d’enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année – Numération et sens du nombre* est réparti en trois fascicules : *Nombres naturels, Fractions* et *Nombres décimaux et pourcentages*. Ce premier fascicule, *Nombres naturels*, comprend notamment une introduction, une description de la grande idée *Sens du nombre* et une de la grande idée *Sens des opérations* détaillées à la lumière des nombres naturels ainsi qu’une situation d’apprentissage pour chaque année d’études au cycle moyen.

Guide d'enseignement efficace des mathématiques

de la 4^e à la 6^e année

Numération et sens du nombre

Fascicule 1

Nombres naturels

TABLE DES MATIÈRES

GRANDE IDÉE 2 – SENS DES OPÉRATIONS 73

ÉTABLIR DES LIENS 146

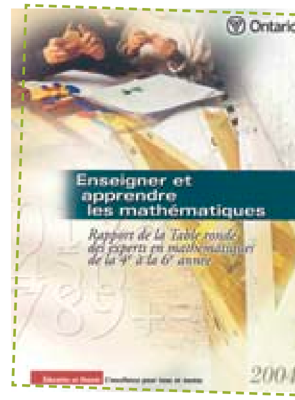
CHEMINEMENT DE L'ÉLÈVE 160

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE 165

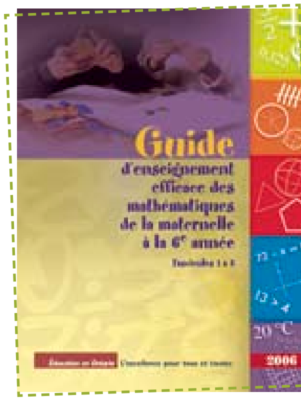
RÉFÉRENCES 223

PRÉFACE

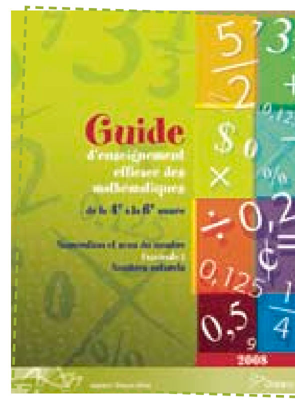
Le document intitulé *Enseigner et apprendre les mathématiques : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année* souligne que « l'enseignement joue un rôle central dans l'apprentissage et la compréhension des mathématiques chez les élèves du cycle moyen » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 35) et il en définit les principales composantes. Pour appuyer la mise en œuvre des recommandations présentées dans ce rapport, le ministère de l'Éducation de l'Ontario a entrepris l'élaboration d'une série de guides pédagogiques composée d'un guide principal et de guides d'accompagnement.



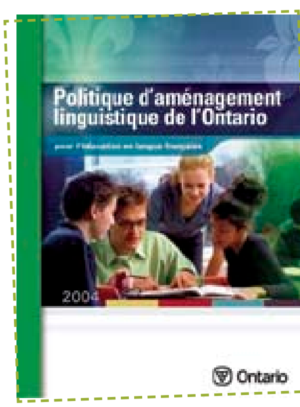
Le **guide principal**, publié en cinq fascicules et intitulé *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006), propose des stratégies précises pour l'élaboration d'un programme de mathématiques efficace et la création d'une communauté d'apprenants et d'apprenantes chez qui le raisonnement mathématique est développé et valorisé. Les stratégies portent essentiellement sur les grandes idées inhérentes aux attentes du programme-cadre de mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005), sur la résolution de problèmes comme principal contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication comme moyen de développement et d'expression de la pensée mathématique. Ce guide contient également des stratégies d'évaluation, de gestion de classe et de communication avec les parents[1].



Les **guides d'accompagnement**, rédigés par domaine en tenant compte des attentes et des contenus d'apprentissage du programme-cadre de mathématiques, suggèrent des applications pratiques des principes et des fondements présentés dans le guide principal. Ils sont conçus pour aider l'enseignant ou l'enseignante à s'approprier la pédagogie propre à chaque domaine mathématique afin d'améliorer le rendement des élèves en mathématiques.



Le guide principal et les guides d'accompagnement ont été élaborés en conformité avec la *Politique d'aménagement linguistique de l'Ontario pour l'éducation en langue française* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004b) pour soutenir la réussite scolaire des élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition par chaque élève de compétences en communication orale.



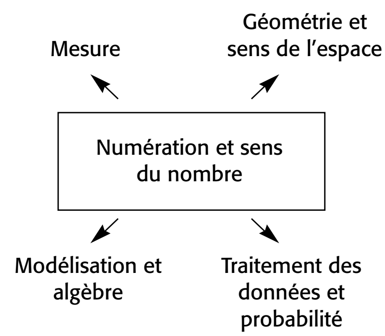
1. Dans le présent document, *parents* désigne père, mère, tuteur et tutrice.

INTRODUCTION

Pour réussir dans le monde d'aujourd'hui, nous devons avoir une excellente compréhension conceptuelle des mathématiques. Chaque jour, nous sommes bombardés de nombres, de statistiques, de publicités et de données, à la radio, à la télévision et dans les journaux. Nous avons besoin d'une certaine aptitude mentale et d'un solide sens du nombre pour évaluer les publicités, estimer des quantités, calculer efficacement avec les nombres afin de composer avec le quotidien et de juger si ces calculs sont appropriés.

(Fosnot et Dolk, 2001, p. 98, traduction libre)

Les nombres et les opérations jouent un rôle de premier plan dans l'apprentissage des mathématiques, puisque pour maîtriser divers concepts mathématiques, les élèves s'appuient sur la compréhension qu'ils en ont. En plus d'être directement reliés aux autres domaines, les nombres et les opérations sont utilisés quotidiennement par tout le monde. C'est pourquoi, historiquement, le domaine Numération et sens du nombre est au cœur de l'apprentissage des mathématiques.



Cependant, l'apprentissage des nombres et des opérations a évolué au fil du temps. La numération et le sens du nombre, c'est plus que :

- l'application d'algorithmes et de procédures;
- la recherche de la bonne réponse;
- des séries d'exercices arithmétiques.

La numération et le sens du nombre, au cycle moyen, c'est :

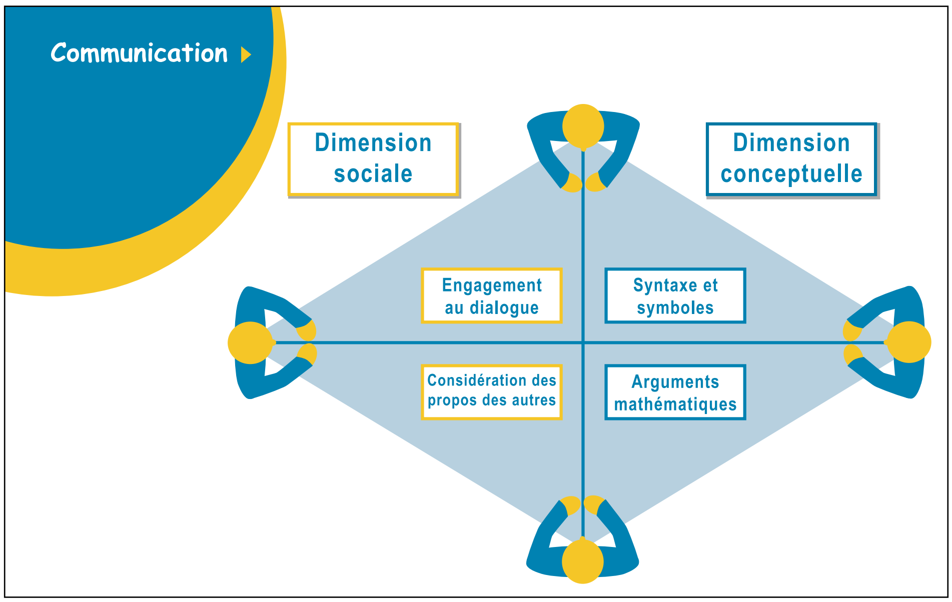
- la compréhension des nombres et des quantités qu'ils représentent;
- l'établissement de liens entre les concepts numériques;
- l'utilisation de stratégies comprises et efficaces pour calculer dans divers contextes.

ENSEIGNEMENT EFFICACE DE LA NUMÉRATION

Parmi les nombreux éléments qui contribuent à l'efficacité de l'enseignement des mathématiques, certains ont une incidence plus grande que d'autres. Le présent guide est rédigé en tenant compte plus particulièrement de quatre de ces éléments, soit la communication, l'enseignement par la résolution de problèmes, les échelles de développement du sens du nombre et du sens des opérations et les grandes idées.

Communication[2]

> *… la communication, entendue comme activité sociale et culturelle médiatisée par la langue, les symboles scientifiques et les outils technologiques, apparaît comme l'un des moyens privilégiés d'appropriation du savoir. En participant à une discussion avec ses pairs et l'enseignante ou l'enseignant, l'élève acquiert une conscience de plus en plus nette des objets d'apprentissage.*
>
> (Radford et Demers, 2004, p. 15)



La communication est un élément essentiel dans l'apprentissage des mathématiques. C'est une habileté qui va au-delà de l'utilisation appropriée de la terminologie et des symboles mathématiques dans une communication verbale ou écrite. C'est aussi, de façon plus importante, un véhicule par lequel les élèves acquièrent une compréhension des concepts mathématiques dans des contextes qui font appel à des raisonnements et à des arguments mathématiques. C'est ce que Radford et Demers (2004) appellent la *dimension conceptuelle de la communication*.

Ces chercheurs soulignent aussi l'importance de prendre en compte la dimension sociale de la communication. En effet, qui dit « communication » dit « échange » entre deux personnes ou plus. L'échange sera profitable pour toutes les personnes impliquées, dans la mesure où il règne au sein du groupe un climat propice au dialogue et une culture de respect et d'écoute.

2. Pour plus de détails au sujet de la communication, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 79-114).

Pour accroître l'efficacité de l'enseignement de la numération, l'enseignant ou l'enseignante doit favoriser l'émergence d'une culture qui valorise la communication comme moyen d'appropriation du savoir. On doit donc créer des occasions propices aux échanges entre les élèves afin de les pousser à préciser leurs raisonnements et leurs stratégies. La communication est au centre de toutes les situations d'apprentissage proposées dans le présent guide.

Un élément important dans l'enseignement du sens du nombre est la quantité remarquable d'interactions verbales en classe. Encourager les élèves à parler et à partager leurs idées les aide à établir des liens entre ces idées pour leur propre bénéfice et pour celui de leurs pairs.

(Van de Walle et Bowman Watkins, 2003, p. 146, traduction libre)

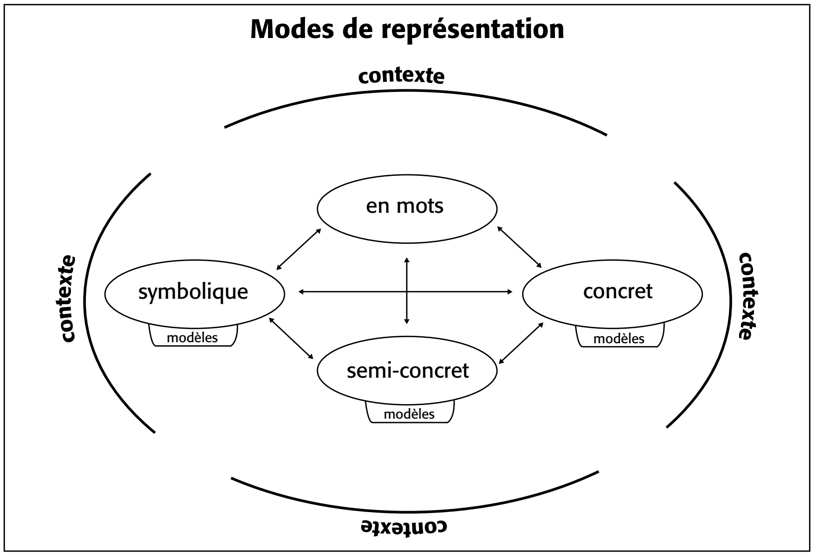
RÔLE DES REPRÉSENTATIONS DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

En mathématiques, la communication n'est pas uniquement une affaire de mots. Les idées doivent être véhiculées au moyen de différents modes : concrètement (p. ex., avec des cubes emboîtables), semi-concrètement (p. ex., avec une droite graduée ou une illustration), symboliquement (p. ex., en utilisant des chiffres et des symboles mathématiques dans une équation) et, bien sûr, verbalement, à l'aide de mots, qu'ils soient lus, vus, dits, écrits ou entendus.

Ces divers modes de représentation présentés dans le schéma ci-après permettent d'exploiter plusieurs entrées cognitives, établissant ainsi des liens entre les idées, liens indispensables à l'apprentissage. L'enseignant ou l'enseignante utilise des modèles pour représenter des concepts mathématiques aux élèves qui, à leur tour, s'en servent pour résoudre des problèmes et clarifier leur pensée.

L'enseignement des mathématiques est plus efficace lorsqu'on comprend l'effet des représentations externes sur l'apprentissage. Pour cela, nous devons être capables de discuter des représentations internes des élèves – le sens qu'ils y donnent, les relations qu'ils établissent et la manière dont ils joignent ces représentations les unes avec les autres.

(Goldin et Shteingold, 2001, p. 19, traduction libre)



MODÈLES MATHÉMATIQUES

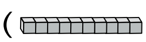
> *L'utilisation de modèles pour organiser, enregistrer et communiquer des idées mathématiques facilite les représentations. À l'aide du matériel de manipulation, de diagrammes, d'illustrations et de symboles, les modèles servent à « faire voir les mathématiques ». Le recours à ces modèles aide aussi à s'approprier les idées mathématiques et à les comprendre.*
>
> (Fennell, 2006, p. 3, traduction libre)

Depuis longtemps, les mathématiciens et les mathématiciennes construisent des modèles pour expliquer et représenter des découvertes et des observations du monde et pour les communiquer efficacement. Par exemple, en pensant à un nombre, certains le visualisent dans un modèle mathématique tel que la droite numérique ouverte ou une grille de nombres. Cela aide à mieux cerner le nombre et à reconnaître qu'il est *plus que*…, *moins que*… ou *près de*… un autre nombre. Les modèles sont donc des représentations d'idées mathématiques.

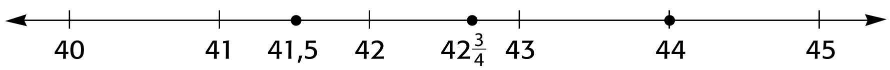
Un ou une jeune enfant visualise le monde qui l'entoure à sa façon. Pour dessiner l'arbre devant sa maison, il trace des lignes sur du papier et le représente en deux dimensions, et ce, même s'il l'a touché, en a fait le tour et s'est abrité sous ses branches (Fosnot et Dolk, 2001, p. 74). Cette représentation n'est pas une copie de l'arbre, mais bien une construction de ce qu'il connaît. C'est en fait « un modèle » de l'arbre. Il en va de même pour les élèves dont les premiers modèles utilisés pour résoudre des problèmes reflètent leur interprétation de la réalité.

Toujours selon Fosnot et Dolk (2001, p. 80), les modèles, tout comme les grandes idées et les stratégies, ne peuvent être transmis automatiquement, mais font l'objet d'une réappropriation et d'une construction de la part des élèves. La table de valeurs en est un bon exemple : intuitivement, les élèves « organisent » les données numériques en les plaçant de façon disparate sur une feuille, mais la table de valeurs permet de les ordonner en vue de les traiter et de les analyser.

Cependant, une précision au sujet des modèles et du matériel de manipulation est de mise : le modèle n'est pas l'idée mathématique. De ce fait, l'arbre que l'enfant a dessiné, dans l'exemple plus haut, n'est pas un arbre, mais une modélisation de la situation qui servira à en discuter. Il en va de même de tous les modèles employés.

Le matériel de base dix est un modèle, car il suppose que l'utilisateur ou l'utilisatrice possède déjà une compréhension du concept de regroupement. Cependant, présenter une languette d'une trousse de matériel de base dix () et affirmer qu'il s'agit d'une dizaine est faux. L'objet n'est pas une « dizaine », mais un moyen concret de représenter « l'idée » de la dizaine. Ici, il représente une dizaine de petits cubes, mais il pourrait représenter une unité, un arbre ou même une poutre. Selon l'intention, il pourrait aussi représenter un dixième, par exemple, en représentant le nombre 2,5 avec 2 planchettes (2 unités) et 5 languettes (5 dixièmes).

La droite numérique est un autre modèle auquel les élèves doivent être exposés. La droite numérique ne représente pas la quantité correspondant aux nombres qui sont placés sur cette droite; elle permet de « voir » les nombres en relation les uns avec les autres. Par exemple, une droite numérique sur laquelle les nombres 44, $42\frac{3}{4}$ et 41,5 sont placés représente la relation d'ordre entre ces trois nombres.



Dans le but de favoriser le raisonnement des élèves, l'enseignant ou l'enseignante doit utiliser divers modèles et les inciter à faire de même. Les modèles ne devraient pas nécessairement faire l'objet d'un enseignement formel; ils peuvent être présentés dans le cadre de situations de résolution de problèmes. Par exemple, la droite numérique est un excellent modèle pour explorer l'addition de plusieurs nombres. Cependant, la majorité des élèves ne « conçoivent » pas qu'elle puisse être créée sans qu'elle soit graduée. Imaginons alors un échange mathématique, dans le cadre d'un problème d'addition, où ils présentent leurs stratégies de résolution de problèmes. L'enseignant ou l'enseignante pourra en profiter pour faire un lien entre la droite numérique utilisée par un ou une élève (Figure 1) pour effectuer une opération et la possibilité d'utiliser une droite numérique ouverte (Figure 2).

Exemple

5 + 3 + 10

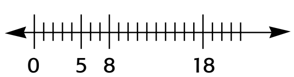


Figure 1

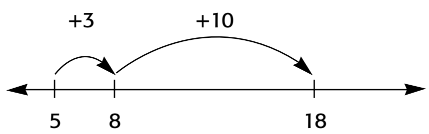


Figure 2

De même, afin de représenter des situations impliquant des fractions, les élèves tendent souvent à utiliser un modèle de surface (p. ex., cercle ou rectangle). Cependant, ce type de modèle ne permet pas de représenter fidèlement des situations où le tout est une longueur ou une distance. L'enseignant ou l'enseignante peut alors profiter d'une occasion où les élèves utilisent un modèle de surface pour représenter la fraction d'une longueur et leur montrer comment un modèle de longueur (p. ex., segment de droite) serait plus approprié.

Les élèves doivent être exposés à une multitude de représentations pour être en mesure d'établir des liens entre elles et consolider leur apprentissage. Au cours de leur scolarisation, ils doivent vivre une transition à partir de l'utilisation d'un **modèle comme outil didactique** dans une situation particulière vers l'utilisation d'un **modèle comme stratégie** pour généraliser des idées mathématiques, pour résoudre des problèmes et pour appliquer le modèle à de nouveaux contextes. Cette transition d'un contexte familier à un nouveau contexte constitue une étape fondamentale dans l'apprentissage des mathématiques. Elle se retrouve dans la grille d'évaluation du rendement du programme-cadre de mathématiques, sous la compétence « Mise en application ».

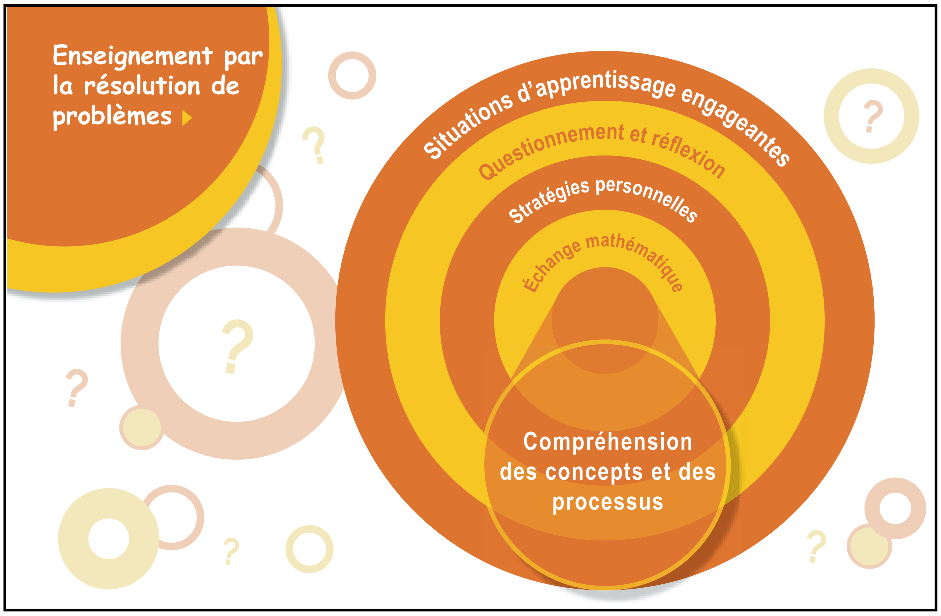
Voici quelques modèles que les élèves peuvent utiliser en numération et sens du nombre :

- la droite numérique;
- la droite numérique ouverte;
- la disposition rectangulaire;
- la table de valeurs;
- la grille de nombres;
- le matériel de base dix;
- l'équation;
- le modèle de surface pour représenter des fractions;
- le modèle de longueur pour représenter des fractions;
- le modèle d'un ensemble pour représenter des fractions;
- la monnaie pour représenter des nombres décimaux.

Enseignement par la résolution de problèmes[3]

L'activité de résolution de problèmes et l'apprentissage sont intimement liés; les élèves apprennent les mathématiques en faisant des mathématiques.

(Van de Walle et Folk, 2005, p. 44, traduction libre)



Afin d'aider les élèves à bien comprendre les concepts et les processus en numération et sens du nombre, il est important de les placer en situation de résolution de problèmes dès le début d'une unité d'apprentissage. Lorsqu'ils travaillent en équipe à résoudre un problème engageant et non routinier, les élèves deviennent habiles à formuler une hypothèse et un argument mathématique. Ils apprennent aussi à prendre des risques, à persévérer et à avoir confiance en leur capacité à résoudre des problèmes. C'est dans un tel contexte que l'apprentissage des mathématiques prend tout son sens.

L'enseignement par la résolution de problèmes exige que l'enseignant ou l'enseignante présente des situations d'apprentissage qui soutiennent l'intérêt des élèves. Le contexte ou la situation du problème devient alors un facteur déterminant. « Les problèmes proposés devraient partir de contextes réels (c'est-à-dire

Pour créer un milieu d'enseignement et d'apprentissage stimulant, il faut déterminer les interventions qui devraient être conservées, celles qui peuvent être améliorées et celles qui pourraient être mises en place pour mieux rejoindre les garçons et mieux accompagner les filles dans leur apprentissage.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 17)

3. Pour plus de détails au sujet de l'enseignement par la résolution de problèmes, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 8-40).

des situations qui se produisent de façon authentique en salle de classe), de contextes réalistes (c'est-à-dire des situations qui sont issues d'expériences qui pourraient être vécues par les élèves à l'extérieur de la salle de classe) et même de contextes fantaisistes (c'est-à-dire des situations qui font appel à l'imaginaire des élèves) » (Vézina et coll., 2006, p. 4). De fait, le contexte peut être un élément accrocheur pour les élèves et leur donne une raison de « faire des mathématiques ». Conséquemment, le contexte doit être choisi, formulé et façonné judicieusement, afin de toucher leur sensibilité. Le contexte est donc un élément de la résolution de problèmes qui peut être utilisé afin de susciter l'intérêt des élèves, notamment les garçons et les élèves ayant des besoins particuliers.

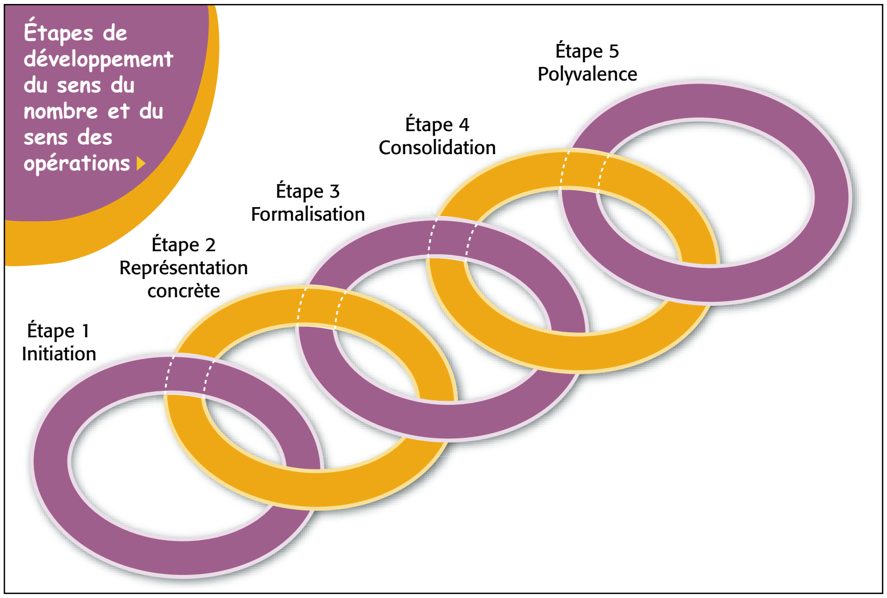
Au cours de l'échange mathématique, les apprenants et apprenantes – de jeunes mathématiciens et mathématiciennes au travail – défendent leur raisonnement. Des idées et des stratégies ressortent de la discussion et contribuent à former le bagage mathématique de tous les élèves de la classe.

(Fosnot et Dolk, 2001, p. 29, traduction libre)

L'enseignement par la résolution de problèmes exige aussi que l'enseignant ou l'enseignante présente aux élèves des situations d'apprentissage riches en contenu mathématique qui les incitent à réfléchir. Il ou elle doit ensuite laisser les élèves élaborer leurs propres stratégies de résolution de problèmes sans trop les diriger. Enfin, l'enseignant ou l'enseignante doit clarifier les concepts mathématiques lorsque les élèves présentent leurs stratégies et leurs solutions lors de l'échange mathématique. L'échange mathématique est en quelque sorte un temps d'objectivation au cours duquel les élèves expliquent et défendent leur raisonnement et analysent celui des autres. L'apprentissage et la compréhension se forgent grâce à cette confrontation d'idées et à un questionnement efficace de la part de l'enseignant ou de l'enseignante. En outre, l'échange mathématique permet aux élèves de consolider leurs apprentissages et de développer diverses habiletés telles que l'habileté à résoudre des problèmes, à communiquer, à raisonner, à écouter et à analyser. Pour plus de détails au sujet de l'échange mathématique, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année,* fascicule 3 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 44-45). L'enseignement par la résolution de problèmes est axé sur la compréhension. En numération et sens du nombre, les élèves résoudront des problèmes pour acquérir un meilleur sens des opérations, lequel se traduira par l'emploi de stratégies comprises et non par l'emploi d'étapes mémorisées et appliquées aveuglément. Toutes les situations d'apprentissage présentées dans le présent guide se prêtent à un enseignement par la résolution de problèmes.

Échelles de développement du sens du nombre et du sens des opérations

> *Les échelles de développement permettent à l'enseignant ou à l'enseignante de déterminer les étapes que les élèves ont franchies dans l'apprentissage des nombres et des opérations et de mieux cerner les prochaines étapes à franchir.*
>
> (Small, 2005b, p. 2, traduction libre)



Le développement des connaissances et des habiletés des élèves en numération et sens du nombre s'effectue progressivement; il est caractérisé par un approfondissement graduel du sens du nombre et du sens des opérations qui s'échelonne sur l'ensemble des années d'études au palier élémentaire.

Les tableaux qui suivent proposent une échelle de développement du sens du nombre (Tableau 1) et une échelle de développement du sens des opérations (Tableau 2). Chaque échelle décrit un continuum de développement en cinq étapes qui va de l'initiation à la polyvalence comme illustré dans le schéma ci-dessus.

Ce continuum, qui reflète un cheminement du concret vers l'abstrait, est fondé sur les trois prémisses suivantes :

1. Les élèves doivent passer par toutes les étapes pour chaque nouveau concept. S'ils escamotent certaines étapes, il leur sera difficile de développer pleinement le sens du nombre et le sens des opérations jusqu'à l'étape de la polyvalence. Par contre, au fil des années et selon leur bagage d'expériences, ils seront en mesure de passer par les premières étapes de plus en plus rapidement.

2. Le parcours à travers ces étapes ne se fait pas exclusivement de façon unidirectionnelle. Au contraire, selon les situations d'apprentissage auxquelles ils doivent faire face, les élèves peuvent avoir besoin de revenir à une étape précédente pour consolider leurs acquis.

3. Les étapes ne forment pas des ensembles disjoints. Il y a une zone d'intersection entre deux étapes consécutives et les élèves peuvent se situer dans cette zone en ce qui a trait à la compréhension d'un concept particulier.

Pour plus de renseignements au sujet de la zone proximale de développement, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 38-39).

Dans chacun des tableaux, les étapes sont définies brièvement et sont accompagnées de quelques exemples de comportements observables qui servent à en préciser le sens. L'enseignant ou l'enseignante peut utiliser ces tableaux dans le cadre d'une évaluation diagnostique ou formative pour déterminer l'étape à laquelle les élèves se situent par rapport à un concept particulier. Il ou elle pourra alors planifier des situations d'apprentissage qui correspondent à la zone proximale de développement des élèves et qui permettront à ces derniers de poursuivre leur cheminement vers l'étape suivante. La progression d'une étape à l'autre est tributaire de la pertinence des activités d'apprentissage et des échanges mathématiques vécus en classe. Autrement dit, plus les élèves vivront des expériences signifiantes, plus leur compréhension sera aiguisée et claire.

Note : Il importe de souligner que les cinq étapes dans ces deux tableaux ne sont aucunement liées aux années d'études ou aux niveaux de rendement de la grille d'évaluation présentée dans le programme-cadre de mathématiques.

Le tableau 1 qui suit décrit les étapes de développement du sens du nombre. Il importe de retenir que le mot « nombre » dans ce tableau comprend à la fois les nombres naturels, les fractions et les nombres décimaux. Lorsqu'un ensemble de nombres est l'objet d'étude pour la première fois, les élèves se situent généralement à l'étape 1. Par exemple, lorsque les élèves de 4e année amorcent l'étude des nombres décimaux, ils se situent à l'étape 1 pour cet ensemble de nombres. Par contre, ils peuvent être à l'étape 3 en ce qui a trait aux nombres naturels.

Tableau 1 — Échelle de développement du sens du nombre

Étapes	Exemples de comportements observables
Étape 1 – Initiation Compréhension intuitive de la quantité représentée par certains nombres	**L'élève :** • reconnaît des représentations symboliques, concrètes, semi-concrètes et en mots de certains nombres (p. ex., 0 à 10, $\frac{1}{2}$, 0,5), ainsi que la quantité qu'ils représentent.
Étape 2 – Représentation concrète Habileté à représenter des nombres de façon concrète	**L'élève :** • estime des quantités d'objets données; • utilise des regroupements afin de comprendre les quantités exprimées (p. ex., 10 dizaines = 1 centaine, 4 quarts = 1 entier, 10 centièmes = 1 dixième); • reconnaît, compare, représente et utilise des quantités (p. ex., quantités représentées par les nombres de 1 à 100, par des fractions simples dont le dénominateur est généralement inférieur à 12 et par des nombres décimaux aux centièmes); • reconnaît et détermine des représentations équivalentes de nombres en utilisant du matériel concret (p. ex., 153 = 150 + 3, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{10}$ = 0,2 et 0,30 = 0,3).
Étape 3 – Formalisation Compréhension de la quantité représentée par les nombres et des représentations symboliques équivalentes à cette quantité	**L'élève :** • utilise régulièrement des repères pour établir des relations entre les nombres; • compare les nombres en utilisant leur représentation symbolique (p. ex., à l'aide de la valeur de position, en utilisant le sens de la fraction); • reconnaît l'équivalence entre des représentations symboliques (p. ex., $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ = 25 %, $\frac{75}{100}$ = 0,75 = 0,7 + 0,05); • reconnaît la différence entre une estimation et une valeur exacte.
Étape 4 – Consolidation Facilité à utiliser les relations entre les nombres dans une variété de situations	**L'élève :** • utilise, compare, reconnaît et décrit les nombres indépendamment de la notation utilisée; • utilise des équivalences entre diverses notations d'une quantité (p. ex., nombre naturel, fraction propre, fraction impropre, nombre fractionnaire, nombre décimal, pourcentage) pour résoudre des problèmes; • détermine avec exactitude ou approximativement la valeur d'une quantité, selon le contexte, en utilisant diverses stratégies; • a une compréhension des principes sous-jacents aux notations (p. ex., système de valeur de position applicable aux nombres naturels et aux nombres décimaux, le rôle du numérateur et du dénominateur afin de déterminer la grandeur d'une fraction).
Étape 5 – Polyvalence Habileté à manipuler les nombres avec souplesse	**L'élève :** • reconnaît naturellement la grandeur relative des nombres; • choisit et utilise la représentation d'un nombre la plus appropriée pour une situation donnée.

Le tableau 2 qui suit décrit les étapes de développement du sens des opérations. Il importe de lier le sens des opérations à l'ensemble de nombres avec lequel les élèves effectuent les opérations. Par exemple, un ou une élève peut être en mesure d'effectuer les opérations de base avec les fractions à l'aide de matériel concret (étape 2) tout en étant capable d'effectuer les opérations de base avec les nombres naturels en utilisant des stratégies personnelles (étape 3). La progression d'une étape à l'autre peut aussi se faire à un rythme différent selon les opérations. Ainsi, un ou une élève peut, par exemple, être à l'étape 4 avec les opérations d'addition et de soustraction de nombres naturels, mais à l'étape 3 avec les opérations de multiplication et de division de ces mêmes nombres.

Tableau 2 — Échelle de développement du sens des opérations

Étapes	Exemples de comportements observables
Étape 1 – Initiation Compréhension intuitive du sens des opérations arithmétiques de base	**L'élève :** • associe chacune des opérations de base à une action (p. ex., l'addition à un ajout, la soustraction à un retrait, la multiplication à la réunion de groupes égaux et la division à un partage en groupes égaux).
Étape 2 – Représentation concrète Habileté à effectuer concrètement les opérations	**L'élève :** • effectue les opérations à l'aide de matériel concret; • reconnaît quelques relations entre les opérations (p. ex., la soustraction est l'opération inverse de l'addition); • possède et utilise un répertoire limité de faits numériques de base; • peut anticiper l'ordre de grandeur du résultat d'une opération.
Étape 3 – Formalisation Habileté à effectuer les opérations en utilisant des stratégies personnelles et des algorithmes usuels	**L'élève :** • reconnaît la ou les opérations à effectuer pour résoudre des problèmes simples; • possède et utilise une variété de stratégies pour effectuer les opérations et évalue la vraisemblance du résultat; • connaît et utilise les faits numériques de base; • effectue mentalement des calculs simples; • reconnaît certaines des propriétés des opérations.
Étape 4 – Consolidation Facilité à utiliser efficacement les opérations dans une variété de situations	**L'élève :** • résout des problèmes complexes avec les opérations; • utilise le raisonnement proportionnel pour résoudre des problèmes simples; • possède un grand répertoire de stratégies de dénombrement, de comparaison, d'estimation et de calcul; • choisit une stratégie de calcul appropriée dans une situation donnée (p. ex., recours au calcul mental, à un algorithme usuel ou personnel, à la calculatrice ou à l'ordinateur); • distingue les situations qui nécessitent une réponse approximative de celles qui nécessitent une réponse exacte; • comprend et utilise les propriétés des opérations.
Étape 5 – Polyvalence Habileté à utiliser les opérations avec souplesse	**L'élève :** • choisit la notation des nombres la plus appropriée en fonction de l'opération à effectuer (p. ex., $\frac{3}{4}$, 0,75 ou 75 %); • utilise le raisonnement proportionnel pour résoudre des problèmes complexes; • choisit naturellement une stratégie de calcul efficace et peut justifier le choix et l'efficience de la stratégie utilisée.

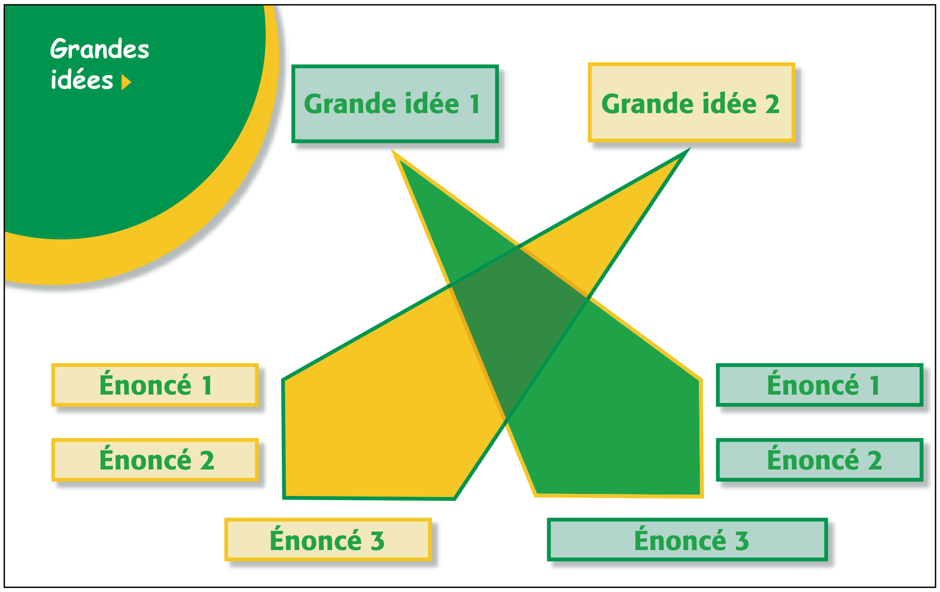
Au cycle primaire, les élèves acquièrent généralement une compréhension des nombres naturels et des quatre opérations de base sans toutefois saisir pleinement toute la complexité de ces concepts. Le développement du sens du nombre et du sens des opérations se poursuit aux cycles moyen et intermédiaire avec l'étude des grands nombres naturels, des fractions et des nombres décimaux.

À la fin du cycle moyen, les élèves n'auront pas atteint l'étape de la polyvalence pour tous les concepts liés aux nombres ou aux opérations. La progression se poursuit en 7e et 8e année, et ce, particulièrement en ce qui a trait aux fractions, aux rapports et aux nombres décimaux. L'objectif à long terme de l'enseignant ou de l'enseignante est de consolider la compréhension des élèves et de les amener à faire preuve de plus de souplesse dans l'utilisation des nombres et des opérations.

Grandes idées[4]

Lorsque les enseignantes et enseignants disposent d'un programme-cadre structuré, axé sur les concepts essentiels en mathématiques et, en outre, fondé sur les grandes idées, ils peuvent déterminer la composition de leçons susceptibles de favoriser l'apprentissage de ces concepts mathématiques importants.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 21)



Les attentes et les contenus d'apprentissage du programme-cadre de mathématiques font appel à un grand nombre de concepts. Les grandes idées permettent à l'enseignant ou l'enseignante de voir comment ces concepts peuvent être regroupés pour planifier une programmation plus efficace de l'enseignement. Ce faisant, l'enseignant ou l'enseignante est en mesure d'élaborer des situations d'apprentissage cohérentes qui permettent aux élèves :

- d'explorer les concepts en profondeur;
- d'établir des liens entre les différents concepts;
- de reconnaître que les mathématiques forment un tout cohérent et non un éventail de connaissances disparates.

Une grande idée est l'énoncé d'une idée fondamentale pour l'apprentissage des mathématiques, une idée qui lie de nombreuses connaissances mathématiques en un tout cohérent.

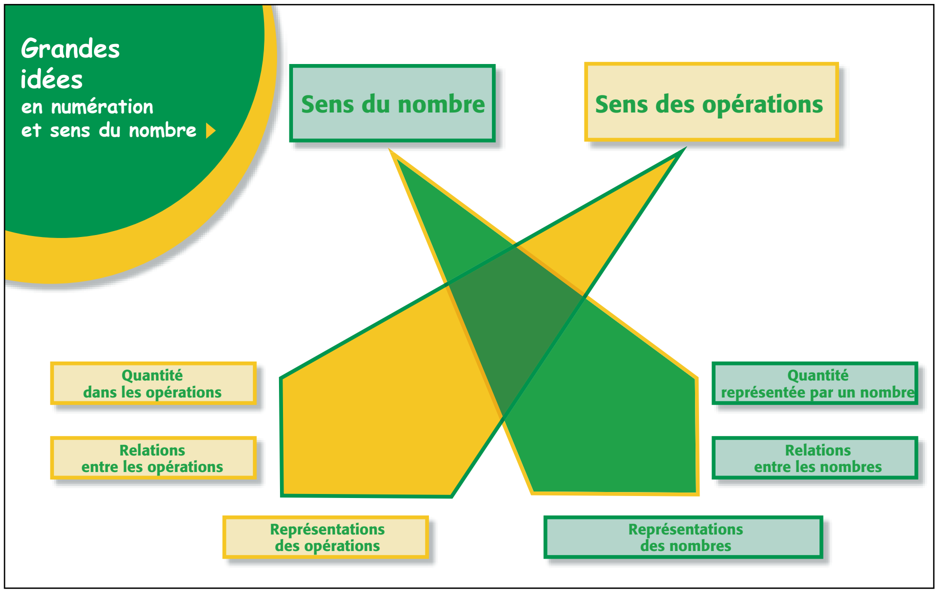
(Charles, 2005, p. 10, traduction libre)

4. Pour obtenir plus de détails au sujet du concept de grandes idées, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 43).

Dans les sections suivantes, les deux grandes idées en numération et sens du nombre sont étayées chacune par trois énoncés. Ces deux grandes idées représentent les fondements de l'apprentissage en numération et sens du nombre et sont abordées en fonction des nombres naturels (fascicule 1), des fractions (fascicule 2) et des nombres décimaux et des pourcentages (fascicule 3).

GRANDES IDÉES EN NUMÉRATION ET SENS DU NOMBRE

> *Le fait de relier la connaissance des contenus mathématiques à un nombre restreint de grandes idées permet de développer une compréhension solide des mathématiques.*
>
> (Charles, 2005, p. 10, traduction libre)



Aperçu

Les deux grandes idées qui constituent la base des attentes du domaine Numération et sens du nombre de la 4^e à la 6^e année sont le sens du nombre et le sens des opérations.

Grande idée 1 – Sens du nombre

Le sens du nombre permet de comprendre les nombres qui nous entourent et de les traiter avec discernement.

Énoncé 1 – Quantité représentée par un nombre
Comprendre la quantité, c'est développer un sens du « nombre-de… » ou encore du « combien-il-y-a-de… ».

Énoncé 2 – Relations entre les nombres
Établir des relations, c'est reconnaître des liens entre les nombres afin de mieux en saisir le sens.

Énoncé 3 – Représentations des nombres
Passer d'une représentation d'un nombre à une autre permet de mieux comprendre les nombres.

Grande idée 2 – Sens des opérations

Le sens des opérations permet de choisir les opérations à effectuer et de les exécuter efficacement selon la situation donnée.

Énoncé 1 – Quantité dans les opérations
Comprendre les opérations permet d'en reconnaître les effets sur les quantités.

Énoncé 2 – Relations entre les opérations
Comprendre les propriétés des opérations et les relations entre ces opérations permet de les utiliser avec plus de souplesse.

Énoncé 3 – Représentations des opérations
Connaître une variété de stratégies pour effectuer les opérations permet de les utiliser avec efficacité selon le contexte.

En numération et sens du nombre, les élèves utilisent des modèles pour donner un sens aux nombres et aux opérations. Au cœur des modèles se retrouve le sens du nombre, c'est-à-dire la représentation de relations entre les nombres et le développement des processus fondamentaux. Pour plus de détails, voir *Modèles mathématiques* (p. 10-12).

Les deux grandes idées sont à la fois complémentaires et interdépendantes, l'une ne pouvant exister sans l'autre. Avoir le sens du nombre, c'est comprendre les nombres, ce qu'ils représentent. Cette compréhension est essentielle pour saisir ce qui arrive aux nombres en cours d'opérations. L'objectif du domaine Numération et sens du nombre est de faire en sorte que les élèves utilisent leur sens du nombre en relation avec leur sens des opérations pour résoudre des problèmes.

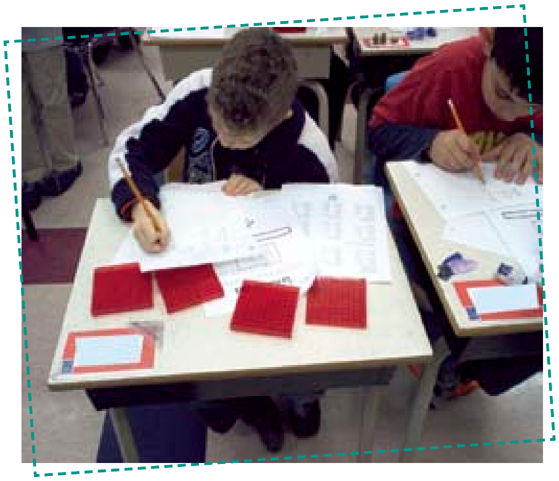
Chacune des grandes idées est explorée en fonction d'énoncés de thématique similaire : quantité, relation et représentation. La similitude des énoncés n'est pas un hasard. En effet, les énoncés permettent de reconnaître les notions essentielles dans l'apprentissage de la numération, soit comprendre la quantité, c'est-à-dire *le combien*, reconnaître des relations entre les nombres et les opérations et enfin, démontrer de la souplesse dans la représentation et l'utilisation des nombres et des opérations.

L’enseignement en numération et sens du nombre, basé sur les grandes idées, vise à créer des liens et à développer une vision plus globale des nombres. Précisons que ces grandes idées ainsi que leurs énoncés ne se limitent pas à un ensemble de nombres. Par exemple, le fait qu’un nombre peut être représenté de différentes façons n’est pas le propre des nombres décimaux, mais s’applique aux nombres en général. C’est pourquoi les grandes idées et les énoncés sont traités dans chacun des trois fascicules qui composent le présent guide.

Tous les individus doivent développer un sens du nombre et un sens des opérations solides pour pouvoir résoudre des problèmes. Afin de permettre ce développement chez les élèves, l’enseignant ou l’enseignante doit garder en tête l’importance de ces grandes idées. Dans le programme-cadre, le sens du nombre et le sens des opérations ne sont pas précisés dans les attentes et les contenus d’apprentissage puisqu’ils doivent être le fil conducteur et même la toile de fond de l’enseignement en numération et sens du nombre.

Portant sur les grandes idées du domaine Numération et sens du nombre reliées aux nombres naturels, le présent fascicule comprend :

- une description des énoncés qui sous-tendent chacune des deux grandes idées;
- des exemples d’activités qui permettent aux élèves d’établir des liens entre des concepts liés aux nombres naturels et des expériences de la vie quotidienne, des concepts dans les autres domaines des mathématiques et dans les autres matières;
- des exemples de professions qui nécessitent une bonne connaissance des nombres naturels;
- le cheminement de l’élève en matière de vocabulaire et d’habiletés relatifs aux nombres naturels;
- une situation d’apprentissage pour chaque année d’études.



GRANDE IDÉE 1 - SENS DU NOMBRE

> *Un message important ressort des recherches : les facettes individuelles du sens du nombre sont reliées entre elles et reposent sur un solide développement conceptuel. La nature complexe d'interrelations et de concepts de haut niveau du sens du nombre suggère que celui-ci ne peut être circonscrit à l'intérieur d'un chapitre d'un manuel ou d'une unité d'apprentissage. Le sens du nombre est davantage une façon d'enseigner qu'un thème à être enseigné.*
>
> (Van de Walle et Bowman Watkins, 2003, p. 146, traduction libre)

Aperçu

Le développement du sens du nombre chez les éleves doit servir de toile de fond dans l'enseignement du domaine Numération et sens du nombre. Le sens du nombre est un concept difficile à définir, puisqu'il ne s'agit pas de connaissances particulières, mais plutôt d'une vue d'ensemble sur les nombres. Il est possible de voir le sens du nombre comme étant « une bonne intuition des nombres et de leurs relations qui se développe graduellement, en explorant les nombres, en les visualisant dans une variété de contextes et en les reliant de diverses façons » (Howden, 1989, p. 11, traduction libre).

En d'autres termes, avoir le sens du nombre, c'est pouvoir reconnaître les nombres, déterminer leurs valeurs relatives et en comprendre l'utilisation, en divers contextes, qu'il s'agisse de s'en servir pour compter, mesurer, estimer ou effectuer des opérations. Il s'agit donc d'une compréhension relationnelle profonde des nombres, qui suppose plusieurs idées, relations et habiletés différentes.

Le sens du nombre se manifeste ou peut être « observé » en situations mathématiques. Les élèves ayant un sens du nombre développé sont conscients de l'importance du contexte dans l'utilisation des nombres. Ils peuvent plus facilement estimer des quantités et le résultat de calculs, et porter un jugement sur les nombres à la suite d'un calcul et en saisir l'utilisation en contexte. Ils sont en mesure de reconnaître diverses relations et de se représenter les nombres afin de s'en servir dans divers contextes.

En bas âge, les enfants comptent, apprennent à déterminer des quantités, à reconnaître des liens entre les quantités et les nombres, et ce, dans de nombreux contextes. Au cycle primaire, les élèves explorent les nombres naturels et progressent jusqu'à pouvoir comprendre le sens des nombres inférieurs à 1 000. Ils développent une intuition de la grandeur relative des nombres en les comparant et en approfondissant le sens de la valeur de position. Ils ont aussi l'occasion d'explorer le sens des fractions reliées aux demis, aux tiers et aux quarts.

Au cycle moyen, le développement du sens du nombre se poursuit avec le traitement de grands nombres ainsi que de divers types de nombres en relation les uns avec les autres. Les élèves approfondissent l'utilisation des fractions et explorent les nombres décimaux et les pourcentages. Le sens du nombre qu'ils ont bâti autour des nombres naturels s'enrichit alors avec l'utilisation de diverses notations des nombres.

Le sens du nombre est une façon de penser, de voir les nombres, de pouvoir les « manipuler » pour en saisir le sens et les utiliser efficacement. Il ne peut être enseigné ou montré en tant que tel. Toutefois, pour que les élèves développent leur sens du nombre, l'enseignant ou l'enseignante doit leur faire vivre une variété d'activités de manipulation, d'exploration, de représentation, de construction, de visualisation, de communication et de résolution de problèmes.

La section suivante explicite comment les élèves peuvent acquérir le sens du nombre en fonction des **nombres naturels**.

Grande idée 1 – Sens du nombre

Le sens du nombre permet de comprendre les nombres qui nous entourent et de les traiter avec discernement.

Énoncé 1 – Quantité représentée par un nombre
Comprendre la quantité, c'est développer un sens du « nombre-de… » ou encore du « combien-il-y-a-de… ».

Énoncé 2 – Relations entre les nombres
Établir des relations, c'est reconnaître des liens entre les nombres afin de mieux en saisir le sens.

Énoncé 3 – Représentations des nombres
Passer d'une représentation d'un nombre à une autre permet de mieux comprendre les nombres.

Énoncé 1 - Quantité représentée par un nombre

> Comprendre la quantité, c'est développer un sens du « nombre-de… » ou encore du « combien-il-y-a-de… ».

Les enfants doivent comprendre les nombres pour pouvoir donner un sens à leurs divers usages au quotidien.

(National Council of Teachers of Mathematics, 1992, p. 38, traduction libre)

Chaque enseignant ou enseignante souhaite que ses élèves atteignent un seuil de connaissances mathématiques suffisant pour être fonctionnels dans la société. Puisqu'on ne peut parler de numératie sans traiter de chiffres et de nombres, il devient primordial que les élèves comprennent la signification de ces chiffres et de ces nombres en relation avec les quantités qu'ils représentent. Le concept de quantité permet aux élèves d'associer la valeur à un nombre et de saisir le « combien » il représente.

Au cycle primaire, plusieurs éléments sont à la base du concept de quantité. Ces éléments sont traités en détail dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3^e^ année – Numération et sens du nombre* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005). Au début de leur apprentissage des mathématiques, les élèves apprennent à identifier une quantité d'objets en les comptant un à la fois. Par ce dénombrement, ils associent alors le nom du nombre au rang de l'objet en utilisant la correspondance de un à un. Avec l'expérience, les élèves assimilent le cardinal du nombre et reconnaissent que le dernier nombre nommé correspond au nombre d'éléments total de l'ensemble. Ils sont de plus en plus aptes à établir le lien entre une quantité et le nombre qui la représente. Le concept de regroupement qui veut qu'un objet en englobe plusieurs – par exemple, une dizaine représente un ensemble de 10 – est un concept complexe à saisir. En dépit du temps octroyé à ce concept en début de scolarisation, le transfert à d'autres regroupements ne se fait pas si facilement. En effet, la capacité à reconnaître qu'une (1) centaine comprend 100 unités et correspond aussi à 10 dizaines d'unités ne s'acquiert pas facilement. Certaines de ces acquisitions se font vers la fin du cycle primaire alors que d'autres se poursuivent et évoluent au cycle moyen.

Le développement du sens de la quantité, au cycle moyen, est relié à quatre éléments importants :

- représentation mentale;
- contexte;
- repères;
- approximation.

La situation suivante, tirée de la vie quotidienne, permet d'illustrer le sens de ces quatre éléments. Un stylo dont le prix habituel est 1,10 $ est soldé à 73 ¢. L'**approximation** du prix à 75 ¢ permet de manipuler plus facilement cette quantité et de se faire une **représentation mentale** du coût à l'aide de trois pièces de 25 ¢. Le montant de un dollar (1 $), qui sert de **repère**, est mis en relation avec celui de 75 ¢, et permet de conclure que le stylo n'est pas très cher, puisque le prix demandé est inférieur à 1 $. De plus, le **contexte** permet de voir qu'il s'agit d'une aubaine, puisque le stylo est en solde.

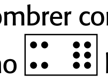
Chacun de ces quatre éléments est présenté plus en détail dans ce qui suit.

REPRÉSENTATION MENTALE

La représentation mentale d'une quantité est l'image, élaborée par la pensée, qu'on se fait d'un nombre. Lorsque les élèves entendent et lisent un nombre, ils doivent « voir » la quantité que représente ce nombre et en comprendre le « combien ». Il est donc important qu'ils aient des représentations mentales de différents nombres dans différents contextes. Prenons, par exemple, le nombre « 50 », qu'on peut se représenter mentalement par 5 regroupements de 10 objets, par 2 pièces de 25 ¢, par 4 douzaines d'œufs plus 2 œufs, par la moitié de un mètre (50 cm) ou encore par l'âge de grand-papa.

Il est important que les élèves se fassent des représentations mentales variées des nombres. Ces visualisations peuvent représenter simplement des quantités. Par exemple, le « combien » de 100 peut engendrer une représentation mentale de 10 groupes de 10 objets ou d'une planchette de 100 petites unités. Cependant, la présence d'unités dans une situation peut favoriser une représentation mentale différente et plus précise, laquelle serait en relation avec une situation donnée. Par exemple, les élèves peuvent visualiser que 100 personnes, ce sont 10 personnes assises autour de 10 tables ou encore l'ensemble des élèves de 4 classes.

De plus, si le contexte le suggère, les élèves peuvent porter un regard critique sur la quantité (p. ex., déterminer si celle-ci est « beaucoup » ou « peu »). La représentation mentale sera alors teintée par le contexte. Par exemple, la représentation mentale de 100 personnes à une fête familiale n'est pas la même que celle de 100 personnes dans une foule à l'occasion d'un match de hockey. Les diverses représentations mentales sont toutes valables; elles dépendent essentiellement du contexte de la situation et du sens du nombre qu'ont les élèves. La représentation mentale demeure personnelle, mais l'aisance avec laquelle un individu peut visualiser les nombres est un indicateur de son sens du nombre.

Afin de développer des représentations mentales, les élèves utilisent différentes stratégies qui répondent à des situations et à des besoins variés. Avec de très petits nombres, il est possible pour eux d'utiliser la reconnaissance globale, c'est-à-dire quantifier les éléments d'un petit ensemble d'objets donné sans en dénombrer chacun des éléments. Par exemple, si on montre les binettes suivantes aux élèves ☺ ☺ ☺ ☺, ils peuvent reconnaître globalement qu'il y en a 4. Une certaine organisation ou disposition peut aider à déterminer un plus grand nombre d'éléments sans tout dénombrer comme sur un dé  ou sur une assiette à pois . En examinant un domino  les élèves peuvent utiliser la reconnaissance globale du 4 et du 6, pour ensuite exécuter mentalement l'addition et finalement trouver la quantité totale de 10.

Pour reconnaître de plus grandes quantités, les élèves auront recours à d'autres stratégies. Par exemple, il peut être laborieux de dénombrer chaque pois d'un paquet de petits pois; le regroupement peut alors être utilisé.

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • • •
• • • • • • • • • •

Ainsi, après en avoir dénombré 10, ils peuvent constater qu'il y a 3 ensembles égaux pour un total de 30 pois. Dans ce cas, la stratégie du dénombrement (10) est combinée avec la stratégie de reconnaissance globale (3 ensembles). En cheminant, les élèves utilisent de plus en plus le regroupement pour comprendre la quantité. Ainsi, les élèves se créeront des représentations mentales en visualisant des regroupements égaux, par exemple, en visualisant 30 comme 3 ensembles de 10 pois.

La représentation mentale de grands nombres peut difficilement se faire en reconnaissant individuellement les éléments. Elle pourra cependant être créée en utilisant des repères (voir *Repères*, p. 33-35) qui seront mis en rapport avec une grande quantité (p. ex., reconnaître que 600 élèves c'est environ deux fois le nombre d'élèves de son école).

CONTEXTE

Le contexte est l'ensemble des informations entourant une situation donnée. Ces informations aident à cerner la situation dans laquelle les quantités sont utilisées et facilitent l'exercice d'un regard critique sur les nombres en question. En outre, le contexte facilite l'établissement de liens entre les nombres, les concepts mathématiques et le monde mathématisé. Pour toutes ces raisons, on préconise l'exploration des mathématiques en situation de résolution de problèmes.

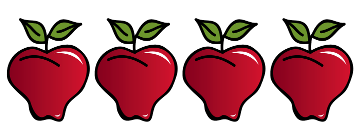
Que veut dire 214 au juste? On parle de 214 « quoi »? Bref, un nombre sans contexte a peu de sens. C'est pourquoi on doit lui adjoindre des unités (214 jetons, personnes, billes, centimètres…) si on veut qu'il soit compris. Les élèves du cycle primaire ont déjà réalisé des activités avec les nombres dans différents contextes en utilisant diverses unités. Au cycle moyen, on doit maintenir cette contextualisation afin de développer le sens des quantités, et ce, avec des nombres dans les milliers et les millions.

Un pas important à franchir est d'amener les élèves à comprendre que le même nombre représente la même quantité même si les contextes sont différents. Le nombre n'est qu'une représentation symbolique de la quantité. Si l'on a 1 000 pommes, 1 000 battements de cœur ou 1 000 immeubles, la quantité qu'est le regroupement de mille ne change pas. Pourtant, si on demande aux élèves s'ils croient qu'il y a plus de pommes que d'immeubles, un bon nombre risque de répondre qu'il y a plus d'immeubles que de pommes. Ils se sont attardés à l'espace occupé par les objets plutôt qu'à la quantité d'objets (1 000).

Il faut aussi que les élèves reconnaissent que selon le contexte de la situation donnée, différentes interprétations peuvent être dégagées d'une même quantité. Par exemple, pour des jeunes, une somme de 100 $ peut représenter beaucoup d'argent. Cependant, en contexte, le sens du nombre invite à nuancer : c'est beaucoup pour le prix d'un chandail, mais peu pour celui d'une bicyclette neuve. Le contexte change, mais la quantité demeure inchangée. De même, 100 000 blocs de bois représentent beaucoup de blocs, alors que 100 000 cheveux sur la tête équivalent à une chevelure moyenne. Ou encore, les élèves peuvent considérer que 13 ne représente pas une grande quantité, mais si on ajoute qu'il est le nombre de nos frères et sœurs, il prend une tout autre valeur. Ces exemples concrets et simples incitent à réfléchir et à analyser les quantités de façon critique.

Au cycle moyen, la compréhension des nombres en contexte devient de plus en plus importante. Les élèves doivent commencer à porter des jugements critiques quant aux quantités et à faire preuve de discernement par rapport aux nombres. Les activités d'apprentissage doivent donc aider les élèves à développer d'autres habiletés, telles que reconnaître la vraisemblance d'un nombre donné, reconnaître qu'il s'agit d'une valeur exacte, ou au contraire, reconnaître qu'il s'agit d'un nombre approximatif provenant d'une estimation ou même d'un arrondissement. Le développement de ces habiletés peut être amorcé en ayant en classe des échanges sur le sens de nombres provenant de journaux et en discutant de leur signification réelle et de leur pertinence. L'activité *J'aime ma ville* (p. 153-155) permet de voir l'exploration du contexte en lien avec les habiletés dans le domaine Traitement des données et probabilité.

Le contexte permet aussi de reconnaître qu'un même nombre n'a pas toujours le même sens. En effet, lorsqu'il est question de nombres, l'interprétation courante les associe à la quantité, soit aux nombres cardinaux. Pourtant, en examinant le contexte, on remarque que certains nombres ne représentent pas des quantités, mais une position. C'est le cas des nombres ordinaux. Par exemple, dans une série, l'objet à la position 4 ne compte pas *4 objets*. Le chiffre 4 indique la position d'un seul objet dans la série donnée. C'est le 4^{e}. Les chiffres et les nombres sont aussi utilisés comme code d'identification. Les numéros d'assurance sociale, de codes à barres, de plaques d'immatriculation et d'adresses appartiennent à cette catégorie.



4 pommes

nombre cardinal

La 4^{e} reliure à anneaux est rouge

nombre ordinal

Le chandail n^{o} 4

code

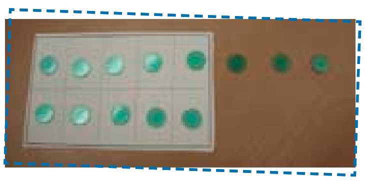
REPÈRES

De façon générale, un repère est une marque, un jalon, un élément de référence. Dans le cadre du développement du sens du nombre, l'utilisation de repères favorise la représentation mentale et, de ce fait, facilite la compréhension du nombre et de la notion du « combien ». Les repères, sans lesquels il est difficile de comprendre la quantité, sont des nombres ou des quantités aisément représentables mentalement puisque ceux-ci ont déjà été vus et manipulés. Les élèves auront de la difficulté à comprendre la quantité s'ils n'utilisent pas de repères. Par exemple, en lisant un extrait d'un livre de records, les élèves voient des nombres associés à du texte. Ils saisissent que les quantités mentionnées sont d'un ordre de grandeur impressionnant, mais souvent n'ont pas le sens véritable de ces quantités, puisqu'ils n'établissent pas de lien entre ces nombres et des repères significatifs pour eux. Tel est le cas d'un ou d'une élève qui lit l'extrait suivant :

> ***Le nouveau-né le plus lourd***
>
> *Le 19 janvier 1879, la Canadienne Anna Bates […] accoucha chez elle […] d'un petit garçon qui pesait 10,8 kg et mesurait 76 cm.*
>
> (Guinness World Records, 2005, p. 22)

L'élève réagit et trouve ce fait extraordinaire, cependant il n'a pas mis la quantité 10,8 kg en relation avec des repères. Ce fait est extraordinaire, car c'est un « record », mais l'élève ne saisit pas qu'il s'agit probablement de plus du double de son poids à sa naissance ou ce que représente réellement un bébé de 10,8 kg.

Au cycle primaire, les élèves saisissent davantage le sens de la quantité grâce à des points d'ancrage comme 5 et 10. À la suite d'activités appropriées, les élèves savent qu'il est plus rapide de faire des groupes de 5 ou de 10 que de compter par 1. Ainsi, 13 est 3 de plus que 10, alors que 7 est 2 de plus que 5, mais aussi 3 de moins que 10. Les nombres 5 et 10 commencent alors à être utilisés comme repères.



En progressant vers des nombres plus grands, de nouveaux repères viendront s'ajouter au 5 et au 10. À la suite d'expériences (p. ex., étude de la monnaie, compte par intervalles de 25, 50 et 100) et d'apprentissages (p. ex., intériorisation de relations telles que $4 \times 25 = 100$, $100 = 2 \times 50$, $2 \times 2 \times 25 = 100$), les nombres tels que 25, 50 ou 100 peuvent devenir des repères. Ainsi, 32 peut être compris comme 25 plus 7 ou 25 plus 5 plus 2, et le nombre 125 peut être rapidement associé à 5 groupes de 25.

Autres observations, les élèves au cycle primaire ont réalisé diverses activités comme amasser 100 objets (trombones, attaches de sac à pain), célébrer le 100e jour d'école ou manipuler le matériel de base dix. Ainsi, ils ont eu l'occasion de développer divers repères pour pouvoir se représenter mentalement la quantité 100, et ce, dans diverses situations et divers contextes. Bien que la majorité des élèves qui arrivent en 4e année sachent lire et écrire symboliquement les nombres jusqu'à 1 000, ils ne comprennent pas nécessairement la quantité représentée par ces grands nombres. C'est en créant des repères et en visualisant des regroupements qu'ils développeront une meilleure compréhension du concept de quantité représentée par de grands nombres. Par exemple, l'enseignant ou l'enseignante qui demande aux élèves d'écrire un texte de 300 mots doit les aider à se représenter un texte de 300 mots. Il ou elle leur remet des pages de textes de différentes longueurs, leur demande d'estimer le nombre de mots que contient leur texte et de comparer leur texte à un autre texte. Ensuite, ils sont invités à déterminer ce qu'aurait l'air un texte de 300 mots en utilisant la même police et la même grandeur de police que celui de leur texte. Les élèves se créent alors des repères pour une quantité de mots (p. ex., une ligne imprimée – Arial 12 – contient généralement environ 15 mots).

Les repères sont particulièrement utiles pour comprendre les grands nombres, puisqu'il est généralement impossible de reconnaître globalement ces quantités ou de les saisir par le dénombrement. Les élèves doivent alors s'en faire une idée en la comparant avec un repère. Par exemple, l'école vient de recevoir 10 000 feuilles pour des photocopies. Le concierge devrait-il demander de l'aide pour les transporter? Afin que les élèves puissent vraiment comprendre la situation et la quantité en jeu, ils doivent se créer une image mentale de ce que 10 000 feuilles peuvent représenter. En utilisant un paquet de 500 feuilles comme repère, ils peuvent imaginer cette quantité

et appliquer la relation de proportionnalité pour déduire que 2 paquets contiennent 1 000 feuilles. Donc, 10 000 feuilles, ce sera 10 fois plus de paquets, soit 20 paquets de feuilles. On peut même reconnaître que 20 paquets équivalent à 2 boîtes de papier. La représentation mentale de l'espace qu'occupent ces 10 000 feuilles devient alors possible. Et la réponse à la question de départ, à savoir si le concierge devrait demander de l'aide pour transporter les feuilles, peut alors être débattue en toute connaissance de cause.

Les élèves doivent s'approprier des repères afin d'y avoir plus facilement recours selon le contexte et les nombres traités. Il n'existe pas de liste de repères. Ceux-ci sont personnels et proviennent des expériences vécues par tout un chacun. Toutefois, les situations de la vie courante fournissent à l'enseignant ou à l'enseignante suffisamment d'occasions d'attirer l'attention de leurs élèves sur la quantité et la création de repères. Par exemple, dans un texte, les élèves lisent : « La tour de Pise compte 293 marches ». Les élèves imaginent beaucoup de marches, mais n'ont aucune idée du sens de ce « beaucoup ». Voilà l'occasion de discuter du sens de ce nombre de marches tout en leur faisant développer le sens de la quantité. Que peuvent bien représenter 293 marches? Est-ce beaucoup de marches? La tour est-elle très haute? Les touristes qui visitent la tour ont-ils assez d'endurance pour se rendre jusqu'en haut? On peut utiliser différents repères afin de les aider à se faire une idée; par exemple, *je monte environ 20 marches pour me rendre au premier étage de l'école; monter 20 marches tranquillement me prend 30 secondes; j'ai déjà monté 4 étages d'environ 20 marches chacun, et j'étais épuisé*. En échangeant sur le sens de la quantité, les élèves utilisent leurs connaissances mathématiques pour porter des jugements sur les nombres qui les entourent.

APPROXIMATION

Les nombres ont été créés pour représenter des quantités avec un haut degré d'exactitude. En effet, ils apportent une précision que des termes comme « plus », « quelques », « des », « beaucoup » et « peu » ne donnent pas. Cependant, on peut aussi les employer pour montrer un certain ordre de grandeur de cette quantité. Dans ce cas, le nombre est utilisé pour représenter approximativement la quantité (p. ex., environ 200 personnes étaient à la fête ne signifie pas qu'il y en avait exactement 200). En général, l'approximation est une grandeur suffisamment près d'une grandeur connue (arrondissement) ou inconnue (estimation).

Les termes « arrondissement » et « estimation » sont souvent utilisés, à tort, de façon interchangeable. La différence fondamentale entre ces deux concepts réside dans la provenance du nombre. L'estimation provient de la relation entre une quantité inconnue et des connaissances antérieures, généralement sous forme de repères. L'arrondissement, lui, provient de la relation entre un nombre connu (précis ou approximatif) et sa proximité relative à d'autres nombres. Généralement, les estimations et les arrondissements servent à brosser un « portrait » plus clair de la quantité en question et à transmettre un sens de l'ordre de grandeur du nombre. Le tableau suivant, qui traite de l'exemple du prix d'une voiture, montre cette distinction.

	Arrondir un nombre	Estimer une quantité
Définitions	Remplacer un nombre par une valeur appropriée à la situation, en suivant certains critères préétablis ou personnels.	Évaluer approximativement une quantité.
Exemples	Si le prix affiché d'une voiture neuve est 18 753 $, on peut dire qu'elle coûte environ 19 000 $.	En se promenant dans un stationnement, on remarque une voiture et on estime son prix à 20 000 $.
Explications	Le prix réel (nombre connu) a été arrondi au millier près.	Le prix ne repose sur aucune information précise reçue, mais sur des connaissances antérieures.

Estimation

L'estimation est un processus par lequel des informations visuelles et mentales servent à évaluer l'ordre de grandeur d'une quantité. Les estimations tiennent une place importante dans nos communications quotidiennes en nous donnant des quantités approximatives, soit par l'entremise des médias (p. ex., près de 10 000 personnes étaient au rassemblement) ou dans nos propres échanges (p. ex., les achats à l'épicerie coûtent environ 200 $ par semaine).

L'estimation est reliée à la fois au sens du nombre (estimer une quantité) et au sens des opérations (estimer le résultat d'une opération). Le rôle de l'estimation dans les opérations est abordé dans *Estimation du résultat d'une opération* (voir p. 92-96).

À l'instar de l'enseignement des concepts mathématiques en général, l'estimation doit être exploitée en contexte de résolution de problèmes. Afin de bien faire comprendre le concept d'estimation d'une quantité, il est même préférable de présenter des problèmes, dans lesquels seule l'estimation est recherchée (p. ex., « Environ combien de pages du dictionnaire dois-je lire pour parcourir les définitions de 1 000 mots? »). Parfois, il peut être valable de comparer les estimations à la quantité exacte afin d'examiner l'efficacité des stratégies d'estimation et la précision des estimations. Toutefois, cette opération ne devrait pas s'effectuer systématiquement, faute de quoi les élèves ne verront pas la pertinence des estimations, puisque la réponse recherchée semble devoir être la quantité exacte.

Les élèves croient souvent qu'une estimation est une devinette ou encore qu'une seule estimation peut être considérée comme acceptable, alors que ce qui compte dans l'estimation, c'est l'ordre de grandeur et non le nombre. Une bonne estimation est un nombre qui définit grosso modo la quantité évaluée. Il est certain, toutefois, que l'efficacité à estimer démontre un bon sens du nombre. Il n'y a pas de règles définies pour y arriver ni de but à atteindre : le contexte de chaque problème et la grandeur des nombres détermineront le niveau acceptable de précision. Par exemple, une estimation d'environ 200 blocs ou d'environ 300 blocs est très acceptable lorsque la quantité réelle de blocs est de 220, alors qu'une estimation d'environ 1 000 serait le résultat d'une devinette ou d'une stratégie inefficace. En revanche, si la quantité réelle correspond à 2 434 blocs, des estimations d'environ 2 000, 2 050, 2 500 ou même 3 000 deviennent acceptables puisque l'écart entre l'estimation et la quantité exacte est négligeable compte tenu de la grandeur de la quantité réelle.

Dans des situations d'estimation, afin de préciser que le nombre représente une quantité approximative, il est important que les élèves communiquent l'estimation en utilisant un langage « d'approximation », tel que *environ, au moins, près de, un peu plus de, à peu près, plus ou moins* ou *entre*. Par exemple, *environ* 100 personnes étaient présentes à la soirée, il mesure *à peu près* 1,5 m, c'est *un peu moins de* 5 kg ou *un peu plus de* 20 000 $, il faudra *entre* 4 et 5 heures de route. Ces stratégies pédagogiques permettent d'éloigner l'impression qu'il existe une seule et unique « bonne » estimation et de reconnaître la valeur des diverses estimations ainsi que leur niveau de précision.

Afin d'estimer, il faut effectuer une comparaison entre la quantité à estimer et des repères. Par exemple, lors d'une compétition sportive, Rachelle et Oman se demandent combien il y a de partisans dans l'assistance. En y réfléchissant, ils peuvent utiliser un repère comme le rassemblement des 300 élèves de leur école au gymnase. Cette situation réelle connue les aide à se représenter mentalement un certain nombre de personnes dans un espace donné et à estimer, soit qu'il y ait moins de 300 personnes dans les gradins ou, au contraire, qu'il s'y trouve entre 300 et 600 partisans (2 fois plus) ou encore qu'on compte près de 1 000 personnes (3 fois plus). Il est important de savoir qu'en estimant avec des repères, les élèves appliquent un raisonnement proportionnel (pour plus de détails, voir *Relations de proportionnalité*, p. 49-54) entre un montant connu (300 élèves dans un certain espace) et un montant inconnu (le nombre de partisans dans un autre espace).

Il arrive que les élèves n'aient pas intégré de repères pour une situation donnée. Ils doivent donc employer une autre stratégie. Ils peuvent alors dénombrer un sous-ensemble d'objets et utiliser ce nombre comme repère pour estimer la quantité totale d'objets. Par exemple, si on leur demande d'évaluer combien il y a de billes dans un bocal, les élèves peuvent d'abord prendre une poignée de billes et les compter afin de pouvoir comparer cette quantité repère au contenu du bocal. Ils pourraient aussi dénombrer les billes dans le fond du bocal (10 billes noires) et ensuite, estimer combien il y a de rang de billes dans le bocal (environ 9) pour être en mesure d'estimer le nombre total de billes dans le bocal (90). Les élèves peuvent aussi séparer la quantité en sections et estimer la quantité dans chaque section.

Arrondissement

Tout comme l'estimation, l'habileté à arrondir exige analyse et réflexion. L'opération ne se limite pas à l'arrondissement d'un nombre donné à une certaine valeur de position; elle nécessite aussi l'évaluation du contexte dans lequel le nombre se trouve. Les activités qui visent l'habileté à arrondir doivent alors être faites en contexte afin qu'elles permettent de refléter une utilisation authentique de l'arrondissement, de donner un sens à cet apprentissage, sens qui sera transféré au bagage cognitif des élèves.

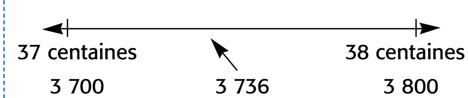
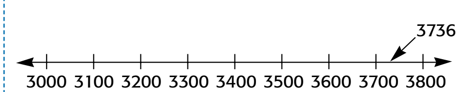
Dans la vie courante, la décision d'arrondir provient de l'interprétation d'une situation et non d'une consigne reçue. Puis, la situation et le nombre en cause sont évalués pour désigner une valeur de position de l'arrondissement (p. ex., doit-on arrondir à l'unité de mille près ou à la centaine près?). La prochaine étape consiste à retenir des nombres repères en fonction de la position choisie (p. ex., pour arrondir 3 620 à la centaine près, certains élèves reconnaîtront mentalement ou sur une droite numérique la progression des centaines – 3 000, 3 100, 3 200, 3 300, 3 400, 3 500, 3 600, 3 700 –, alors que d'autres verront d'emblée que 3 620 se situe entre 3 600 et 3 700). Ainsi, en reconnaissant le nombre le plus près du nombre en cause (3 620), les élèves seront en mesure de déterminer la valeur arrondie du nombre. La dernière étape est celle de la communication du nombre arrondi. Bien sûr, certaines étapes se font de façon intuitive et presque automatiquement. Cette aisance vient précisément du sens du nombre; en d'autres termes, c'est l'utilisation de nos connaissances qui soutient ces décisions.

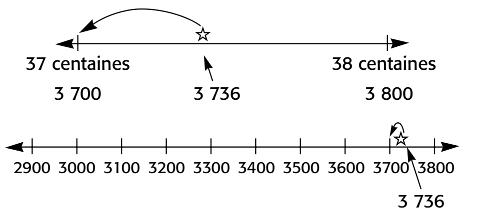
En salle de classe, souvent, plusieurs décisions ont déjà été prises pour les élèves. C'est alors que les élèves interviennent, par exemple, pour arrondir un nombre comme 2 365 à la dizaine près, à la centaine près et à l'unité de mille près, ou encore simplement pour déterminer si 365 est plus près de 300 ou de 400. Il serait profitable pour leur apprentissage que les élèves aient l'occasion de prendre l'ensemble des décisions entourant l'arrondissement d'un nombre. Cela favorise le développement de leur sens critique de l'utilisation des nombres et approfondit leur sens de l'arrondissement.

Voici une situation qui illustre le raisonnement au cours de l'arrondissement de nombres. Les informations supplémentaires offrent quelques pistes pédagogiques.

Il y a généralement entre 3 000 et 4 000 spectateurs à la salle de spectacle « La Scène ». À la suite du spectacle, le préposé à la billetterie fait le décompte et détermine qu'il y a eu 3 736 spectateurs. Il croise le directeur et décide de lui donner un aperçu des ventes de la soirée. Que dira-t-il au directeur?

Raisonnement au cours des arrondissements	Raisonnement du préposé
Décider d'effectuer un arrondissement Il est judicieux d'effectuer un arrondissement si le but est de communiquer une quantité en utilisant un nombre qui peut rapidement être significatif pour le destinataire.	Dans l'exemple, si le préposé veut communiquer l'idée de grandeur des ventes et non la quantité exacte, il peut alors arrondir le nombre. Cependant, s'il devait inscrire les nombres au grand livre de la comptabilité, il devrait alors utiliser le nombre exact.

Raisonnement au cours des arrondissements	Raisonnement du préposé
Déterminer à quelle valeur de position se fera l'arrondissement Il n'y a pas de règle quant au choix de la valeur de position. Cependant, le choix n'est pas arbitraire, car il dépend de l'interprétation de la situation et du sens du nombre de l'individu. Il est important de ne pas imposer systématiquement aux élèves d'arrondir à une certaine valeur de position, mais de discuter avec eux en donnant des exemples et des contre-exemples afin qu'ils comprennent comment effectuer un choix judicieux.	Si on vendait généralement entre 8 000 et 9 000 billets, l'arrondissement s'effectuerait à l'unité de mille près pour montrer qu'il y a une baisse importante des ventes. Dans l'exemple, le préposé décide d'arrondir à la centaine près étant donné que les ventes sont généralement entre 3 000 et 4 000 billets. S'il voulait que l'arrondissement donne un degré plus élevé de précision, il l'effectuerait à la dizaine près.
Déterminer des nombres repères en fonction du choix de la valeur de position Le repérage de nombres aide les élèves à voir le nombre en relation avec d'autres nombres. L'utilisation de droites numériques permet de mieux saisir le sens du nombre et de visualiser la grandeur relative du nombre. Le repérage des nombres en fonction du regroupement donne de l'importance au regroupement choisi et permet de trouver les bornes d'un intervalle approprié pour compléter l'arrondissement. Il s'agit de reconnaître qu'un nombre tel que 3 736 est situé entre le nombre de centaines du nombre en question (37) et la centaine suivante (38). 37 centaines ⟵ 3 736 ⟶ 38 centaines Le repérage peut aussi se faire en reconnaissant un ensemble de valeurs reliées à la position choisie (p. ex., 3 000, 3 100, ...). *Note* : Il est très important que les élèves utilisent l'ensemble des positions lorsqu'ils font des arrondissements. Par exemple, en cherchant à arrondir à la centaine près, certains ne retiendraient que le chiffre de la position en question et diraient, par exemple, que 3 736 se situe entre 7 centaines (700) et 8 centaines (800) et que donc l'arrondissement se fait à 700 (au lieu de 3 700).	Dans l'exemple, le préposé détermine que 3 736 est situé entre 3 700 et 3 800.  

Raisonnement au cours des arrondissements	Raisonnement du préposé
Arrondir le nombre Les élèves doivent saisir que l'arrondissement s'effectue à une valeur proche du nombre. Par exemple, 3 736 s'arrondit à la centaine près à 3 700, car il est plus près de 3 700 que de 3 800. *Note* : Par convention, si le nombre est équidistant de deux valeurs, l'arrondissement s'effectue habituellement à la valeur la plus élevée des deux valeurs. Par exemple, 3 750 s'arrondit à la centaine près à 3 800.	 Dans l'exemple, le préposé doit comprendre que 3 736 est entre 3 700 et 3 800, mais qu'il est plus près de 3 700. C'est pourquoi l'arrondissement se fera à 3 700.
Communiquer l'arrondissement Puisque l'arrondissement provient d'un contexte, la communication doit être faite en contexte.	Le préposé pourrait mentionner au directeur qu'il y avait environ 3 700 spectateurs, un peu plus de 3 700 spectateurs ou même près de 3 700 spectateurs. *Note* : Il serait faux d'affirmer qu'il y avait 3 700 spectateurs.

En classe, les activités doivent permettre aux élèves de développer l'ensemble des habiletés à arrondir. Il est important que l'enseignant ou l'enseignante nuance ses propos au cours des activités d'arrondissement pour ne pas orienter la réflexion des élèves vers une stratégie ou une réponse en particulier. Jusqu'à présent, il a été question des arrondissements à une valeur de position près. Cependant, l'action « d'arrondir », au quotidien, peut se faire dans un sens plus large. Par exemple, une collecte de fonds a recueilli 14 345 $, et l'article du journal titrera : « Quel succès, l'événement a permis d'amasser près de 15 000 $! » Dans ce cas, on s'est servi de l'arrondissement pour « rendre rond » un montant d'argent, afin que l'information soit comprise rapidement. Voici quelques exemples de stratégies d'arrondissement possibles.

Stratégies	Exemples
Définir un intervalle	S'il y a 3 736 personnes à un spectacle, on peut arrondir en disant qu'il y a entre 3 700 et 3 800 personnes.
Arrondir à un repère	Si chaque pomme coûte 44 ¢ et que nous en avons acheté une douzaine, on peut arrondir le prix à 50 ¢.
Arrondir en pensant à l'effet de l'arrondissement sur la quantité	Si on prépare des petits cadeaux pour chaque participant ou participante d'un concours, il est préférable d'en acheter un peu plus que le nombre de participants. Ainsi, s'il y a présentement 63 participants, on peut choisir d'arrondir à 70 et acheter 70 cadeaux afin de s'assurer d'en avoir suffisamment pour tous les participants.

Énoncé 2 - Relations entre les nombres

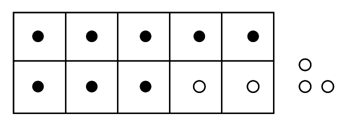
Établir des relations, c'est reconnaître des liens entre les nombres afin de mieux en saisir le sens.

Mettre l'accent sur des activités d'exploration des nombres, qui reposent d'abord sur la compréhension intuitive des élèves, accroît leurs compétences en mathématiques et, de ce fait, les aide à construire les relations numériques ainsi qu'à établir des liens entre leur monde et celui des mathématiques.

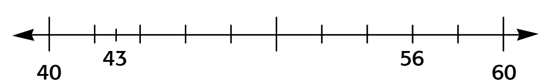
(National Council of Teachers of Mathematics, 1992, p. 38, traduction libre)

Au cycle primaire, les élèves développent leur sens du nombre en établissant diverses relations entre les nombres. À l'aide d'une variété d'outils et de stratégies, ils examinent, comparent, ordonnent et décomposent les nombres. Par exemple :

- ils utilisent un cadre à dix cases pour représenter l'ajout de 5 jetons à 8 jetons et, par conséquent, pour illustrer la stratégie de compléter la dizaine. Puisqu'il leur reste 3 jetons après avoir ajouté 2 jetons dans le cadre à dix cases, ils peuvent conclure que 8 + 5 = 10 + 3 = 13;



- ils utilisent une droite numérique pour comparer entre eux deux nombres comme 43 et 56 et aussi pour les comparer aux nombres environnants. Ainsi, en les situant sur une droite numérique, ils peuvent démontrer que 43 < 56 ou que 43 > 40;



- ils utilisent une grille de nombres pour découvrir des caractéristiques communes à certains nombres comme 17, 18 et 19. En les situant dans une grille de nombres, ils peuvent plus facilement constater que ces trois nombres sont composés d'une dizaine.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Afin d'accroître leur sens du nombre, les élèves du cycle moyen doivent « jouer avec les nombres », c'est-à-dire qu'ils doivent manipuler les nombres, les décomposer et les regrouper pour découvrir les principales caractéristiques de ces nombres et les relations qui existent entre eux. Ces activités permettent aussi aux élèves de découvrir plusieurs relations entre les opérations arithmétiques. Ces relations seront explorées plus en détail dans la grande idée 2 (voir *Énoncé 2 – Relations entre les opérations*, p. 97-115).

Il n'est pas question de chercher à faire en sorte que les élèves reconnaissent toutes les relations entre les nombres dans une situation donnée. L'accent doit plutôt être mis sur l'habileté à repérer les relations les plus pertinentes qui leur permettront de traiter efficacement ces nombres en contexte.

Le développement du sens du nombre au cycle moyen est lié plus particulièrement à la reconnaissance des relations suivantes entre les nombres :

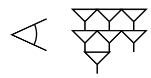
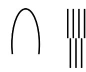
- relations de valeur de position;
- relations d'ordre;
- relations d'égalité;
- relations de proportionnalité;
- relations multiplicatives et de divisibilité.

Chacune de ces relations est analysée dans les prochaines sections. Voici, en guise de préambule, quelques exemples de chaque relation. Si on demande aux élèves de trouver des ressemblances, des différences et des liens entre les nombres 12, 24, 25, 37, 50, 96, 106 et 120, ils peuvent faire ressortir :

- que tous ces nombres, sauf 106 et 120, sont formés de deux chiffres ou que 24 et 25 ont le même nombre de dizaines (**relations de valeur de position**);
- que le nombre 120 est le plus grand nombre ou que 24 est un peu moins que 25 (**relations d'ordre**);
- que la somme de 12 et de 25 est égale à 37 ou que 96 + 24 = 96 + 4 + 20 = 120 (**relations d'égalité**);
- que 24 est le double de 12 ou que 25 est la moitié de 50 (**relations de proportionnalité**);
- que 37 est le seul nombre premier, que 12, 24, 96 et 120 sont des multiples de 12 ou que 25 et 50 sont divisibles par 5 (**relations multiplicatives et de divisibilité**).

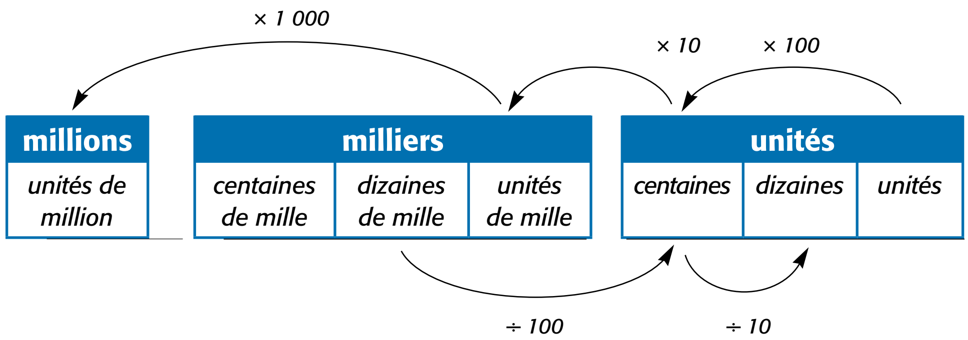
RELATIONS DE VALEUR DE POSITION

En retraçant l'histoire des mathématiques, on constate que la façon d'écrire les nombres varie selon les époques et les cultures. Chaque système est fondé sur des symboles, des règles et des conventions qui lui sont propres. Prenons, par exemple, l'écriture du nombre 17 dans différents systèmes de numération :

- babylonien : 
- égyptien : 
- maya : 
- romain : XVII

Le système de numération à base dix couramment utilisé aujourd'hui dans bon nombre de pays fait appel à 10 symboles différents, soit les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. C'est un système dit de position puisqu'une valeur différente est accordée aux symboles selon leur position dans un nombre. Par exemple, le chiffre 2 a une valeur de 2 unités dans le nombre 1 356 742, alors qu'il a une valeur de 20 000 unités dans le nombre 5 623 487. La compréhension des relations entre la valeur des chiffres et leur position dans un nombre est essentielle au développement du sens du nombre.

Au cycle primaire, les élèves développent une compréhension des relations entre les valeurs de position des unités, des dizaines et des centaines. Par contre, au cycle moyen, ils ne transposent pas automatiquement cette compréhension aux plus grands nombres. C'est pourquoi l'enseignant ou l'enseignante doit s'assurer de leur faire comprendre que la valeur de n'importe quelle position dans un nombre est toujours 10 fois plus grande que la valeur de la position immédiatement à droite, et 10 fois plus petite que la valeur de la position immédiatement à gauche. Il est aussi important d'examiner les relations de 100 fois ou de 1 000 fois plus grand ou plus petit entre les valeurs de position afin de développer chez les élèves un sens du nombre approfondi, notamment le sens des grands nombres.



Les élèves doivent aussi reconnaître, par exemple, qu'une (1) dizaine de mille représente un regroupement de 100 centaines, un regroupement de 1 000 dizaines ou même un regroupement de 10 000 unités. Ces regroupements permettent de reconnaître des représentations équivalentes de nombres (p. ex., 2 534 est égal à 25 centaines et 34 unités). L'activité *Et ensuite?* (p. 149-153) traite des regroupements liés aux relations de valeur de position.

Il existe de multiples relations entre les diverses positions que les chiffres occupent dans un nombre.

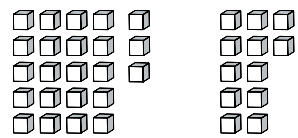
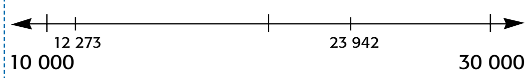
Les relations de valeur de position jouent un rôle important lorsque vient le temps de faire des estimations, des arrondissements ou des décompositions. De plus, elles sont à la base de la multiplication et de la division par un multiple de 10 (pour plus de renseignements à ce sujet, voir *Effet des opérations*, p. 90-92).

RELATIONS D'ORDRE

L'habileté à reconnaître des relations d'ordre s'acquiert en comparant des nombres, en les plaçant en ordre croissant et décroissant, en comptant à rebours et en analysant la proximité relative de deux nombres.

Au cycle moyen, les élèves doivent reconnaître la relation d'ordre entre les nombres en les comparant. Ils peuvent décrire la relation en précisant, par exemple, que 350 est plus petit que 432. Voici quelques exemples de stratégies qu'ils peuvent utiliser pour comparer de grands nombres.

Comparaison des nombres 23 942 et 12 273

Les élèves peuvent reconnaître que 23 942 est plus grand que 12 273 :	**Exemple**
• en ciblant une partie plus importante de chaque nombre;	Constater que 23 000 est plus grand que 12 000.
• en visualisant les quantités importantes;	Visualiser 23 regroupements de 1 000 et 12 regroupements de 1 000. 
• en situant les nombres sur une droite numérique;	 Le nombre 23 942 est situé à la droite du nombre 12 273.
• en comparant les chiffres dans les diverses positions en partant de la gauche.	2 3 9 4 2 ↓ 1 2 2 7 3 Le 2 représente 20 000 alors que le 1 représente 10 000.

Afin d'aider les élèves à développer l'habileté à reconnaître les relations d'ordre entre les grands nombres, l'enseignant ou l'enseignante peut, à partir d'un nombre donné, leur demander de compter par 1 (p. ex., 12 998, 12 999, 13 000, 13 001…) ou par intervalles (p. ex., 32 200, 32 400, 32 600…) et de compter à rebours par 1 (p. ex., 26 271, 26 270, 26 269…) ou par intervalles (p. ex., 45 650, 45 600, 45 550…).

Ces activités aident les élèves à reconnaître qu'en comptant par 1 ou par intervalles, tout nombre nommé est supérieur à ceux qui le précèdent et inférieur à ceux qui le suivent, alors qu'en comptant à rebours par 1 ou par intervalles, tout nombre nommé est inférieur à ceux qui le précèdent et supérieur à ceux qui le suivent. Bien que ces relations puissent sembler évidentes aux adultes, les élèves, pour leur part, se trompent souvent, car ils ne tiennent pas compte du concept de regroupement. Par exemple, lorsqu'on leur demande quel nombre précède 300, plusieurs ont tendance à répondre spontanément 399 parce qu'ils portent leur attention sur les deux 0; ils savent qu'un nombre qui se termine avec deux 0 est toujours précédé d'un nombre qui se termine par deux 9 et ils oublient de tenir compte du regroupement par centaines. En revanche, lorsque le même problème est posé en contexte, les élèves sont davantage portés à donner des réponses réfléchies. Par exemple, dans une situation où un enfant a 300 bonbons et qu'il en mange un, les élèves répondront facilement qu'il lui reste 299 bonbons.

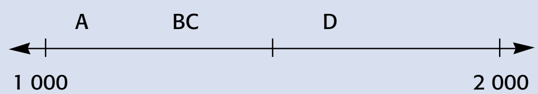
Les erreurs liées au concept de regroupement sont aussi fréquentes lors d'arrondissements pour lesquels il est nécessaire de cerner un intervalle. Par exemple, certains élèves diront que 12 497 se situe entre 12 490 et 12 400 au lieu de 12 500. L'utilisation d'un abaque ou d'un odomètre maison (créé à l'aide d'un rouleau de papier hygiénique et du gabarit à droite) aide les élèves à comparer les nombres, à compter par intervalles et à découvrir les changements reliés aux regroupements par dizaines, par centaines…

Une fois que les élèves maîtrisent les relations *plus grand que* et *plus petit que*, ils doivent apprendre à préciser ces relations en faisant appel à leur compréhension du concept de quantité. Ils emploient alors des expressions telles que *près de, environ, la même chose que, beaucoup plus que* et *un peu moins que*. Par exemple, les élèves peuvent dire que la population d'un village de 15 239 habitants est d'*environ* 15 000 habitants; que 304 est *un peu plus que* 300; que 12 894 est *un peu moins que* 13 000; que 32 523 contient *environ* une centaine *de plus que* 32 432 et que 620 et 618 sont *plus près* l'un de l'autre que 630 et 680.

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Pour plus de renseignements au sujet de l'estimation et de l'arrondissement, voir *Approximation*, p. 35-41).

Cette habileté à préciser les relations d'ordre entre les nombres prend toute son importance lorsque les élèves utilisent les nombres en contexte de résolution de problèmes, d'arrondissement, d'estimation et de comparaison. L'activité suivante permet aux élèves de démontrer cette habileté.

> Tracer au tableau une droite numérique pour représenter un intervalle quelconque (p. ex., de 1 000 à 2 000). Placer quelques lettres (p. ex., A, B, C, D) dans cet intervalle tel qu'illustré ci-dessous.
>
> 
>
>
> Demander à quelques élèves de venir situer certains nombres sur la droite (p. ex., 1 873, 1 332, 1 167). Leur demander ensuite de décrire des relations d'ordre qui existent entre les nombres et les lettres.
>
> Les élèves pourraient, par exemple, dire :
> - que 1 167 se situe entre A et B;
> - que les lettres B et C se situent entre 1 167 et 1 332;
> - que le nombre 1 873 est plus près de 2 000 que de la lettre D;
> - que la lettre B semble être plus au centre de l'intervalle entre 1 000 et 1 500 que la lettre C.

RELATIONS D'ÉGALITÉ

Un nombre est représenté symboliquement à l'aide de chiffres. Par exemple, le nombre mille deux cent cinquante-six écrit symboliquement donne 1 256. Il peut aussi être représenté à l'aide de diverses expressions numériques. Par exemple, la représentation 1 000 + 200 + 50 + 6 permet de reconnaître 1 256 en fonction de la valeur de position des chiffres qui le composent. Il y a de nombreuses autres façons de décomposer ou de représenter ce nombre.

1 200 + 56   12 × 100 + 56   12 centaines + 56 unités
1 260 – 4   (1 × 1 000) + (2 × 100) + (5 × 10) + 6
1 200 + 60 – 4   1 000 + 256
1 000 + 100 + 100 + 25 + 25 + 6   1 255 + 1
1 unité de mille + 2 centaines + 5 dizaines + 6 unités

Les relations d'égalité permettent d'établir l'équivalence entre diverses représentations d'une même quantité. L'exploration des multiples représentations d'un nombre aide les élèves à acquérir une meilleure compréhension du sens de ce nombre. En situation de résolution de problèmes, les élèves doivent apprendre à choisir la représentation la plus appropriée au contexte et à l'intention. Voici quelques exemples :

Pour comparer des nombres 1 256 = 1 000 + 100 + 100 + 40 +10 + 6 1 146 = 1 000 + 100 + 40 + 6	**Pour calculer** 25 × 9 = 25 × (10 – 1) 25 × 9 = (25 × 10) – (25 × 1) 25 × 9 = 250 – 25 Alors 25 × 9 = 225
Pour faire un calcul mental 325 + 527 = 325 + 525 + 2 325 + 527 = 850 + 2 325 + 527 = 852	**Pour estimer** 24 × 26 est près de 25 × 25 25 × 25 = 25 × (20 + 5) 25 × 25 = (25 × 20) + (25 × 5) 25 × 25 = 500 + 125 25 × 25 = 625 Ainsi, on peut donc dire que 24 × 26 est environ 625.

RELATIONS DE PROPORTIONNALITÉ

Il y a une relation de proportionnalité entre deux quantités lorsque ces quantités peuvent augmenter ou diminuer simultanément selon le même facteur.

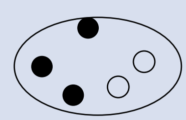
Exemple 1

Pour permettre aux élèves de réaliser une activité, l'enseignant ou l'enseignante distribue des pailles comme suit :

- 1 élève qui travaille seul reçoit 4 pailles;
- une équipe de 2 élèves reçoit 8 pailles;
- une équipe de 3 élèves reçoit 12 pailles.

Une étude de la régularité de cette relation permet de reconnaître que le nombre d'élèves et le nombre de pailles augmentent selon le même facteur (facteur de 2 pour 2 élèves, facteur de 3 pour 3 élèves). Il devient alors aisé de

***Rapport :** Relation entre deux grandeurs exprimées sous la forme du quotient des nombres qui les caractérisent.*



Par exemple, dans l'ensemble de 5 billes ci-dessus, il y a un rapport de 2 à 3 ($\frac{2}{3}$ ou 2 : 3) entre le nombre de billes blanches et le nombre de billes noires.

(Champlain et coll., 1996, p. R 13)

déterminer qu'un groupe de 6 élèves recevra 24 pailles (facteur de 6). La relation de proportionnalité entre le nombre d'élèves et le nombre de pailles peut être représentée par l'égalité entre deux des rapports (p. ex., $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$). Une telle égalité entre deux rapports s'appelle une **proportion**.

La situation suivante, en revanche, ne présente pas de relation de proportionnalité.

Exemple 2

Pour permettre aux élèves de réaliser une activité, l'enseignant ou l'enseignante distribue des pailles comme suit :

- 1 élève qui travaille seul reçoit 5 pailles;
- une équipe de 2 élèves reçoit 9 pailles;
- une équipe de 3 élèves reçoit 13 pailles.

Dans cette situation, il est impossible d'établir une égalité entre deux rapports (p. ex., $\frac{1}{5} \neq \frac{3}{13}$).

L'analyse de relations de proportionnalité s'effectue en appliquant un raisonnement proportionnel. Ce raisonnement intervient lors de la comparaison de deux rapports entre eux et de la reconnaissance d'une relation multiplicative. À noter que les relations multiplicatives incluent l'opération de division, puisque toute division peut être transformée en multiplication (p. ex., diviser par 2 est l'équivalent de multiplier par $\frac{1}{2}$).

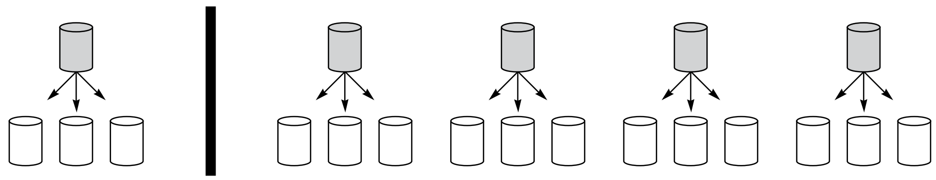
L'habileté à utiliser un raisonnement proportionnel se développe tout au long de l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, un enseignant ou une enseignante demande aux élèves du cycle primaire de déterminer le nombre de morceaux que contiennent 3 tablettes de chocolat si une tablette contient 8 morceaux. Il s'agit d'une relation multiplicative puisque le nombre de morceaux est 8 fois plus grand que le nombre de tablettes (rapport de 8 à 1). Par contre, pour résoudre ce genre de problème, les élèves auront d'abord recours à l'addition répétée (8 + 8 + 8). Par la suite, lorsqu'ils auront été exposés au concept de multiplication, ils pourront le résoudre en multipliant (8 × 3), ce qui constitue un premier pas vers l'utilisation d'un raisonnement proportionnel.

Les termes *rapport* et *proportion*, ainsi que les notations qui s'y rattachent (p. ex., 2 : 3), ne font pas partie du programme-cadre de mathématiques au cycle moyen, pas plus que l'étude de stratégies pour résoudre algébriquement un problème impliquant une relation de proportionnalité. Au cycle moyen, l'étude des relations de proportionnalité porte plutôt sur la reconnaissance et sur la description de la relation multiplicative dans diverses situations de résolution de problèmes. Les élèves utilisent intuitivement le raisonnement proportionnel pour résoudre des problèmes impliquant deux quantités qui sont dans un rapport de un à plusieurs (p. ex., 1 tablette pour 8 morceaux), de plusieurs à un (p. ex., 3 personnes par table) ou de plusieurs à plusieurs (p. ex., 2 litres de jus pour 5 personnes). Ils utilisent aussi du matériel concret et divers modèles tels que des illustrations, des tables de valeurs ou des droites numériques.

Exemple 3

Pour la journée d'athlétisme, les élèves de la classe de M^me^ Guérin préparent du jus pour les coureurs. Pour chaque contenant de jus concentré, il faut ajouter 3 contenants d'eau. Combien leur faudra-t-il ajouter de contenants d'eau à 4 contenants de jus concentré?

Solution à l'aide d'illustrations



Il faudra donc 12 contenants d'eau (4 × 3 contenants d'eau).

Solution à l'aide d'une table de valeurs

× 4

Nombre de contenants de jus	1	2	3	4	5
Nombre de contenants d'eau	3	6	9	12	15

× 3

× 4

Dans une table de valeurs qui représente une situation de proportionnalité, les rapports entre les quantités correspondantes sont équivalents. Dans l'exemple précédent, on reconnaît aisément la relation multiplicative par 3 entre le nombre de contenants de jus et le nombre de contenants d'eau. De plus, cette table de valeurs permet d'établir des proportions (p. ex., $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$).

La table de valeurs peut aussi être construite sans que les valeurs soient inscrites dans un ordre croissant ou sans que toutes les valeurs soient inscrites. Il est en effet parfois plus facile de trouver la solution au problème en utilisant la relation de proportionnalité comme le démontre l'exemple suivant.

Exemple 4

Abdala achète des viandes froides en vue de faire des sandwichs pour le pique-nique de l'école. Chaque kilogramme de viande coûte 12 $ et permet de préparer 10 sandwichs. Quel sera le coût de la viande nécessaire à la préparation 25 sandwichs?

Voici deux façons différentes d'utiliser la relation de proportionnalité dans une table de valeurs pour résoudre ce problème.

Solution 1

÷ 2 × 5

Nombre de sandwichs	10	5	25
Coût ($)	12	6	30

÷ 2 × 5

Solution 2

× 2 ÷ 4

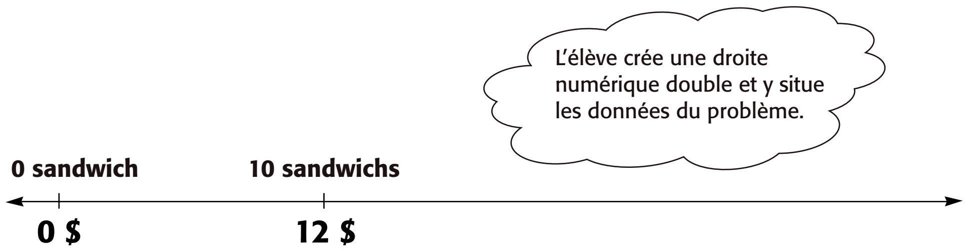
Nombre de sandwichs	10	20	5	25
Coût ($)	12	24	6	30

+

L'élève a déterminé que 20 sandwichs coûteront 24 $ et que 5 sandwichs coûteront 6 $. Ensuite, il conclut que le coût pour 25 sandwichs (20 + 5) est de 30 $ (24 + 6).

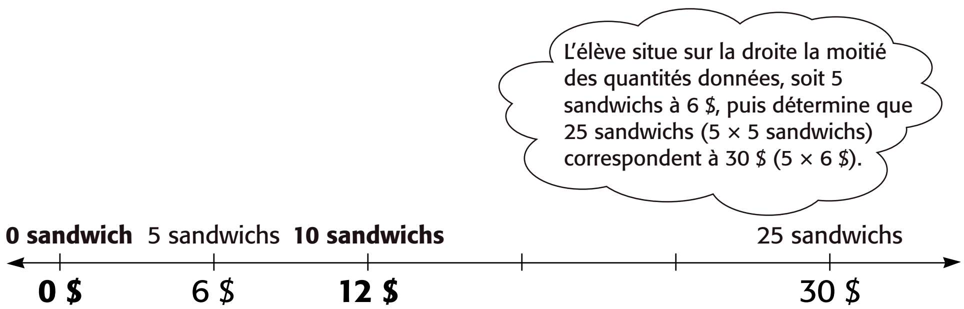
Cette utilisation de la table de valeurs dans une situation de proportionnalité ne doit pas nécessairement être enseignée puisque les élèves, en situation de résolution de problèmes, peuvent la découvrir par eux-mêmes.

La droite numérique double met aussi en évidence des rapports qui permettent de résoudre un problème. Elle peut, par exemple, être employée à la place d'une table de valeurs pour résoudre le problème précédent.

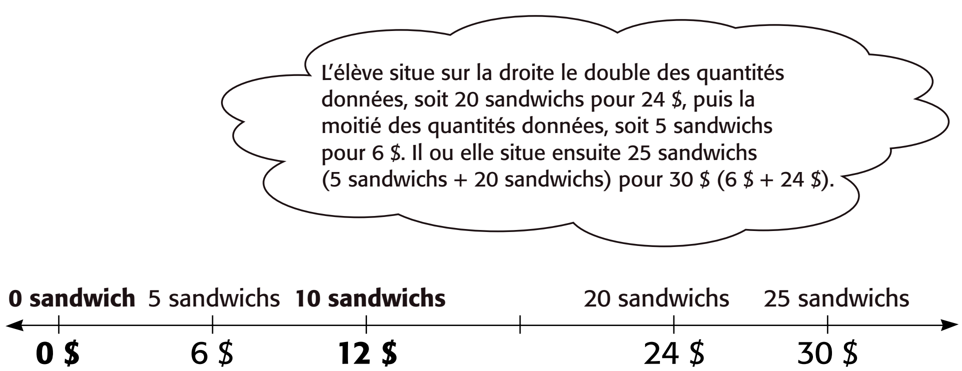


Les élèves situent ensuite sur la droite des rapports équivalant à celui donné dans le but de résoudre le problème. Ils peuvent choisir les rapports en fonction de leurs besoins et de leur compréhension du problème. Voici deux façons différentes de résoudre le problème à l'aide d'une droite numérique double.

Solution 1



Solution 2



La différence entre l'utilisation d'une table de valeurs et de la droite numérique double pour représenter une situation de proportionnalité réside dans l'ordre dans lequel sont placées les valeurs qui représentent des rapports. Sur une droite numérique double, les nombres sont placés en ordre croissant en suivant des intervalles constants, alors que dans la table de valeurs, ils sont placés selon l'ordre qui répond au raisonnement suivi pour résoudre la situation.

Voici deux autres exemples de problèmes de proportionnalité qui peuvent être résolus à l'aide des modèles expliqués ci-dessus :

Exemple 5

Les cahiers distribués dans les écoles sont vendus en paquets de 12 cahiers.

a) Combien de cahiers y a-t-il dans 13 paquets? (*156 cahiers*)

b) Si l'école a besoin de 180 cahiers, combien de paquets doit-elle commander? (*15 paquets*)

Exemple 6

Les yogourts se vendent soit à l'unité, soit au prix de 4 $ pour 12 yogourts.

a) Combien coûteront 72 yogourts? 21 yogourts? (*24 $, 7 $*)

b) Combien de yogourts peut-on acheter avec 10 $? 16 $? (*30 yogourts, 48 yogourts*)

Les élèves du cycle moyen utilisent leur sens intuitif du raisonnement proportionnel.

La relation multiplicative entre deux rapports est à la base du raisonnement proportionnel. Les rapports sont présents dans le quotidien et dans plusieurs situations mathématiques, notamment dans les valeurs de position (p. ex., le rapport entre les unités et les unités de mille est de 1 000 : 1), dans les fractions (p. ex., $\frac{2}{3}$ ou 2 : 3), dans les figures semblables (p. ex., un agrandissement de 1 : 3), dans les nombres décimaux (p. ex., le rapport entre les centièmes et les dixièmes est de 10 : 1), dans les unités de mesure du système métrique (p. ex., le rapport entre les mètres et les millimètres est de 1 : 1 000), dans les prix (p. ex., 12,25 $ le kilogramme).

Les élèves du cycle moyen doivent utiliser une variété de modèles dans le cadre d'activités pour développer leurs habiletés à raisonner proportionnellement. Le raisonnement proportionnel est particulièrement important dans la compréhension des grands nombres, lesquels peuvent être appréhendés en rapport avec des repères (voir *Repères*, p. 33-35). D'ailleurs, ces expériences informelles serviront à l'étude plus approfondie des rapports, des taux, des pourcentages et de l'algèbre dans les années d'études ultérieures.

RELATIONS MULTIPLICATIVES ET DE DIVISIBILITÉ

Les relations multiplicatives et de divisibilité entre deux nombres sont des relations fondées respectivement sur la multiplication et sur la division. Par exemple, il y a une relation multiplicative entre 3 et 15 puisque 15 est un multiple de 3, et aussi une relation de divisibilité puisque 15 est divisible par 3.

À partir de la reconnaissance de ces relations, les élèves au cycle moyen peuvent identifier diverses caractéristiques d'un nombre naturel, notamment le fait que ce nombre peut être :

- un nombre pair ou un nombre impair;
- un multiple d'un autre nombre;
- un facteur et un diviseur d'un autre nombre;
- un nombre premier ou un nombre composé;
- divisible par un autre nombre.

L'étude de ces caractéristiques des nombres naturels aide les élèves à développer le sens du nombre et à mieux utiliser les nombres dans des situations quotidiennes. Ces caractéristiques sont expliquées plus en détail dans ce qui suit à l'intention de l'enseignant ou de l'enseignante. Avec les élèves, il faut cependant éviter de s'attarder aux « trucs », à la terminologie et aux définitions. L'important pour eux c'est de développer une compréhension conceptuelle de ces caractéristiques à partir d'activités qui misent sur la reconnaissance des relations multiplicatives ou de divisibilité.

Nombre pair ou nombre impair

Si un nombre naturel est divisible en deux parties égales, c'est un nombre pair; sinon, c'est un nombre impair. La définition des nombres pairs et des nombres impairs est donc associée à la relation de divisibilité ou de non-divisibilité par 2.

C’est dans le cadre d’activités que les élèves devraient être amenés à constater que tous les nombres naturels ayant le chiffre 0, 2, 4, 6, ou 8 dans la position des unités sont des nombres pairs alors que ceux ayant le chiffre 1, 3, 5, 7 ou 9 dans la position des unités sont des nombres impairs. Ces constats leur permettent par la suite de reconnaître rapidement si un nombre est pair ou impair sans avoir à vérifier la divisibilité par 2.

Multiple d’un nombre

Un multiple d’un nombre naturel correspond au produit de ce nombre par un autre nombre naturel. Par exemple, le nombre 12 est un multiple de 4 parce que $12 = 4 \times 3$. Il est aussi un multiple de 1 ($12 = 1 \times 12$), de 2 ($12 = 2 \times 6$), de 3 ($12 = 3 \times 4$), de 6 ($12 = 6 \times 2$) et de 12 ($12 = 12 \times 1$). Les élèves doivent être en mesure de déterminer si un nombre est un multiple ou pas d’un autre nombre (p. ex., « Est-ce que 42 est un multiple de 7? »). Ils doivent aussi être capables de dresser une liste des multiples d’un nombre quelconque (p. ex., les multiples de 7 sont : 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49…). La liste des multiples d’un nombre est infinie. L’important n’est donc pas de connaître par cœur une liste partielle de ces multiples, mais bien de pouvoir en produire une au besoin.

Note : Conformément à la définition d’un multiple d’un nombre, le nombre zéro est un multiple de tout nombre naturel. Par exemple, 0 est un multiple de 7 puisque $7 \times 0 = 0$. Cependant, ce cas particulier n’est habituellement pas retenu lorsqu’on demande d’énumérer la liste des multiples d’un nombre naturel quelconque.

Dans plusieurs situations, il est utile d'identifier un multiple qui est commun à deux nombres. La recherche d'un tel multiple commun, qui consiste habituellement à comparer les listes de multiples de chacun des deux nombres, devrait se faire dans un contexte de résolution de problèmes.

Exemple

Un élève sonne une cloche toutes les 6 secondes et une élève siffle toutes les 8 secondes.

a) Quand produiront-ils leur son en même temps pour la première fois?

b) À quels autres moments les sons coïncideront-ils?

Pour résoudre ce problème, les élèves peuvent construire une table de valeurs ou écrire une liste des multiples de 6 (6, 12, 18, 24…) et de 8 (8, 16, 24, 32…). Ils seront alors en mesure de déterminer que les deux élèves produiront leur son en même temps pour la première fois à la 24e seconde. Pour répondre à la deuxième question, ils doivent établir l'ensemble des prochains multiples communs de 6 et de 8, soit 48, 72, 96… Même si le concept de *plus petit commun multiple* (PPCM) fait l'objet d'un contenu d'apprentissage au cycle intermédiaire seulement, plusieurs problèmes en modélisation et algèbre au cycle moyen impliquent la recherche d'un multiple commun de deux nombres.

Facteur et diviseur d'un nombre

Dans une multiplication de deux ou de plusieurs nombres naturels, chacun de ces nombres est appelé un facteur du nombre qui constitue le produit. Par exemple, 2 et 8 sont des facteurs de 16.

$$\mathbf{2 \times 8 = 16}$$

facteurs produit

Note : Si on veut énumérer tous les nombres naturels qui sont des facteurs de 16, il faut ajouter 1, 4 et 16 puisque $1 \times 16 = 16$ et que $4 \times 4 = 16$.

Dans une division, la relation entre le dividende et le diviseur donne un quotient. Un nombre naturel est dit être un diviseur d'un autre nombre naturel si leur quotient est un nombre entier. Ainsi, 3 est un diviseur de 21 puisque le quotient donne l'entier 7.

$$\mathbf{21 \div 3 = 7}$$

dividende diviseur quotient

Note : Si on veut énumérer tous les diviseurs possibles de 21, il faut ajouter 1, 7 et 21 puisque $21 \div 1 = 21$, $21 \div 7 = 3$ et $21 \div 21 = 1$. Les élèves pourraient constater que tout nombre naturel a au moins deux diviseurs, soit le nombre lui-même et le nombre 1.

Puisque la multiplication et la division sont des opérations inverses, il est possible d'établir des relations entre les concepts de multiple, de facteur, de dividende, de diviseur et de quotient. Par exemple, tout facteur d'un nombre est aussi un diviseur de ce nombre (4 est à la fois un facteur et un diviseur de 28). Ainsi, les relations entre les nombres peuvent être exprimées différemment selon l'analyse que l'on fait d'une situation donnée. Les élèves pourraient notamment dire que 8 est un multiple de 4, que 4 est un facteur de 8, que 8 est divisible par 4 ou que 4 est un diviseur de 8. Ils pourraient aussi reconnaître que le nombre 24 est un multiple de l'ensemble des nombres {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24} et que ces nombres sont ses facteurs ou ses diviseurs.

Certaines situations impliquent la recherche d'un diviseur commun à deux nombres. Cette recherche, tout comme la recherche de multiples communs, devrait être effectuée dans un contexte de résolution de problèmes.

Exemple

M. Theis a 36 stylos rouges et 120 stylos bleus. Il veut répartir tous ces stylos en paquets de stylos rouges et en paquets de stylos bleus. Il veut aussi faire en sorte que le nombre de stylos dans les paquets de stylos bleus soit le même que dans les paquets de stylos rouges.

a) Combien de stylos peut-il mettre dans chaque paquet?

b) Quel est le plus grand nombre de stylos qu'il peut mettre dans chaque paquet?

Pour résoudre ce problème, les élèves peuvent dresser la liste des diviseurs possibles de 36 et de 120. En comparant les listes et en statuant que 1 stylo ne constitue pas un « paquet », ils pourront constater que M. Theis peut faire des paquets de 2, de 3, de 4, de 6 ou de 12 stylos et que 12 est le plus grand nombre de stylos qu'il peut mettre dans un paquet. Ce genre de problème prépare les élèves aux concepts de *plus grand commun diviseur* (PGCD) ou de *plus grand commun facteur* (PGCF) qui seront explorés plus à fond au cours des années d'études ultérieures.

Nombre premier ou nombre composé

Un nombre composé est un nombre naturel supérieur à 1 qui possède plus de deux diviseurs entiers. Par exemple, 14 est un nombre composé, car il possède les diviseurs 1, 2, 7 et 14. À l'opposé, un nombre premier est un nombre naturel supérieur à 1 qui a exactement deux diviseurs entiers (p. ex., 23 est un nombre premier, car il n'a comme diviseurs que 1 et lui-même). Tous les nombres naturels supérieurs à 1 sont donc soit des nombres composés, soit des nombres premiers. Quant aux nombres 0 et 1, ils ne sont par définition ni premiers ni composés.

Les élèves peuvent établir que tous les nombres premiers sauf 2 sont impairs, mais que tous les nombres impairs ne sont pas nécessairement des nombres premiers (p. ex., 9 est un nombre impair qui est composé).

L'habileté à reconnaître qu'un nombre est premier ou composé peut faciliter la résolution de problèmes.

Exemple

Les élèves doivent créer un rectangle dont les dimensions sont des valeurs entières. Quelles sont les dimensions possibles du rectangle si son aire doit mesurer 24 cm^2? 36 cm^2? 23 cm^2? 11 cm^2? 54 cm^2?

En reconnaissant que 23 et 11 sont des nombres premiers, les élèves peuvent justifier que dans chacun de ces deux cas, il n'existe qu'un seul ensemble de dimensions possibles (soit un rectangle de 1 cm sur 23 cm et un rectangle de 1 cm sur 11 cm). Afin de déterminer les dimensions possibles des trois autres rectangles, ils doivent examiner les facteurs possibles de 24, de 36 et de 54.

Nombre divisible par un autre nombre

Un nombre naturel est dit être divisible par un autre nombre naturel si leur quotient est une valeur entière, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de reste. L'habileté à reconnaître qu'un nombre est divisible ou non par un autre nombre est une composante importante du sens du nombre. En plus de favoriser la reconnaissance des relations avec de grands nombres, elle permet aux élèves de manipuler les nombres avec plus de facilité dans un contexte de résolution de problèmes. Elle leur permet par exemple de découvrir des facteurs ou des diviseurs des nombres, de regrouper les nombres plus rapidement en tenant compte du reste possible et d'explorer certains concepts qui font appel à la multiplication ou à la division (p. ex., aire).

En général, la divisibilité d'un nombre est déterminée en effectuant une division et en vérifiant s'il y a un reste ou non. Il existe cependant des règles qui permettent de déterminer rapidement la divisibilité d'un nombre par un autre nombre. L'étude systématique de ces règles ne fait pas partie du programme-cadre de mathématiques au cycle moyen. Cependant, certaines d'entre elles (p. ex., divisibilité par 2, 5 ou 10) peuvent être découvertes assez facilement par les élèves dans le cadre de situations d'apprentissage qui misent sur une analyse des multiples d'un nombre et sur la recherche de régularités et de généralisations, ce qui contribue au développement du sens du nombre. À l'intention de l'enseignant ou de l'enseignante, les règles de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 10 sont décrites dans ce qui suit. Les explications données pour chacune visent à faire ressortir la justification mathématique derrière la règle. Il existe des règles de divisibilité pour d'autres nombres que les élèves pourraient prendre plaisir à découvrir en analysant les multiples possibles de ces nombres (p. ex., divisibilité par 9, 11, 20, 25, 50).

Règle de divisibilité par 2 : Un nombre naturel est divisible par 2 si c'est un nombre pair.

Par définition, un nombre pair est un nombre divisible en deux parties égales. Puisque tout nombre pair a le chiffre 0, 2, 4, 6 ou 8 dans la position des unités, il est facile de reconnaître, par exemple, que 23 674 est divisible par 2 alors que 25 149 ne l'est pas.

Règle de divisibilité par 3 : Un nombre naturel est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

Prenons par exemple le nombre 756. La somme des chiffres qui le composent (7 + 5 + 6) donne 18, un nombre qui est divisible par 3 puisque 18 ÷ 3 = 6. On peut donc conclure que 756 est divisible par 3. En appliquant ainsi la règle mécaniquement, il est difficile de saisir pourquoi elle fonctionne. Il faut analyser comment la division par 3 s'opère pour mieux comprendre.

Premièrement, il faut reconnaître que si on divise 1 000, 100 ou 10 par 3, il y aura toujours un reste de 1 (p. ex., 100 ÷ 3 = 33, reste 1). Si on analyse maintenant la division de 756 par 3, il suffit de décomposer le dividende en centaines, en dizaines et en unités, et d'examiner les restes qui résultent de chacune des divisions :

756 =				700				+			50			+	6
756 =	100 +	100 +	100 +	100 +	100 +	100 +	100	+	10 +	10 +	10 +	10 +	10	+	6
	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓		÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓	÷ 3 ↓		↓
	r 1	r 1	r 1	r 1	r 1	r 1	r 1		r 1	r 1	r 1	r 1	r 1		r 6
				r 7				+			r 5			+	r 6 = r 18

On constate que 700 divisé par 3 donne un reste de 7 unités et que 50 divisé par 3 donne un reste de 5 unités. En additionnant ces 7 unités et ces 5 unités restantes aux 6 unités qui n'ont pas encore été divisées, on obtient 18 unités. Puisque ces 18 unités peuvent être divisées par 3 sans qu'il y ait de reste, on peut conclure que 756 est divisible par 3. Notez que la somme des restes de la division de chaque centaine (7) correspond au chiffre dans la position de centaines dans le nombre 756. Il en va de même pour la somme des restes de la division de chaque dizaine (5). Ainsi, quoique la règle de divisibilité par 3 stipule qu'il faut additionner les chiffres qui composent le nombre donné (7, 5 et 6), ce sont en réalité les restes de la division de chaque centaine, les restes de la division de chaque dizaine et le nombre d'unités qui sont additionnés.

On peut reprendre le raisonnement avec un autre nombre, par exemple avec le nombre 341. Comme suite à la décomposition du nombre et à la division par 3, il y aurait 3 unités restantes des centaines, 4 unités restantes des dizaines et 1 unité, pour un total de 8 unités. Puisque ces 8 unités ne peuvent pas être divisées par 3 sans qu'il y ait de reste, alors on peut conclure que 341 n'est pas divisible par 3.

Règle de divisibilité par 4 : Un nombre naturel est divisible par 4 si les deux derniers chiffres qui le composent sont divisibles par 4.

Notons d'abord que les nombres à un et à deux chiffres qui sont des multiples de 4 sont 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36… 96. Ce sont donc les seuls nombres inférieurs à 100 qui sont divisibles par 4. Notons ensuite que 100 est divisible par 4. On peut alors déduire que tous les multiples de 100 sont aussi divisibles par 4 (p. ex., 600, 12 400, 706 300).

Pour déterminer si un nombre, par exemple 1 316, est divisible ou pas par 4, il suffit de le décomposer comme suit : 1 316 = 1 300 + 16. Puisque 1 300 est un multiple de 100, il est donc divisible par 4, et puisque 16 est aussi divisible par 4, on peut conclure que 1 316 est divisible par 4.

En appliquant la même règle à un autre nombre, par exemple au nombre 435 230, on peut conclure qu'il n'est pas divisible par 4. En effet, en le décomposant en 435 200 + 30, on sait que 435 200 est divisible par 4 puisque c'est un multiple de 100. Par contre, puisque 30 n'est pas divisible par 4, on peut conclure que 435 230 n'est pas divisible par 4.

Ces deux exemples démontrent, comme l'indique la règle, qu'il suffit de vérifier la divisibilité par 4 de la partie du nombre qui est inférieure à 100, c'est-à-dire les deux derniers chiffres, pour déterminer si un nombre quelconque est divisible par 4.

Règle de divisibilité par 5 : Un nombre naturel est divisible par 5 s'il a le chiffre 0 ou 5 dans la position des unités.

Les élèves peuvent découvrir facilement cette règle en énumérant la liste des multiples de 5, soit 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35… Ils peuvent simplement observer que tous ces multiples ont un 0 ou un 5 dans la position des unités. Il est donc facile de reconnaître, par exemple, que le nombre 34 675 est divisible par 5 puisqu'il se termine par un 5 alors que le nombre 76 942 ne l'est pas.

Règle de divisibilité par 6 : Un nombre naturel est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3.

Cette règle découle du constat que tous les multiples de 6 (6, 12, 18, 24, 30, 36, 42…) sont à la fois des multiples de 2 (nombres pairs) et des multiples de 3. Ceci s'explique du fait que multiplier un nombre par 6 équivaut à le multiplier d'abord par 2, puis par 3 ou vice versa.

Ainsi, pour vérifier si, par exemple, le nombre 126 est divisible par 6, il suffit de constater qu'il est divisible par 2 (c'est un nombre pair) et par 3 (la somme des chiffres qui le composent, soit 9, est divisible par 3). Il est donc divisible par 6. Par contre, le nombre 136 n'est pas divisible par 6 puisqu'il est divisible par 2 (c'est un nombre pair), mais pas par 3 (la somme des chiffres qui le composent, soit 10, n'est pas divisible par 3). De même, le nombre 189 n'est pas divisible par 6 puisqu'il est divisible par 3 (la somme des nombres qui le composent, soit 18, est divisible par 3), mais pas par 2 (c'est un nombre impair).

Règle de divisibilité par 8 : Un nombre naturel est divisible par 8 si les trois derniers chiffres qui le composent sont divisibles par 8.

L'explication de la règle de divisibilité par 8 est semblable à celle de la divisibilité par 4. Puisque 1 000 est divisible par 8 (1 000 ÷ 8 = 125), on peut déduire que tous les multiples de 1 000 (p. ex., 7 000, 34 000, 1 362 000) sont aussi divisibles par 8. La divisibilité d'un nombre par 8 dépend donc exclusivement de la divisibilité des trois derniers chiffres qui le composent.

Ainsi, pour déterminer, par exemple, si le nombre 3 160 est divisible par 8, on peut d'abord le décomposer comme suit : 3 000 + 160. Puisque 3 000 est divisible par 8, car il est un multiple de 1 000, il suffit de déterminer si 160 est aussi divisible par 8. Puisqu'il l'est (160 ÷ 8 = 20), on peut conclure que 3 160 est divisible par 8.

De la même façon, pour déterminer si 879 114 (879 000 + 114) est divisible par 8, il suffit de considérer le 114. Puisque 114 n'est pas divisible par 8, alors 879 114 ne l'est pas non plus.

Règle de divisibilité par 10 : Un nombre naturel est divisible par 10 s'il a le chiffre 0 dans la position des unités.

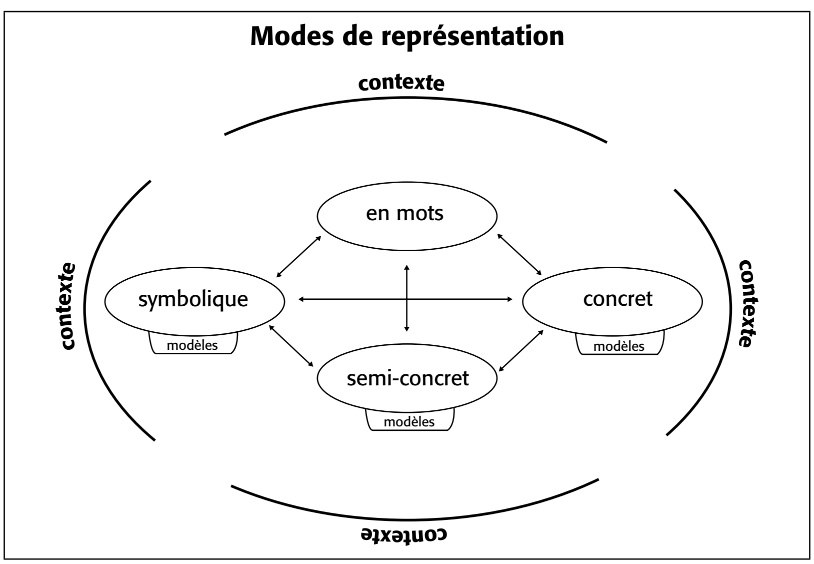
Cette règle est aussi facile à établir par les élèves. Ils connaissent bien les multiples de 10 (10, 20, 30, 40…) et sont en mesure de reconnaître que chacun d'eux se termine par un 0. Une autre façon d'exprimer cette réalité est de souligner que tout nombre qui a un 0 dans la position des unités est composé exclusivement d'un certain nombre de dizaines. Par exemple, le nombre 1 360 représente 136 dizaines. Il est donc nécessairement divisible par 10.

Énoncé 3 - Représentations des nombres

Passer d'une représentation d'un nombre à une autre permet de mieux comprendre les nombres.

> *Les multiples représentations d'un nombre réfèrent à la reconnaissance que les nombres peuvent revêtir différentes formes numériques et être exprimés en utilisant divers modes de représentation (p. ex., une fraction exprimée en notation décimale, un nombre écrit dans une forme décomposée ou une fraction représentée sur une droite numérique) et qu'ils puissent être manipulés de diverses façons afin de mieux répondre à une situation ou à un besoin.*
>
> (Ghazali, 2000, p. 2, traduction libre)

Les élèves doivent apprendre à représenter les nombres de diverses façons et à les reconnaître sous leurs multiples représentations. Ces habiletés les aident à établir des liens entre un nombre, sa représentation et la quantité qu'il représente. Il est donc essentiel que les élèves soient exposés à différentes représentations des nombres. Il importe aussi qu'ils soient exposés à divers contextes qui les mènent à représenter un nombre selon chacun des modes de représentation illustrés dans le schéma suivant ainsi qu'à passer d'un mode de représentation à un autre.



L'enseignante ou l'enseignant doit être conscient de l'ordre dans lequel elle ou il exploite ces quatre modes de représentation avec les élèves. Baroody et Coslick (1998, p. 3-8 à 3-16) suggèrent de présenter un nouveau concept dans un contexte réel et significatif pour que les élèves puissent d'abord se créer des **représentations à l'aide de mots**, puis des **représentations concrètes** et **semi-concrètes**. Ce n'est que lorsqu'ils auront développé une certaine compréhension du concept qu'ils pourront passer à sa **représentation symbolique**. Les élèves doivent être en mesure d'établir des liens entre les représentations et de passer aisément d'une représentation à une autre.

REPRÉSENTATIONS À L'AIDE DE MOTS

Le nombre est une représentation abstraite d'un concept très complexe. C'est pourquoi le rapport entre la façon de nommer un nombre et la quantité qu'il représente n'est pas évident pour les élèves. Plusieurs adultes croient à tort que si les élèves savent compter, ils comprennent de facto le sens de chacun de ces nombres. Pourtant, un ou une élève peut bien être en mesure de lire et de nommer un nombre, par exemple quarante-sept, sans vraiment avoir un sens de la quantité qu'il exprime.

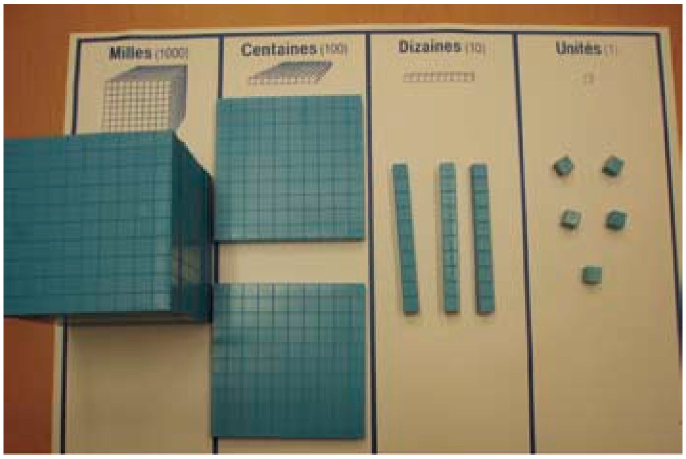
Au cycle primaire, les élèves apprennent à lire et à écrire en lettres les nombres jusqu'à cent, ce qui n'est pas sans poser de difficultés compte tenu des particularités de la langue. L'enseignant ou l'enseignante doit les aider à établir des liens entre le système de numération à base dix et la façon de nommer et d'écrire les nombres. Par exemple, les élèves peuvent constater que les nombres trente et un, trente-deux, trente-trois… jusqu'à trente-neuf se retrouvent dans la trentaine. Il en va de même pour les nombres dans la quarantaine, la cinquantaine et la soixantaine. Ils peuvent aussi constater l'étymologie des noms donnés à ces regroupements de dix. Par exemple, *trente* représente *trois* dizaines, *quarante* représente *quatre* dizaines, *cinquante* représente *cinq* dizaines et *soixante* représente *six* dizaines. Il est par contre plus difficile d'établir de tels liens pour les nombres de soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf. Il est important d'aider les élèves à établir d'autres liens, par exemple que le mot *soixante-dix* (70) représente 60 + 10, *quatre-vingts* (80) représente 4 × 20 et *quatre-vingt-dix* (90) représente 4 × 20 + 10. Il en va de même pour les autres nombres dans cet intervalle, par exemple *soixante-seize* (60 +16) ou *quatre-vingt-onze* (4 × 20 + 11). Compte tenu de ces particularités, il n'est pas rare de voir des élèves qui, à la fin du cycle primaire et au début du cycle moyen, éprouvent encore de la difficulté à nommer ces nombres.

Au cycle moyen, les élèves apprennent à lire et à écrire en lettres les nombres jusqu'au million. Il ne faut pas sous-estimer les défis que pose l'écriture des nombres en lettres. Pour aider les élèves à surmonter ces défis, l'enseignant ou l'enseignante devrait inclure les nombres au mur de mots et construire avec eux des référentiels pour résumer les règles d'accord en nombre de vingt, cent et mille.

REPRÉSENTATIONS CONCRÈTES

L'utilisation de matériels de manipulation (p. ex., jetons, matériel de base dix) pour représenter des nombres aide les élèves à développer le sens du nombre. Une mise en garde s'impose lorsqu'il est question d'utiliser le matériel de manipulation. Il importe de reconnaître que ce matériel permet de représenter un concept mathématique, ce n'est pas le concept lui-même; par exemple, la planchette n'est pas une centaine, mais elle représente une centaine de petits cubes.

Le danger est que les élèves utilisent le matériel de façon mécanique sans faire les liens avec les concepts mathématiques sous-jacents. C'est pourquoi, l'enseignant ou l'enseignante doit s'assurer qu'il y a vraiment apprentissage et non pas seulement une utilisation aveugle du modèle. Par exemple, il est facile pour les élèves de remplir les espaces dans la phrase à la page suivante en regardant le tapis de valeur de position.

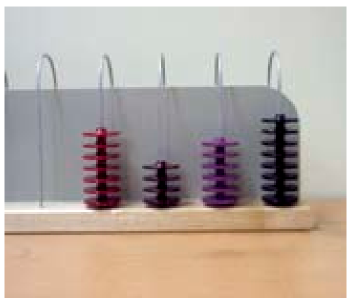


**La représentation est ____ unité(s) de mille,
____ centaine(s), ____ dizaine(s) et ____ unité(s).**

Mais comprennent-ils qu'il y a aussi mille deux cent trente-cinq petits cubes ou unités sur le tapis et que c'est une des réalités qui sont représentées par le nombre 1 235? Il est important de demander aux élèves d'expliquer de différentes façons ce qui est représenté. Par exemple, 1 235, c'est aussi 12 centaines d'unités et 35 unités ou encore 123 dizaines d'unités et 5 unités. Une autre façon de vérifier la compréhension est de demander par exemple aux élèves combien il y a de centaines dans 1 235. Plusieurs élèves auront tendance à dire qu'il y en a 2. Il importe alors de préciser que le chiffre dans la position des centaines est un « 2 », mais que le nombre 1 235 est composé de 12 centaines (12 regroupements de 100 unités = 1 200). On peut « voir » ces 12 centaines en décomposant le gros cube en 10 planchettes que l'on ajoute aux 2 planchettes qui sont dans la colonne des centaines.

En utilisant le tapis de valeur de position, on remarque que même si les nombres s'écrivent de gauche à droite, ils sont formés de droite à gauche : les unités regroupées forment les dizaines, les dizaines regroupées forment les centaines, et ainsi de suite. Mais, une fois le dénombrement terminé, on écrit le nombre en partant de la gauche.

Le choix du matériel mis à la disposition des élèves peut aussi faire une différence dans le niveau de compréhension des concepts. On trouve sur le marché une variété de matériels pour représenter les nombres : billes, cubes emboîtables ou tout autre objet pouvant être utilisé pour dénombrer. Certains de ces matériels représentent clairement et concrètement la relation de grandeur entre les unités, les dizaines, les centaines… (p. ex., le matériel de base dix utilisé dans les photos précédentes). Par contre, avec d'autres matériels, cette relation est représentée de façon plus abstraite. Par exemple, sur un abaque ou un « compteur de points », le groupement est représenté en fonction de la position du chiffre de gauche à droite, comme dans l'écriture symbolique des nombres.



Abaque

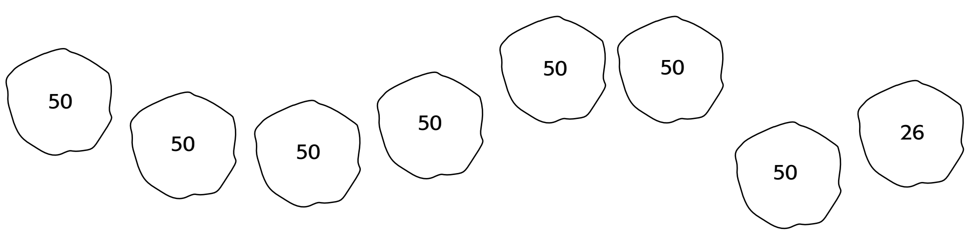
Compteur de points

En exposant les élèves à une variété de matériels de manipulation, l'enseignant ou l'enseignante peut les aider à développer une meilleure compréhension des nombres.

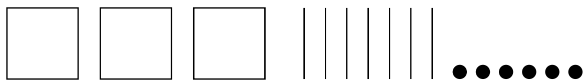
REPRÉSENTATIONS SEMI-CONCRÈTES

Les élèves peuvent aussi représenter les nombres avec du matériel semi-concret (p. ex., illustration, grille de nombres, droite numérique).

Illustration : Un nombre peut être représenté par des dessins de façon à illustrer certains regroupements. Par exemple, le nombre 376 peut être illustré par regroupements de 50 comme suit :



Son illustration peut aussi être en lien avec le matériel de manipulation.



Grille de nombres : La grille de nombres jusqu'à 100 est très utilisée au cycle primaire. Quoique plus difficile à manipuler, une grille de 1 000 (voir *Annexe – Grille de 1 000*, p. 72) peut aider les élèves au cycle moyen à mieux comprendre les nombres en permettant de les comparer et de faire ressortir les relations entre eux.

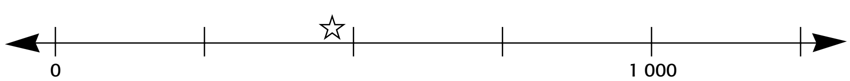
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Grille de 100

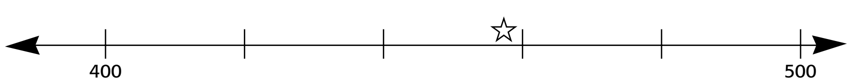
Grille de 1 000

Droite numérique : Au cycle primaire, les élèves utilisent et construisent des droites numériques pour compter par intervalles ou pour identifier le nombre de dizaines dans un nombre. Au cycle moyen, l'utilisation et la construction de droites numériques variées permettent aux élèves de représenter des grands nombres et de reconnaître les relations entre eux. Voici quelques exemples de droites numériques sur lesquelles le nombre 457 est représenté :

A. droite numérique dont l'échelle est par intervalles de 250;

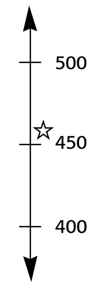


B. droite numérique qui ne commence pas à 0, dont l'échelle est par intervalles de 20;



C. droite numérique ouverte (qui n'est pas graduée) sur laquelle les nombres sont placés en relation les uns avec les autres;

D. droite numérique verticale qui présente les nombres en ordre croissant vers le haut et qui fait des liens avec les autres domaines dont Mesure (p. ex., thermomètre) et Traitement des données et probabilité (p. ex., axe des ordonnées).



REPRÉSENTATIONS SYMBOLIQUES

Les nombres sont représentés symboliquement à l'aide des chiffres qui les composent. Ils s'écrivent de gauche à droite par tranches de trois chiffres qui constituent les billions, les milliards, les millions, les milliers et les unités. Chacune des tranches regroupe les centaines (c), les dizaines (d) et les unités (u).

billions			milliards			millions			milliers			unités		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

Notes :

- En français, le terme « billion » n'a pas le même sens que le terme anglais *billion*. En français, un billion correspond à mille milliards (10^{12}) alors qu'en anglais il correspond à mille millions (10^9). En d'autres mots, le terme anglais *billion* correspond au terme français « milliard ».
- En français, l'écriture des nombres se fait en ajoutant un espace entre les tranches de trois chiffres (p. ex., 13 567 232) alors qu'en anglais, on sépare ces tranches à l'aide d'une virgule. Quoique l'écriture des nombres à quatre chiffres sans utiliser d'espace est acceptée (p. ex., 3543), l'écriture avec un espace (p. ex., 3 543) est privilégiée.

Une stratégie favorisant l'association du nombre à la quantité qu'il représente consiste à le nommer en mettant l'accent sur la valeur de position de chacun des chiffres qui le composent (p. ex., au lieu de lire le nombre 1 260 en disant mille deux cent soixante, les élèves peuvent dire 1 unité de mille, 2 centaines et 6 dizaines) ou sur certains regroupements (p. ex., 1 unité de mille et 26 dizaines ou 126 dizaines).

L'écriture des grands nombres nécessite une bonne maîtrise du concept de valeur de position, faute de quoi l'élève à qui l'on demande d'écrire symboliquement « mille deux cent treize » pourrait écrire 100020013 ou 1000213 ou 120013. Elle nécessite aussi une compréhension du rôle du zéro pour indiquer l'absence d'une quantité dans une des positions.

Voici un exemple d'un raisonnement que les élèves pourraient utiliser pour représenter symboliquement un grand nombre tel que **treize millions vingt-six mille quatre cents :**

- **treize millions** est représenté par 1 et 3 dans la tranche des millions, ce qui implique qu'il y a six positions à sa droite à combler;

millions		milliers			unités		
1	3	-	-	-	-	-	-

- **vingt-six mille** est représenté par 2 et 6 dans la tranche des milliers, mais il faut insérer un 0 dans la position des centaines de mille, car dans le mot « cent » n'est pas entendu dans cette tranche du nombre;

milliers			unités		
-	2	6	-	-	-
0	2	6			

- **quatre cents** est représenté par un 4 dans la position des centaines de la tranche des unités. Puisqu'il n'y a aucune indication pour la position des dizaines et des unités, il faut ajouter deux 0 pour combler ces positions.

unités		
4	-	-
4	0	0

Treize millions vingt-six mille quatre cents écrit symboliquement donne 13 026 400.

millions		milliers			unités		
1	3	0	2	6	4	0	0

Un nombre peut être représenté de différentes façons à l'aide de symboles mathématiques, soit en respectant la valeur de la position de chaque chiffre (1 236 est égal à 1 000 + 200 + 30 + 6), soit d'après quelques valeurs de position (1 236 est égal à 12 centaines et 36 unités) ou encore en effectuant différentes opérations (1 236 est égal à 1 000 + 236 ou 1 240 – 4 ou 1 200 + 36 ou 1 000 + 100 + 100 + 15 + 15 + 6). En fait, il existe une infinité de façons de représenter un nombre, chacune permettant aux élèves de se donner une autre façon de l'interpréter et d'en comprendre le sens.

ANNEXE - GRILLE DE 1 000

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580
581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840
841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860
861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880
881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940
941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980
981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

GRANDE IDÉE 2 – SENS DES OPÉRATIONS

> *Dans le programme-cadre, il est précisé que « les élèves doivent développer des procédures qui leur permettront d'effectuer avec précision des opérations sur les nombres ». Ils doivent aussi acquérir « la capacité d'effectuer des estimations rapides et précises […] et de déceler des erreurs arithmétiques ».*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 8)

Aperçu

Le sens des opérations combine la maîtrise d'une multitude de concepts et d'habiletés mathématiques reliés aux nombres et aux opérations. Dans une situation donnée, il permet de choisir les nombres et les opérations à utiliser avec suffisamment de souplesse et de polyvalence pour effectuer un calcul de façon efficace.

Les élèves qui ont un sens des opérations développé (Small, 2005a, p. 136) comprennent les opérations et l'effet qu'elles ont sur les nombres, établissent des liens entre les propriétés des opérations, reconnaissent que les opérations sont reliées entre elles et développent des stratégies de calcul. De plus, ils peuvent adapter ces stratégies à différentes situations et exprimer la relation entre le contexte d'un problème et les calculs effectués. Par exemple, ils sont à même d'expliquer pourquoi ils ont choisi d'effectuer leur calcul mentalement et de justifier l'efficacité de leur stratégie.

Au cycle primaire, les élèves ont développé un sens des opérations en traitant divers types de problèmes. Ces expériences leur ont permis de saisir des concepts liés aux diverses opérations (p. ex., la multiplication peut être perçue comme une addition répétée, l'addition est commutative) et de développer des stratégies pour effectuer les opérations.

Au cycle moyen, les élèves poursuivent le développement du sens des opérations en traitant des nombres dans des situations plus complexes. Ils acquièrent une meilleure compréhension du sens de chaque opération et des relations qui existent entre elles. Ils deviennent de plus en plus à l'aise avec diverses stratégies de calcul et de résolution de problèmes, ce qui leur permet de faire des choix plus éclairés selon les situations. De plus, leur sens des opérations s'étend à l'application des opérations de base sur les fractions et les nombres décimaux.

Grande idée 2 – Sens des opérations

Le sens des opérations permet de choisir les opérations à effectuer et de les exécuter efficacement selon la situation donnée.

Énoncé 1 – Quantité dans les opérations
Comprendre les opérations permet d'en reconnaître les effets sur les quantités.

Énoncé 2 – Relations entre les opérations
Comprendre les propriétés des opérations et les relations entre ces opérations permet de les utiliser avec plus de souplesse.

Énoncé 3 – Représentations des opérations
Connaître une variété de stratégies pour effectuer les opérations permet de les utiliser avec efficacité selon le contexte.

Énoncé 1 - Quantité dans les opérations

Comprendre les opérations permet d'en reconnaître les effets sur les quantités.

> *Le raisonnement quantitatif est plus que le raisonnement à partir des nombres et plus que des calculs efficaces. C'est comprendre une situation de manière à y appliquer des nombres et des calculs de façon efficace.*
>
> (Thompson, 1995, p. 220, traduction libre)

Au cycle primaire, les élèves ont eu l'occasion de traiter divers types de problèmes, ce qui les a aidés à comprendre les relations entre les quantités lors de l'addition et de la soustraction. Ils ont également été initiés aux concepts de multiplication et de division.

Les élèves du cycle moyen développent à la fois leur sens du nombre et leur sens des opérations. Ils apprennent les liens entre les quantités au cours d'une opération. Le sens des opérations aide les élèves à choisir l'opération appropriée pour résoudre un problème de façon efficace. Le sens de la quantité dans les opérations se forge par :

- l'apprentissage des opérations fondamentales en situation de résolution de problèmes;
- la connaissance de la nature des opérations fondamentales;
- l'exploration de problèmes écrits relatifs aux opérations fondamentales;
- l'apprentissage des faits numériques de base relatifs aux opérations fondamentales;
- l'analyse de l'effet des opérations;
- l'acquisition de l'habileté à estimer le résultat d'une opération.

APPRENTISSAGE DES OPÉRATIONS FONDAMENTALES

L'apprentissage des opérations mathématiques s'effectue progressivement. Le point de départ devrait être l'exploration des opérations en situation de résolution de problèmes. Les élèves apprennent à associer des situations à des opérations particulières, ce qui leur permet de commencer à donner un sens aux opérations. De plus, les élèves doivent utiliser des stratégies basées sur leur

*Les **algorithmes** sont des ensembles de règles et d'actions ordonnées nécessaires à la résolution d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication ou d'une division. En termes simples, un algorithme est la « recette » d'une opération.*

(Kilpartick, Swafford et Findell, 2001, p. 103) compréhension du contexte, du problème et des opérations. Ils prennent conscience qu'il existe plusieurs façons de résoudre un problème et même plusieurs façons d'effectuer la même opération. Par la suite, les élèves sont invités à résoudre une variété de problèmes afin de progresser vers l'utilisation de stratégies efficaces.

Algorithme usuel :

Méthode standardisée pour effectuer une opération, par exemple :

$$\begin{array}{r} {}^{3\,1}\\ \cancel{4}56 \\ -\ 163 \\ \hline 293 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\\ 45 \\ \times\ 3 \\ \hline 135 \end{array}$$

Contrairement à la démarche traditionnelle où les élèves apprennent surtout à appliquer les algorithmes usuels, l'apprentissage des opérations doit davantage être orienté vers la compréhension des opérations, l'exploration du calcul mental et l'utilisation de diverses stratégies pour effectuer les opérations. C'est en ce sens que le programme-cadre de mathématiques stipule l'attente pour les élèves du cycle moyen, soit que *l'élève doit pouvoir résoudre des problèmes reliés aux quatre opérations étudiées en utilisant diverses stratégies ou des algorithmes personnels*.

Algorithme personnel :

Stratégie, généralement développée par l'élève, pour effectuer une opération, par exemple :

$$\begin{array}{c} 378 + 123 \\ 400 + 90 + 11 = 501 \end{array}$$

Afin de répondre à cette attente, les élèves doivent être mis en situation de résolution de problèmes. Cela leur permettra de développer et d'explorer diverses stratégies ou divers algorithmes personnels. Plusieurs exemples de stratégies que les élèves utilisent afin d'effectuer les quatre opérations de base sont présentés dans *Énoncé 3 – Représentations des opérations* (p. 116-145).

L'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques est de doter les élèves d'une certaine facilité et souplesse pour le calcul et l'application des règles mathématiques parallèlement à la compréhension de ce qu'ils font. Pour aider les élèves à adopter des procédés mathématiques plus efficients en connaissance de cause, les enseignantes et enseignants doivent être au courant de la progression des stratégies que les élèves pourraient employer dans le cadre d'un sujet donné.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 22)

Pour développer des stratégies efficaces chez les élèves, l'enseignant ou l'enseignante doit leur fournir une variété de problèmes liés à une même opération et permettre aux élèves de discuter de leurs stratégies. De plus, il est important de leur offrir divers types de problèmes (voir *Problèmes écrits relatifs aux opérations fondamentales*, p. 81-87) de manière à leur permettre de saisir les multiples sens des opérations. Un problème bien choisi et l'application d'une stratégie réfléchie sont plus profitables qu'une série d'exercices complétés mécaniquement. Il faut ainsi allouer le temps nécessaire qui permettra aux élèves de comprendre et de consolider les stratégies.

L'exploration de stratégies (incluant les algorithmes personnels) est essentielle puisque celles-ci sont des exemples tangibles du sens du nombre et du sens des opérations que les élèves ont acquis. Ces stratégies et ces algorithmes personnels indiquent comment ils « jouent » avec les nombres et les opérations. Ces stratégies qui sont mises sur papier ont le potentiel de se transposer en stratégies de calcul mental. Par exemple, les élèves qui ont l'occasion d'écrire leur raisonnement sur papier ou qui utilisent une grille de nombres pour effectuer un calcul tel que 36 + 52 pourront ultérieurement suivre un raisonnement similaire mentalement.

Algorithme personnel

36 + 52

80 + 8 = 88

Grille de nombres

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

+10 +10 +10 +10

+1 +1

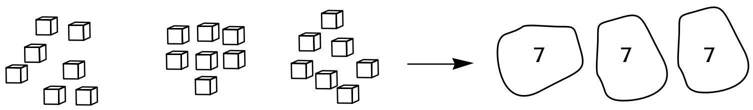
Calcul mental

30 + 50 font 80
6 + 2 font 8
80 + 8 = 88
Donc, 36 + 52 = 88

Calcul mental

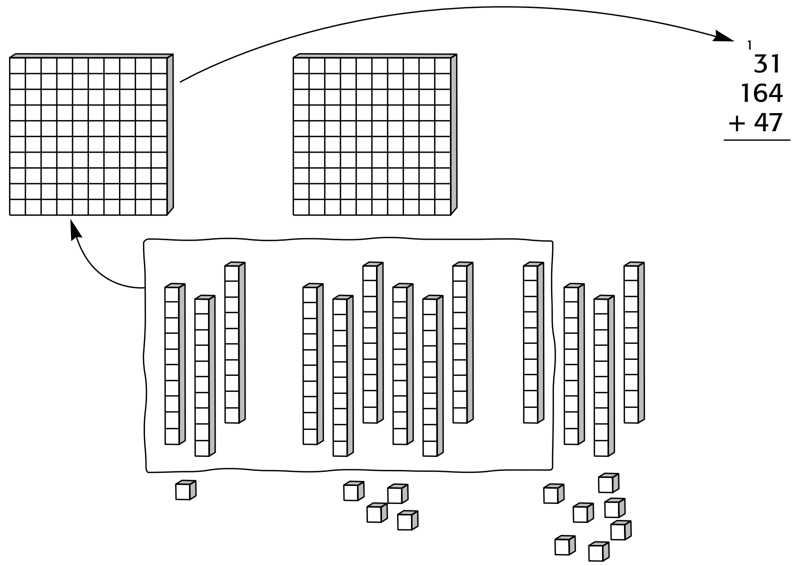
36, 46, 56, 66, 76, 86,
87, 88

De plus, il est essentiel d'animer des échanges mathématiques portant, par exemple, sur ces stratégies et sur les algorithmes personnels. Ces échanges favorisent le partage de stratégies et la reconnaissance de liens entre elles. Les stratégies personnelles de chaque élève se précisent, se perfectionnent et deviennent plus efficaces au fur et à mesure qu'il ou elle établit des liens entre elles. Ainsi, « l'enseignant ou l'enseignante oriente la discussion en ayant recours à des stratégies qu'ont utilisées des élèves pour amorcer la compréhension de concepts mathématiques précis et pour diriger la progression des élèves vers des méthodes efficaces » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 18). Le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante est alors d'aider les élèves à organiser leurs traces. Par exemple, on peut amener les élèves à utiliser des représentations semi-concrètes, en faisant ressortir qu'un ou une élève qui a regroupé des objets présente le même raisonnement que celui ou celle qui a écrit le nombre en guise de regroupement.

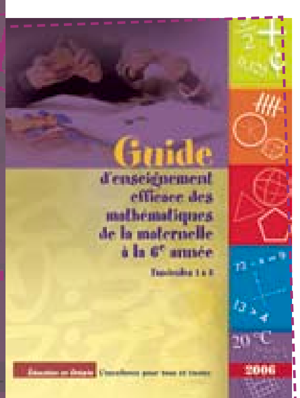


représentation de l'élève A — représentation de l'élève B

De même, lorsqu'un ou une élève prend physiquement 10 groupes de 10 unités, qu'il ou elle constate qu'il s'agit d'un groupe de 100 unités et qu'il ou elle l'appelle centaine, on peut mentionner qu'il ou elle utilise le concept de regroupement et qu'il s'agit du même regroupement qui est symbolisé par l'écriture du chiffre « 1 » au-dessus de la position des centaines dans l'algorithme usuel.



L'étayage par l'enseignant ou l'enseignante permet aux élèves de comprendre les concepts sous-jacents associés aux diverses opérations (p. ex., regroupement dans la multiplication, échange dans la soustraction). De plus, l'échange mathématique permet de présenter de nouvelles stratégies. L'enseignant ou l'enseignante et les élèves peuvent aussi modeler des stratégies en s'assurant de verbaliser le raisonnement qui s'y rattache. Ultérieurement, l'algorithme usuel peut être présenté en s'assurant que les élèves comprennent les concepts sous-jacents et les raisons des gestes posés. Les algorithmes usuels doivent être perçus par les élèves comme étant seulement une autre façon d'effectuer les opérations. Le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006) et le module *Opérations fondamentales* sur le site atelier.on.ca offrent des pistes pédagogiques supplémentaires quant à l'apprentissage des opérations et des algorithmes usuels.

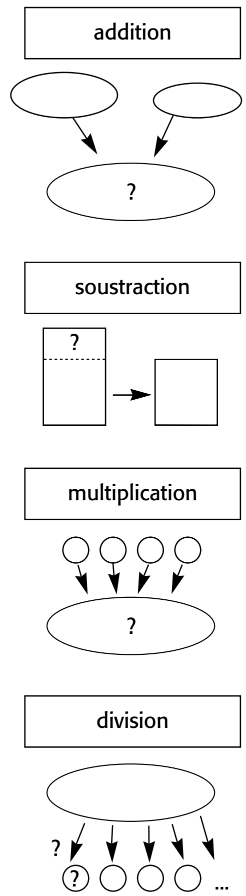


atelier.on.ca

Tout au long du cycle moyen, il est important de présenter une variété de situations de résolution de problèmes, même si les élèves ont maîtrisé plusieurs stratégies pour effectuer les diverses opérations. Cela leur permet de se construire un réseau de représentations, d'habiletés et de liens et de développer une souplesse et une flexibilité dans l'utilisation des opérations. Les élèves réfléchissent ainsi aux types de calculs à effectuer (p. ex., estimation, calcul exact), aux opérations à effectuer, ainsi qu'aux stratégies efficaces à utiliser selon la situation (p. ex., calcul mental, algorithme usuel, stratégie personnelle). (Voir le schéma dans *Réflexion reliée aux calculs*, p. 117.)

NATURE DES OPÉRATIONS FONDAMENTALES

Si on les regarde de façon superficielle, les opérations de base semblent bien simples. Dans chaque cas, deux nombres sont utilisés pour en obtenir un troisième. Or, les liens entre les trois nombres sont plus complexes qu'il n'en paraît. Dans l'addition, on peut considérer que deux quantités sont mises ensemble pour en former une troisième. Souvent, dans la soustraction, on enlève une quantité d'une autre. Cependant, on peut aussi dire, ce qui est plus abstrait, qu'on cherche la différence entre deux quantités données. Dans la multiplication, on doit reconnaître une quantité répétée un certain nombre de fois, et comprendre que l'on cherche la quantité totale. Dans la division, on doit reconnaître qu'une quantité est partagée en groupes égaux. Mais que l'on additionne, soustraie, multiplie ou divise, il y a une relation entre les nombres et les quantités qu'ils représentent. Puisque chaque opération exprime une relation particulière, chacune a un vocabulaire et des concepts qui lui sont propres.



Dans l'addition, deux quantités sont réunies. Dans l'addition de deux nombres naturels, la somme est donc plus élevée que les deux termes qui la composent, sauf lorsqu'un des termes est le nombre zéro.

$$\underbrace{\mathbf{15 + 23}}_{\text{termes}} = \underbrace{\mathbf{38}}_{\text{somme}}$$

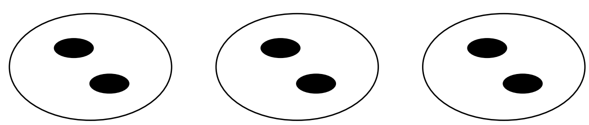
Dans la soustraction de nombres naturels, on enlève une quantité d'une autre. On cherche alors la différence entre deux nombres. Dans certains cas, on cherche directement la différence entre deux nombres sans considérer l'action d'enlever. Dans l'énoncé de soustraction avec des nombres naturels, le premier terme doit donc être plus grand que le second.

$$\underbrace{\mathbf{15 - 9}}_{\text{termes}} = \underbrace{\mathbf{4}}_{\text{différence}}$$

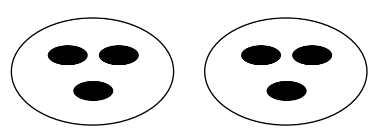
Au départ, la multiplication représente l'addition d'une même quantité répétée un certain nombre de fois. De façon abstraite, la multiplication est composée de deux facteurs qui donnent un produit.

$$\underbrace{\mathbf{24 \times 12}}_{\text{facteurs}} = \underbrace{\mathbf{288}}_{\text{produit}}$$

Pour bien assimiler la multiplication, les élèves doivent comprendre que les deux facteurs ne jouent pas le même rôle. Fréquemment, une phrase mathématique comme 3 × 2 se lit « trois fois deux ». Dans cette interprétation, le facteur 3 représente trois groupes, alors que le facteur 2 représente deux éléments dans chaque groupe.



La même phrase mathématique 3 × 2 peut aussi être interprétée en utilisant les mots « multiplié par ». Alors 3 × 2 se lit « trois multiplié par deux », ce qui crée plutôt l'image de groupes de trois, deux fois.



Ces deux façons d'interpréter la phrase mathématique sont correctes. Le contexte d'où provient la phrase mathématique permettrait de préciser la représentation qui lui correspond.

Dans la division, une quantité est séparée en groupes égaux. Le *dividende* représente la quantité à partager alors que le *diviseur* et le *quotient* représentent respectivement le nombre de groupes et la taille des groupes si la division a le sens de partage ou l'inverse si la division a le sens de groupement (voir p. 86).

$$\mathbf{36 \div 9 = 4}$$

dividende diviseur quotient

PROBLÈMES ÉCRITS RELATIFS AUX OPÉRATIONS FONDAMENTALES

Addition et soustraction

Dans l'addition ou la soustraction, des quantités sont ajoutées, retirées, unies ou comparées. Pour que les élèves comprennent les liens entre les quantités dans chacun de ces cas, il est important qu'ils soient confrontés à divers types de problèmes. Le tableau ci-après présente une variété de problèmes relatifs à l'addition et à la soustraction.

L'addition et la soustraction ne sont que des opérations qui surviennent dans des problèmes. Il faut donc éviter de parler de « problèmes de soustraction » ou « problèmes d'addition », car c'est la compréhension de la situation, ainsi que la compréhension des opérations qui font choisir la stratégie de résolution de problèmes à adopter, en l'occurrence le choix de l'addition ou de la soustraction. Donc, les élèves doivent analyser le problème, choisir une stratégie et l'appliquer, tout comme le font les adultes. Dans ce contexte, le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante est d'aider les élèves dans leur analyse et dans leur compréhension des opérations.

Il est important de noter que les problèmes présentés dans le tableau semblent similaires en raison de leur contexte. Or pour les élèves, chaque situation représente un problème particulier. C'est en maîtrisant ces divers types de problèmes que les élèves acquièrent une maîtrise de l'addition et de la soustraction.

Types de problèmes relatifs à l'addition et la soustraction

Types de problèmes	Quantités inconnues		
Problèmes d'ajout	**Quantité finale inconnue** __ + __ = ?	**Quantité initiale inconnue** ? + __ = __	**Quantité ajoutée inconnue** __ + ? = __
	Paul a 25 cartes. Il en achète 12 autres au dépanneur. Combien de cartes a-t-il à présent? 25 + 12 = ?	Paul a une collection de cartes. Il en achète 12 autres au dépanneur. Il a maintenant 37 cartes dans sa collection. Combien de cartes Paul avait-il au départ? ? + 12 = 37	Paul a 25 cartes. Il en achète d'autres au dépanneur. Il a maintenant 37 cartes. Combien de cartes Paul a-t-il achetées? 25 + ? = 37
Problèmes de retrait	**Quantité finale inconnue** __ – __ = ?	**Quantité initiale inconnue** ? – __ = __	**Quantité retirée inconnue** __ – ? = __
	Ahmed a 97 billes. Il en perd 75 dans un tournoi. Combien de billes a-t-il après le tournoi? 97 – 75 = ?	Après un tournoi de billes, Ahmed compte ses billes. Il en a 22. Il sait qu'il a perdu 75 billes. Combien de billes avait-il au début du tournoi? ? – 75 = 22	Ahmed a 97 billes au début d'un tournoi. À la fin du tournoi, il lui en reste 22. Combien de billes a-t-il perdues? 97 – ? = 22
Problèmes de réunion	**Tout inconnu** __ + __ = ?	**Partie du tout inconnue** __ + ? = __	
	Pierre et Misha préparent un sac de billes qu'ils veulent offrir à leur ami. Pierre dépose 40 billes dans le sac et Misha, 36. Combien de billes le sac contient-il? 40 + 36 = ?	Pierre et Misha préparent un sac de billes qu'ils veulent offrir à leur ami. Pierre dépose 40 billes dans le sac. Misha en dépose aussi. Il y a maintenant 76 billes dans le sac. Combien de billes Misha a-t-il déposées dans le sac? 40 + ? = 76	

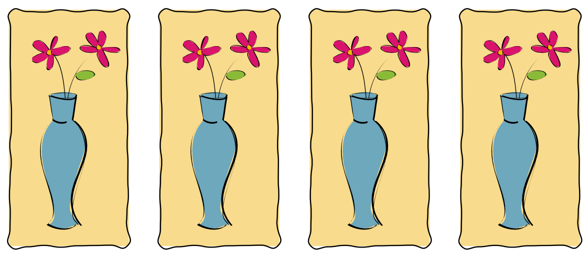
Types de problèmes	Quantités inconnues		
Problèmes de comparaison	**Différence inconnue** __ – __ = ?	**Quantité de référence inconnue** ? – __ = __	**Quantité comparée inconnue** __ – ? = __
	Rihad a 41 petites autos et Pedro en a 28. Combien en a-t-elle de plus que Pedro? 41 – 28 = ?	Pedro a 28 petites autos. Rihad en a 13 de plus. Combien de petites autos a-t-elle? ? – 28 = 13	Rihad a 41 petites autos. Elle en a 13 de plus que Pedro. Combien d'autos Pedro a-t-il? 41 – ? = 13

Les problèmes d'ajout et de retrait sont perçus par les élèves comme des situations actives, plus faciles à modéliser et à « voir », car la quantité initiale augmente ou diminue. Les problèmes de réunion, par contre, supposent une situation statique, car aucune action ou aucun changement ne se produit, ce qui les rend plus abstraits et plus difficiles à comprendre. Les problèmes de comparaison, quant à eux, traitent de la relation entre deux quantités en les opposant : il n'y a donc pas d'action, mais une comparaison d'une quantité à une autre.

Puisque les élèves sont exposés régulièrement à des problèmes dont la quantité finale est recherchée, ils les résolvent plus aisément. Par contre, ils ont plus de mal à résoudre les problèmes dont l'inconnue est la quantité initiale, la quantité ajoutée ou la quantité retirée. Ces problèmes aident à développer une compréhension plus solide des opérations d'addition et de soustraction et des liens entre les opérations. Par exemple, dans le cas des problèmes d'ajout dont l'inconnue est la quantité initiale, les élèves voient plus facilement les avantages de l'addition (p. ex., ? + 12 = 37) qui permet de respecter l'ordre dans lequel se déroule l'action dans le problème. Cela leur permet d'utiliser une stratégie (p. ex., dénombrement ou compte à rebours) afin de déterminer la quantité initiale. Ces élèves démontrent leur compréhension du problème et leur habileté à utiliser une stratégie pour le résoudre. Cependant, ils ne démontrent pas une compréhension du sens de la différence (et de la soustraction). S'ils avaient utilisé la soustraction, soit 37 – 12 = ?, ils auraient démontré une compréhension plus élargie des liens entre les quantités par rapport à cette opération. Mais lorsque les élèves sont en apprentissage, il est inutile de leur imposer une stratégie. L’obligation de soustraire n’aidera en rien les élèves qui ne voient pas la pertinence de cette stratégie. Toutefois, s’ils sont régulièrement en contact avec une variété de problèmes et qu’ils participent aux échanges mathématiques qui suivent, ils arrivent à voir les liens entre diverses stratégies et à assimiler une variété de stratégies. Ils deviennent alors plus performants.

Multiplication et division

La multiplication représente le résultat du rassemblement d’objets à partir de groupes égaux alors que la division représente la répartition d’objets en groupes égaux. Pour comprendre la multiplication et la division, il faut reconnaître les trois types de quantités qui entrent en jeu, soit la quantité totale (p. ex., 8 fleurs), le nombre de groupes égaux (p. ex., 4 pots) et la taille de chaque groupe (p. ex., 2 fleurs par pot).

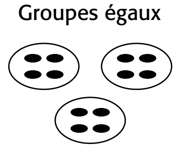
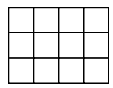


Types de problèmes relatifs à la multiplication et à la division

Types de problèmes	**Quantités inconnues**		
Problèmes de groupes égaux	**Produit inconnu** **__ × __ = ?**	**Taille des groupes inconnue** **(sens de partage)** **__ ÷ __ = ?**	**Nombre de groupes inconnu** **(sens de groupement)** **__ ÷ __ = ?**
	Julie a acheté 5 livres pour ses camarades. Chaque livre a coûté 2 $. Combien a-t-elle dépensé pour tous ces livres? $5 \times 2 = ?$	Julie a 10 livres. Elle veut les donner à 5 de ses camarades de manière que chacun en reçoive le même nombre. Combien de livres recevra chaque camarade? $10 \div 5 = ?$	Julie a acheté 10 livres pour ses camarades et prépare des sacs-cadeaux. Elle met 2 livres dans chaque sac. Combien de sacs-cadeaux Julie a-t-elle utilisés? $10 \div 2 = ?$

Types de problèmes	**Quantités inconnues**		
Problèmes de comparaison	**Produit inconnu** $\_\_ \times \_\_ = ?$	**Taille d'un ensemble inconnue** $\_\_ \div \_\_ = ?$ **ou** $\_\_ \times ? = \_\_$	**Multiplicateur inconnu** $\_\_ \div \_\_ = ?$ **ou** $? \times \_\_ = \_\_$
	Mustapha a 2 $. Michel a quatre fois plus de dollars que lui. Combien d'argent Michel a-t-il? $4 \times 2 = ?$	Michel a 8 $. Il a quatre fois plus d'argent que Mustapha. Combien d'argent Mustapha a-t-il? $8 \div 4 = ?$ ou $4 \times ? = 8$	Michel a 8 $ et Mustapha a 2 $. Michel a combien de fois plus d'argent que Mustapha? $8 \div 2 = ?$ ou $? \times 2 = 8$
Problèmes de combinaison	**Produit inconnu** $\_\_ \times \_\_ = ?$	**Taille d'un ensemble inconnue** $\_\_ \div \_\_ = ?$	
	Ahmed a 3 pantalons et 5 chemises. Combien de tenues différentes Ahmed a-t-il? $3 \times 5 = ?$	Ahmed a des chemises et des pantalons neufs. Il a 15 tenues différentes en tout. S'il a 3 pantalons, combien de chemises Ahmed a-t-il? $15 \div 3 = ?$	

Au début de l'apprentissage de la multiplication, les élèves reconnaissent que la situation présente « plusieurs fois » une même quantité et ils utilisent des groupes égaux pour représenter la situation et l'addition répétée pour obtenir la réponse. À mesure que les élèves progressent, il est important qu'ils y voient le concept de multiplication plutôt que celui d'addition et qu'ils apprennent d'autres représentations. La disposition rectangulaire, un agencement de rangées et de colonnes, s'avère un modèle puissant dans l'apprentissage de la multiplication et permet de voir cette opération sous un angle différent (pour plus de détails, voir *Énoncé 3 – Représentations des opérations*, p. 116-145).

Trois fois quatre	Addition répétée	Groupes égaux	Disposition rectangulaire
3×4	$4 + 4 + 4$		4 3 

En résolvant une variété de problèmes et en discutant de stratégies, les élèves en viennent à établir et à saisir le lien entre le mot « fois » et le signe « × », étape cruciale dans le développement de la compréhension de la multiplication. Une fois leur sens de la multiplication bien ancré, ils ont recours plus régulièrement à l'opération de multiplication pour obtenir les réponses.

Dans les problèmes présentés aux élèves, on associe trop souvent la division à un seul sens, soit le partage. Le sens de groupement est habituellement négligé. La division a un **sens de partage** lorsque la quantité totale et le nombre de groupes sont connus (p. ex., 3 élèves veulent se partager équitablement 15 pommes et on cherche le nombre de pommes que chacun recevra).

15 ÷ 3 = ?

quantité totale — nombre de groupes — taille des groupes

La division a un **sens de groupement** lorsque la quantité totale et le nombre d'éléments dans chaque groupe (taille des groupes) sont connus (p. ex., on a 15 pommes et on veut les placer dans des sacs, 3 pommes par sac; on cherche le nombre de sacs qu'il faut).

15 ÷ 3 = ?

quantité totale — taille des groupes — nombre de groupes

Il est essentiel de traiter des deux types de problèmes, puisqu'ils sont la base de l'intégration d'autres concepts mathématiques. Il n'est pas nécessaire que les élèves sachent le nom des types de problèmes, mais il est essentiel qu'ils aient l'occasion d'en résoudre de divers types, tout en employant une variété de stratégies. La situation d'apprentissage *Gomme santé!* (p. 167-180) traite des deux sens de la division.

Dans une division, le concept de reste survient lorsque le quotient n'est pas un nombre entier. Par exemple, 10 ÷ 3 = 3,33… ou 3 reste 1. Pour plusiers élèves, le reste n'est qu'un nombre qui paraît dans la « recette » de la division (p. ex., 123 ÷ 5 = 24 reste 3). Cependant, lorsque l'opération surgit d'un contexte, le reste doit être traité afin de pouvoir répondre adéquatement au problème. Ainsi, les élèves peuvent développer l'habileté à traiter le reste s'ils sont en situation de résolution de problèmes. Le tableau ci-après présente plusieurs façons de traiter le reste.

Divers traitements du reste

Traitement du reste	Exemple de problème
Le reste est réparti équitablement et exprimé sous la forme d'un nombre décimal.	Lors d'un tirage à leur club d'auto, 4 amis ont gagné le gros lot de 3 457 \$ qu'ils se sont partagé également. Quel montant chaque personne a-t-elle reçu? $3\ 457 \div 4 = 864$ reste 1 *Exemple de réponse* : Chaque personne a reçu 864,25 \$.
Le reste est réparti équitablement et exprimé sous la forme d'une fraction.	Une grand-maman achète un sac de 35 réglisses pour ses 3 petits-enfants. Si chaque enfant en reçoit le même nombre, combien de réglisses chacun reçoit-il? $35 \div 3 = 11$ reste 2 *Exemple de réponse* : Chaque enfant reçoit $11\frac{2}{3}$ réglisses.
Le reste est ignoré.	Daniel, Sophia, Ahmed et Franco ont un total de 3 458 blocs pour construire un château. Si chacun reçoit le même nombre de blocs, combien chacun en reçoit-il? $3\ 458 \div 4 = 864$ reste 2 *Exemple de réponse* : Chacun reçoit 864 blocs.
Le reste est réparti parmi les groupes.	M. Buzini veut que les élèves accomplissent une tâche en groupe de 2. Il a 23 élèves. Comment organisera-t-il ses élèves? $23 \div 2 = 11$ reste 1 *Exemple de réponse* : Il formera 10 groupes de 2 élèves et 1 groupe de 3 ou 11 groupes de 2 élèves et un élève travaille seul.
Le reste entraîne la majoration du quotient de 1.	La directrice d'une école veut emmener tous les élèves lors d'une sortie éducative. Il y a 587 élèves dans l'école et il est possible d'accommoder un maximum de 72 élèves par autobus. Combien d'autobus doit-on réserver? $587 \div 72 = 8$ reste 11 *Exemple de réponse* : On doit réserver 9 autobus.
Le reste est la réponse.	À la foire, les organisateurs décident de remettre gratuitement 350 billets pour les manèges aux premiers visiteurs à raison de 4 billets par visiteur. Combien de billets n'ont pas été remis? $350 \div 4 = 87$ reste 2 *Exemple de réponse* : Deux billets n'ont pas été remis.

FAITS NUMÉRIQUES DE BASE RELATIFS AUX OPÉRATIONS FONDAMENTALES

L'apprentissage des faits numériques de base associés aux quatre opérations est incontournable. Comme leur nom l'indique, ils sont la base des opérations et un outil indispensable pour travailler avec de plus grands nombres. Il est important que les élèves apprennent à maîtriser les faits numériques de base. Or, il existe des stratégies d'enseignement qui permettent aux élèves de les apprendre.

La maîtrise des faits numériques de base repose en grande partie sur la capacité qu'ont les élèves d'établir des relations entre les nombres et de comprendre les opérations.

(Van de Walle et Folk, 2005, p. 156, traduction libre)

Il n'est pas nécessaire d'apprendre les faits par cœur en les répétant et en utilisant des cartes-éclair. Cette façon de faire, qui entraîne la mémorisation des faits en tant que connaissances distinctes, exige la mémorisation de près de 400 faits isolés. Elle sollicite beaucoup la mémoire, puisque l'apprentissage des faits n'est pas basé sur la création de liens.

L'apprentissage des faits numériques doit plutôt s'appuyer sur l'habileté des élèves à créer des liens et sur leurs connaissances antérieures. Le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante est de présenter des stratégies et d'outiller les élèves. Par exemple, pour apprendre les faits de multiplication par 9, les élèves peuvent se servir de la stratégie « *c'est un ensemble de moins que* » : on multiplie le nombre par 10 et on soustrait un ensemble. Un élève pourrait donc tenir le raisonnement suivant : 9×8, c'est comme $10 \times 8 = 80$, moins un groupe de 8; c'est donc 72. Cette stratégie l'aide à répondre correctement et rapidement et à comprendre les quantités en jeu dans cette multiplication.

Avec la pratique, les élèves ont de moins en moins recours aux stratégies et développent des automatismes pour trouver plusieurs faits de base. Les élèves seront peut-être incapables d'énoncer spontanément toutes les réponses des faits numériques de base, mais pourront les trouver rapidement en ayant recours aux stratégies apprises, comme c'est le cas de plusieurs adultes qui ont un excellent sens du nombre. Les faits sont appris jusqu'à 9×9 et il n'est pas nécessaire d'apprendre les faits de multiplication jusqu'à 12. Si les élèves ont besoin de multiplier 8 par 12, ils peuvent avoir recours à la table de 10 et la table de 2 (p. ex., $12 \times 8 = 10 \times 8 + 2 \times 8$) ou encore multiplier 8 par 6 et doubler la réponse.

La liste ci-après présente les stratégies les plus répandues pour l'apprentissage des faits numériques de base. En général, les élèves n'utilisent pas tous les mêmes stratégies. De plus, ils n'emploient pas toutes les stratégies existantes, mais en choisissent habituellement une ou plusieurs, selon leur habileté et les faits numériques traités.

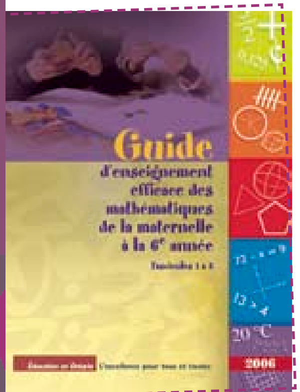
Stratégies pour l'apprentissage des faits numériques de base relatifs à l'addition et à la soustraction :

- « 1 de plus » et « 2 de plus » (5 + 1, c'est 1 de plus que 5; c'est donc 6).
- Les faits numériques avec 0 (donc l'effet de l'élément neutre : 1 + 0 = 1, 1 – 0 = 1).
- L'utilisation des doubles (6 + 6, 2 + 2).
- Les voisins des doubles ou les doubles plus 1 (5 + 4 peut être perçu comme 4 + 4, et 1 de plus).
- Le regroupement pour former 10 (8 + 4 = 8 + 2 + 2; c'est donc 10 + 2, ou 12).
- La commutativité de l'addition (je sais combien font 5 + 7, alors je sais combien font 7 + 5).
- La soustraction comme opération inverse de l'addition (puisque 5 + 2 = 7, il s'ensuit que 7 – 5 = 2).
- La soustraction sous l'angle de l'addition (13 – 7 c'est 8, 9, 10, 11, 12, 13; donc, une différence de 6).
- « 1 de moins » et « 2 de moins » (11 – 2, c'est 11, 10, 9).
- Le décompte par intervalles de 2 ou de 5 (à pratiquer sur une grille de nombres).
- Le regroupement par dizaines avec des nombres comportant déjà des dizaines (12 + 9, c'est d'abord 12 + 8 = 20 auquel on ajoute ensuite 1 pour obtenir une somme de 21).
- L'addition ou la soustraction des dizaines suivie de celle des unités (15 + 13, c'est 10 + 10 = 20 et 5 + 3 = 8, donc 20 + 8 = 28).

Stratégies pour l'apprentissage des faits numériques de base relatifs à la multiplication et à la division :

- La commutativité de la multiplication (je sais combien font 5 × 9, alors je sais combien font 9 × 5).
- Les faits numériques avec 0 et 1 (0 comme élément absorbant de la multiplication : 10 × 0 = 0; et 1 comme élément neutre de la multiplication et de la division : 1 × 9 = 9; 9 ÷ 1 = 9).
- Les doubles (faire le lien avec la table de 2 : 2 × 4 = 4 + 4; c'est donc 8).

- Le double et encore le double (aide à apprendre la table de 4 : pour trouver 4×6, on fait $2 \times 6 = 12$ et $12 + 12 = 24$; donc $4 \times 6 = 24$).
- Le double et un ensemble de plus (on sait que $2 \times 4 = 4 + 4$, soit 8; pour 3×4, on fait $8 + 4 = 12$).
- Les faits numériques relatifs à 5 (en trouvant les multiples de 5 sur une grille de nombres).
- Un ensemble de plus (si on sait que $7 \times 6 = 42$, alors pour 8×6, on ajoute 6 à 42 pour obtenir 48).
- Un ensemble de moins et les faits numériques de la multiplication par 9 (puisque $6 \times 10 = 60$, alors pour 6×9, il y aura 1 groupe de moins; on aura $60 - 6$, soit 54).
- La moitié, puis le double, s'il y a au moins un facteur pair [6×8, c'est (3×8) deux fois, soit $24 + 24 = 48$].
- La relation inverse de la division et de la multiplication (puisque $4 \times 5 = 20$ donc $20 \div 4 = 5$).



atelier.on.ca

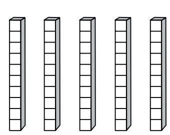
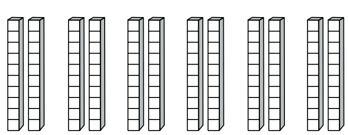
Des explications sur les stratégies d'apprentissage et d'enseignement relatives aux faits numériques de base ainsi que des activités et des jeux sont proposés dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 14-33) ainsi que dans le module *Opérations fondamentales*, sur le site atelier.on.ca.

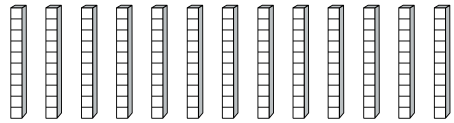
EFFET DES OPÉRATIONS

Chaque opération produit un effet sur les quantités en cause. Selon l'opération, certaines quantités augmentent ou diminuent. Elles peuvent augmenter ou diminuer de beaucoup ou de peu. Suivre l'effet des opérations sur les nombres permet aux élèves d'établir les liens entre les opérations et d'anticiper le résultat d'une opération. Par exemple, si on soustrait 8 de 160, on remarquera peu d'effet, car la différence entre 160 et 152 est relativement petite. Par contre, si on divise 160 par 8, l'effet produit est grand, car le quotient obtenu, soit 20, est beaucoup plus petit que 160. On peut aussi comparer l'effet produit par une addition à celui produit par une multiplication. Comparativement à la multiplication, l'addition fait augmenter un nombre de peu. Par exemple, lorsque le nombre 160 est multiplié par 8, on obtient 1 280, alors que si on lui ajoute 8, on n'obtient que 168. Les gens qui possèdent un bon sens des opérations reconnaissent l'effet des opérations sur les nombres naturels, mais les élèves en apprentissage sont souvent impressionnés par l’effet, par exemple, de la multiplication. Une mise en garde s’impose : il faut faire preuve de prudence lorsqu’on généralise, car les opérations sur les nombres décimaux ou les fractions peuvent avoir des effets différents que ceux sur les nombres naturels. Dans certains cas, l’effet peut même être l’inverse. En effet, si on multiplie un nombre naturel par un autre nombre naturel, le produit est plus grand que les deux facteurs (p. ex., si on multiplie 3 par 6, le produit 18 est plus grand que 6 et 3), alors que si on multiplie une fraction propre par un nombre naturel, le produit est plus petit qu’un des deux facteurs (p. ex., si on multiplie $\frac{1}{2}$ par 6, le produit 3 est plus petit que 6).

Les élèves doivent apprendre à maîtriser l’effet de la multiplication et de la division par des multiples de 10. L’explication de ces opérations se résume souvent à l’énoncé suivant : « Lorsqu’on multiplie par 10, on ajoute un zéro et lorsqu’on divise par 10, on enlève un zéro ». Cet énoncé est à déconseiller, car il ne tient pas compte de la compréhension des opérations et les élèves sont alors encouragés à appliquer un « truc » de façon mécanique, sans pouvoir faire de liens au cours d’une multiplication ou d’une division par des nombres tels que 20, 300 ou 5 000.

Il est utile pour les élèves de reconnaître que des opérations comme 5 × 20 ou 600 ÷ 20 peuvent être considérées comme 5 × 2 dizaines, 6 centaines ÷ 2 dizaines ou 60 dizaines ÷ 2 dizaines. On peut alors mieux comprendre l’apparition ou la disparition des chiffres « 0 » dans les opérations.

Opération	Interprétation	Résultat
5 × 10	5 × 1 dizaine 	5 dizaines, c’est 50
6 × 20	6 × 2 dizaines 	12 dizaines, c’est 120

Opération	Interprétation	Résultat
130 ÷ 10	130 séparé en groupes d'une dizaine 	13
23 × 300	23 × 3 centaines	69 centaines, c'est 6 900
60 × 3	6 dizaines × 3	18 dizaines, c'est 180
120 ÷ 4	12 dizaines séparées en 4 groupes	3 dizaines, c'est 30
340 ÷ 20	34 dizaines séparées en groupes de 2 dizaines	17

ESTIMATION DU RÉSULTAT D'UNE OPÉRATION

De bonnes habiletés d'estimation et d'approximation permettent de traiter plus efficacement les quantités dans notre quotidien.

(Department of Education and Training of Western Australia, 2005, p. 162, traduction libre)

Estimer le résultat d'une opération, c'est en déterminer la valeur approximative par écrit ou mentalement. Les élèves éprouvent souvent de la difficulté avec l'estimation, car ils ont du mal à reconnaître que plusieurs réponses peuvent être acceptables pour une situation donnée. Ainsi, il peut leur arriver, pour une estimation, de calculer la réponse exacte et de l'arrondir.

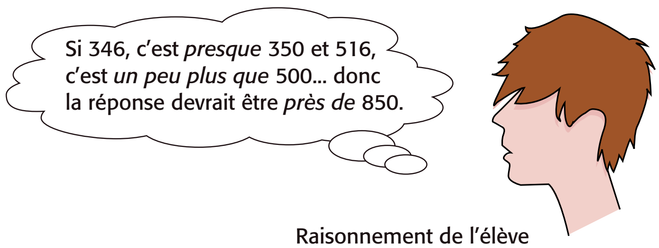
L'estimation est extrêmement utile dans les situations quotidiennes. Il peut même arriver qu'elle soit la seule réponse possible ou la réponse recherchée. Par exemple, en faisant des emplettes, on veut connaître le coût total de ses achats pour être en mesure de respecter son budget. Dans ce cas, on veut une idée approximative du résultat et non le coût total exact.

Les élèves développeront leur sens du nombre ainsi que leur sens des opérations en analysant des problèmes où la situation prescrit l'utilisation d'estimations et d'approximations.

L'estimation sert souvent à donner un aperçu du résultat escompté ou à vérifier la vraisemblance de la solution. Les élèves doivent développer le réflexe d'effectuer mentalement une estimation rapide aussitôt qu'un calcul doit être effectué de manière à obtenir une idée générale du résultat. Malheureusement, plusieurs ne font pas le lien entre l'estimation et le résultat exact; l'estimation est alors perçue comme un autre calcul qu'il faut effectuer et non pas comme une stratégie réalisée informellement qui vient confirmer la vraisemblance du résultat du calcul.

L'enseignant ou l'enseignante doit utiliser diverses stratégies d'enseignement pour faire prendre conscience aux élèves de la raison d'être de l'estimation. Par exemple, les élèves ne voient pas la pertinence de l'estimation si le résultat exact accompagne toujours l'estimation. L'enseignant ou l'enseignante doit présenter des situations dont la solution du problème est une estimation ou des problèmes qui n'exigent pas une réponse précise (p. ex., déterminer la part de la dette nationale pour chaque citoyen ou faire les achats du matériel scolaire en prévision de l'an prochain). La situation d'apprentissage *La salle de théâtre* (p. 181-194) est un exemple d'activité visant l'apprentissage de l'estimation.

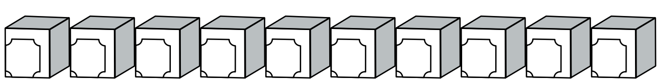
Puisqu'au quotidien, les estimations sont souvent le fruit d'un calcul mental informel, il est donc normal que les élèves puissent s'y exercer et apprennent à estimer dans ce contexte. L'enseignant ou l'enseignante devrait donc leur demander d'estimer le résultat d'une opération (sans utiliser papier et crayon) et de communiquer ce résultat approximatif (p. ex., 346 + 516, c'est près de 850).



Raisonnement de l'élève

On peut aussi présenter une série d'opérations et demander aux élèves d'effectuer seulement celles qui répondent à une certaine condition (p. ex., effectuer celles dont le résultat est supérieur à 300). Cette stratégie d'enseignement peut être intégrée à la résolution de problèmes. Dans le problème suivant, les élèves utilisent leur habileté d'estimation afin de déterminer quels calculs doivent être effectués avec précision :

> *Dans un entrepôt, il y a plusieurs sacs de balles qui contiennent soit 1 256, 542, 368, 1 856, 325, 1 379 ou 730 balles. Afin de faciliter le transport, les sacs sont mis dans des boîtes pouvant contenir entre 2 000 et 3 000 balles. Sur chaque boîte, il faut indiquer clairement le nombre exact de balles qu'elle contient. Détermine 10 combinaisons différentes de sacs qu'une boîte peut contenir.*



L'élève pourrait par exemple, après plusieurs estimations, décider d'effectuer :

$$\begin{array}{r} \mathbf{1\,856} \\ \underline{+\ \mathbf{542}} \\ \mathbf{2\,398} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} \mathbf{542} \\ \mathbf{368} \\ \underline{+\ \mathbf{1\,379}} \\ \mathbf{2\,289} \end{array}$$

Puisque le résultat d'une estimation représente une quantité approximative plutôt que précise, il ne devrait pas être communiqué exclusivement à l'aide d'un nombre (p. ex., au lieu d'affirmer que c'est 350, on peut dire que c'est *environ* 350). De plus, le résultat d'une estimation peut aider à indiquer l'ordre de grandeur ou l'envergure de la réponse (p. ex., ce sera *au moins*…, ce sera *plus que*…, la réponse doit être *entre*… *et*…, ou la réponse sera *plus grande que*…).

L'aptitude à estimer le résultat d'une opération est une caractéristique du sens des opérations. Elle manifeste une habileté à utiliser les nombres et les opérations de façon polyvalente. Pour estimer, les élèves utilisent une variété de stratégies basées sur leur sens du nombre et leur sens des opérations comme l'arrondissement, l'utilisation de repères, l'application des propriétés des opérations, la décomposition ou la compensation. Pour des exemples de stratégies d'estimation du résultat d'une opération, consulter *Énoncé 3 – Représentations des opérations* (p. 116-145) ainsi que le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 68-70).

Le degré de précision de l'estimation du résultat d'une opération dépend de la situation et du sens du nombre. Il serait important, en fin de cycle, de discuter des intervalles d'estimation acceptables dans divers contextes. Par exemple, l'estimation de la différence entre 315 et 185 pourrait être un nombre entre 100 et 200. L'estimation de la différence entre 10 853 et 9 445 serait plutôt un nombre entre 1 000 et 2 000.

L'estimation du résultat d'une opération exige une bonne compréhension de l'effet des opérations. L'arrondissement est souvent utilisé pour estimer un résultat et il est important de prendre conscience de ses répercussions sur le résultat de l'estimation. Par exemple, un arrondissement à la centaine près crée généralement un écart plus grand entre le nombre réel et la valeur arrondie qu'un arrondissement à la dizaine près.

Exemple

353 + 129

Résultat exact : 482

Estimation en arrondissant les nombres à la centaine près : 400 + 100 = 500

Estimation en arrondissant les nombres à la dizaine près : 350 +130 = 480

L’arrondissement des nombres a peu d’influence sur le résultat d’une addition ou d’une soustraction puisque ces opérations produisent peu d’effets sur les nombres. L’arrondissement peut tout de même aider à préciser l’estimation. Par exemple, le résultat de 387 + 295 est d’*environ* 700. On peut cependant affirmer que le résultat est *moins que* 700, étant donné que les deux nombres ont été arrondis à la hausse (400 + 300). De même, 1 300 – 1 170 est *environ* égal à 100. Or, l’arrondissement à la hausse de 1 170 à 1 200 nous permet de préciser que la différence est *plus que* 100.

L’arrondissement peut avoir un effet notable sur l’estimation du résultat d’une multiplication, puisque celle-ci produit un changement plus important dans la quantité. Il faut donc être conscient que si un nombre est arrondi à la baisse, l’estimation sera inférieure au produit exact et si un nombre est arrondi à la hausse, l’estimation sera supérieure au résultat. Si les deux nombres sont arrondis, à la hausse ou à la baisse, l’effet sur l’estimation sera plus grand que si seulement un nombre avait été arrondi. Par exemple si, pour estimer 28 × 1 195, on utilise 30 × 1 200, on obtient 36 000. Il serait alors plus juste de dire que le résultat de la multiplication est *moins que* 36 000. Une fois que les élèves maîtrisent le sens des opérations, ils remarquent qu’il peut parfois être avantageux d’arrondir un des nombres à la hausse et l’autre à la baisse pour équilibrer l’effet de l’arrondissement. Ce constat ne fait pas l’objet d’un enseignement particulier, mais les effets de l’arrondissement et de l’estimation sur les opérations peuvent faire l’objet d’échanges mathématiques.

L’arrondissement des nombres pour estimer le résultat d’une division a sensiblement le même effet que dans une multiplication. En arrondissant le dividende à la hausse, le quotient sera supérieur au résultat exact et l’arrondissement à la baisse aura l’effet contraire. En arrondissant le diviseur, il y aura aussi un effet sur le quotient. Si l’arrondissement du diviseur est à la hausse, le quotient sera inférieur; si l’arrondissement est à la baisse, le quotient sera supérieur.

L’analyse de l’effet de l’arrondissement peut se faire en situations de résolution de problèmes comme celle-ci :

M. David veut vérifier, en début d’année scolaire, si le secrétariat lui a remis assez de crayons pour chaque élève de sa classe. Il donne un nouveau crayon à chaque élève chaque mois, sauf en juin. Il a reçu 1 boîte contenant 250 crayons, et il a 24 élèves inscrits dans sa classe. Aura-t-il assez de crayons pour toute l’année?

Les élèves n’ont pas à effectuer la division 250 ÷ 9, car s’ils ont un bon sens des opérations et de l’estimation, ils s’aperçoivent rapidement que 250 crayons ÷ 10 mois donne 25 crayons par mois. Le choix d’arrondir le nombre 9 à 10 entraîne un nombre inférieur de crayons par groupe, car il y a plus de groupes. Les élèves pourraient alors confirmer qu’il y aura suffisamment de crayons, puisque l’estimation donne 25 crayons par mois pendant 10 mois, mais qu’en réalité, on a besoin de 24 crayons par mois pendant 9 mois.

Énoncé 2 - Relations entre les opérations

Comprendre les propriétés des opérations et les relations entre ces opérations permet de les utiliser avec plus de souplesse.

L'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre les opérations nous permet de construire des phrases numériques et de les manipuler avec souplesse de manière à résoudre des équations et à simplifier des calculs.

(Department of Education and Training of Western Australia, 2005, p. 66, traduction libre)

Au cycle primaire, les élèves ont établi des liens entre les opérations à travers diverses activités. Par exemple, ils savent que l'addition et la soustraction sont des opérations inverses et que l'addition est commutative. Avec le temps, ils développent leur sens du nombre et leur sens des opérations et s'en servent graduellement avant d'effectuer des opérations. Cette pratique, quoique souvent informelle et mentale, demeure toutefois essentielle à la compréhension des relations entre les nombres et entre les opérations.

Au cycle moyen, les élèves consolident leur sens des opérations en examinant les relations entre celles-ci. Ils sont amenés :

- à établir des liens entre les opérations;
- à comprendre les propriétés des opérations;
- à appliquer la priorité des opérations;
- à développer leur habileté en calcul mental en établissant des liens entre les nombres et les opérations;
- à résoudre des séries d'opérations apparentées.

LIENS ENTRE LES OPÉRATIONS

Les opérations fondamentales, soit l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont intimement reliées malgré leurs différences apparentes. Plus les élèves ont l'occasion de manier les opérations, plus ils peuvent remarquer et comprendre les liens entre elles.

L'addition et la soustraction sont des opérations inverses. Or, lorsqu'ils sont en apprentissage, les élèves ont souvent de la difficulté à résoudre des équations telles que $17 + \square = 31$. Plusieurs enseignants ou enseignantes incitent alors leurs élèves à

Relations entre les opérations

- L'addition et la soustraction sont des opérations inverses.
- La multiplication et la division sont des opérations inverses.
- La multiplication peut être associée à une addition répétée.
- La division peut être associée à une soustraction répétée.

utiliser l’opération inverse, soit la soustraction. Or, il peut s’agir d’apprendre un truc, à moins que les élèves comprennent pourquoi la soustraction est une stratégie possible. Ils doivent d’abord saisir la relation du tout et de ses parties ainsi que le sens d’une différence. Par exemple, un nombre peut être représenté comme suit :

31

17	14

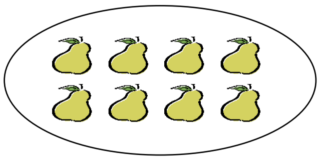
Cette façon de représenter la relation entre un nombre et ses parties permet de voir que la soustraction est l’opération inverse de l’addition. Ainsi, puisque $17 + 14 = 31$ et $14 + 17 = 31$, donc $31 - 17 = 14$ et $31 - 14 = 17$. De plus, les élèves peuvent voir pourquoi l’addition est commutative ($14 + 17 = 17 + 14$) et pourquoi la soustraction ne l’est pas ($31 - 17 \neq 17 - 31$). Ceux qui ont acquis un bon sens du nombre et qui sont capables de décomposer et de regrouper des nombres peuvent mettre leurs connaissances à profit pour résoudre plus efficacement des équations telles que $17 + \square = 31$ en comprenant que l’on cherche la différence entre 17 et 31.

La multiplication et la division sont aussi des opérations inverses. On peut également les relier au concept de tout et de ses parties. Dans la multiplication, on regroupe les parties qui sont des groupes égaux, alors que dans la division, on décompose un tout en groupes égaux. À partir de cette relation entre la multiplication et la division, les élèves peuvent utiliser les faits numériques relatifs à la multiplication pour effectuer une division. Il arrive souvent que les élèves saisissent mal la relation d’opération inverse entre la multiplication et la division (p. ex., reconnaître que $\_\_\_ \times 6 = 234$ peut se résoudre en faisant $234 \div 6 = \_\_\_$), même après avoir effectué des divisions et vérifié leurs calculs. Il est donc essentiel de revenir régulièrement sur le sens de chacune des opérations en contexte de résolution de problèmes.

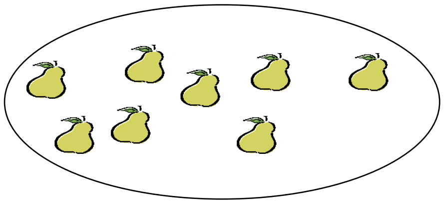
Le lien entre la multiplication et l’addition est souvent le point de départ pour présenter le concept de multiplication. Ainsi, une façon de comprendre la multiplication est d’y associer l’addition répétée; par exemple 4×5, c’est $5 + 5 + 5 + 5$, soit 20. Dans le même ordre d’idées, la division peut être associée à une soustraction répétée, mais pas de la même façon. Le produit d’une multiplication est égal à la somme résultant de l’addition répétée, alors que le quotient d’une division est égal au nombre de soustractions répétées (p. ex., pour calculer 20 ÷ 5, on fait 20 – 5 = 15, 15 – 5 = 10, 10 – 5 = 5, 5 — 5 = 0; on a soustrait 4 fois; donc 20 ÷ 5 = 4).

Il faut du temps pour que les élèves assimilent ces relations. Pour y parvenir, l'enseignant ou l'enseignante peut avoir recours à des activités concrètes, à la résolution de problèmes et à des échanges mathématiques orientés vers les liens entre les opérations. Il ou elle peut aussi utiliser l'apprentissage guidé en modelant les opérations et en explicitant son raisonnement.

En plus des opérations inverses, les élèves peuvent utiliser le principe de **compensation** qui découle de la relation d'égalité. Il s'agit de modifier les termes d'une opération sans pour autant en modifier le résultat. Au cycle primaire, les élèves ont acquis le concept de conservation du nombre en comprenant que le nombre d'objets dans un ensemble demeure constant même si les objets sont dispersés.



8 poires



8 poires

Le principe de compensation fait en quelque sorte appel à la conservation de l'égalité des quantités lors d'opérations entre les nombres.

Selon ce principe, on peut modifier les parties d'une addition sans en changer la somme. Par exemple, pour calculer 143 + 218, on peut intervenir sur le nombre 143 de manière à faciliter le calcul. Pour ce faire, on soustrait 3 du premier terme et on additionne 3 au deuxième terme. De façon concrète, si on considère qu'on a 143 objets dans une pile et 218 objets dans une deuxième pile, on déplace 3 objets de la première pile vers la deuxième pile. Le nombre total n'a pas changé. L'expression numérique devient donc 140 + 221. Voici la phrase mathématique qui illustre ce qui se produit : 143 + 218 = 143 – 3 + 218 + 3. Donc, 143 + 218 = 140 + 221, pour une somme de 361.

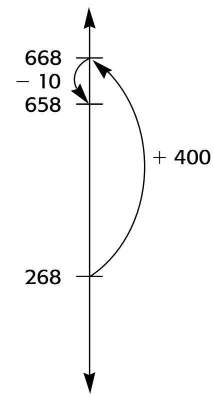
On utilise la compensation pour rendre une expression plus facile à évaluer. On peut s'en servir pour ajouter une quantité afin d'obtenir un nombre plus facile à manipuler, comme un multiple de 10 ou de 25, et soustraire la même quantité à la fin. Dans l'exemple suivant, on ajoute 10 au nombre 390 pour obtenir le nombre 400, qui est facile à additionner. On soustrait ensuite 10 de la réponse obtenue.

268 + 390 = ?

268 + 400 = 668

668 – 10 = 658

Donc, 268 + 390 = 658



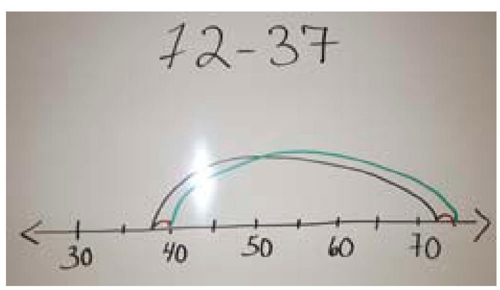
On peut visualiser la situation en utilisant une droite numérique verticale. On voit que dans ce cas, un nombre supérieur à celui de l'expression (+ 400) a été ajouté. Le résultat recherché a ainsi été dépassé. Il faut donc retrancher l'excédent (– 10).

La compensation s'applique aussi à la soustraction. Puisqu'on cherche la différence entre les termes, on modifie les deux termes de la même façon pour conserver la même différence. On peut ajouter une même quantité aux deux termes ou on peut soustraire une même quantité des deux termes. Par exemple, pour calculer 72 – 37, on peut ajouter 3 à 72 pour obtenir un nombre plus familier, soit 75, tout en additionnant 3 à 37 afin de maintenir le même écart.

72 – 37 = (72 + 3) – (37+ 3)

72 – 37 = 75 – 40

72 – 37 = 35



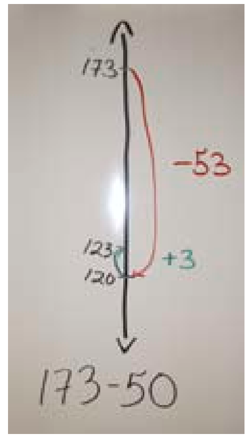
Pour cette même expression, on pourrait aussi compenser en soustrayant 2 de chaque terme.

72 – 37 = (72 – 2) – (37 – 2)

72 – 37 = 70 – 35

72 – 37 = 35

On peut aussi utiliser la compensation pour soustraire un plus grand nombre que ce qui est demandé dans l'expression mathématique pour ensuite ajouter à la différence. Dans l'exemple suivant, on soustrait 53 (3 de plus qu'il ne faut) pour faciliter la soustraction. On ajoute ensuite 3 au résultat.



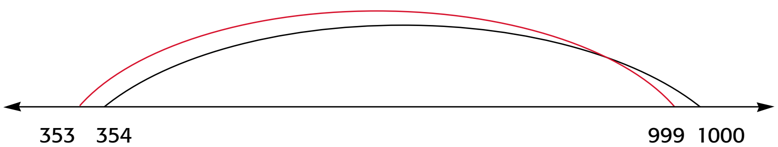
$173 - 50 = ?$

$173 - 53 = 120$

$120 + 3 = 123$

Donc, $173 - 50 = 123$

La compensation dans la soustraction fait appel au principe de la **différence constante**, à savoir que l'écart entre deux nombres est le même si on leur ajoute ou si on leur enlève une même quantité (p. ex., la différence entre 645 et 185 est la même que celle entre 650 et 190 ou que celle entre 640 et 180). Le concept de différence constante peut servir pour effectuer des opérations telles que la soustraction avec des zéros (p. ex., 1 000 − 354 = 999 − 353).



$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ 354 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 999 \\ -\ 353 \\ \hline \end{array}$$

On peut aussi utiliser la compensation dans la multiplication. Par exemple, durant l'apprentissage des faits numériques de base reliés à la multiplication, les élèves peuvent apprendre facilement les faits de 9 comme étant les faits de « 10 moins un groupe de… » (p. ex., 6×9, c'est $6 \times (10 - 1) = (6 \times 10) - (6 \times 1)$). On peut aussi compenser en utilisant la multiplication et son opération inverse, la division (p. ex., $5 \times 34 = (5 \times 2) \times (34 \div 2)$, soit $10 \times 17 = 170$). Ainsi, si on double un facteur, on doit prendre la moitié de l'autre facteur.

La compensation est une stratégie très puissante en calcul. Or, elle ne doit pas être perçue comme une série de règles ou de procédures. La compréhension de la compensation doit plutôt être construite à partir du sens du nombre et du sens des opérations des élèves.

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS

Un bon sens des opérations repose sur une bonne connaissance des relations entre les nombres et entre les opérations. Les propriétés des opérations sont des caractéristiques qui sont propres aux opérations, peu importe les nombres en cause; à titre d'exemple, l'addition est commutative puisque $3 + 5 = 5 + 3$, $4 + 7 = 7 + 4$. La compréhension des propriétés des opérations permet de développer des stratégies efficaces de calcul; par exemple, puisque la multiplication est distributive, on peut calculer 5×12 en effectuant $(5 \times 10) + (5 \times 2)$.

Au cycle primaire, les élèves ont pu aborder certaines de ces propriétés de façon intuitive. Les élèves du cycle moyen doivent comprendre les propriétés des opérations présentées ci-après et apprendre à les utiliser en situations de résolution de problèmes.

Commutativité

Une opération est commutative si son résultat demeure inchangé lorsqu'on intervertit l'ordre des termes qui la composent. L'addition et la multiplication sont commutatives. Par exemple, on peut démontrer la commutativité de l'addition comme suit : il y a 44 pommes dans un panier et 32 dans un autre. Le nombre total de pommes sera le même que l'on ajoute les pommes du premier panier à celles du deuxième ou qu'on fasse le contraire. Ainsi, 44 + 32 est égal à 32 + 44. On reconnaît alors que si les termes d'une addition sont intervertis, le résultat demeure le même.

On peut aussi démontrer la commutativité de la multiplication. Par exemple, 8×3 et 3×8.

♥ ♥ ♥		
♥ ♥ ♥		
♥ ♥ ♥		
♥ ♥ ♥		♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥
♥ ♥ ♥		♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥
♥ ♥ ♥		♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥
♥ ♥ ♥		
♥ ♥ ♥		
8×3	$=$	3×8

Les deux dispositions précédentes représentent la même quantité totale, organisée de deux façons différentes. De ce fait, elles illustrent deux situations différentes. Ainsi, 8 × 3 représente 8 rangées de 3 objets, tandis que 3 × 8 représente 3 rangées de 8 objets. Il est important que les élèves le réalisent. On peut aussi utiliser un exemple du quotidien. Par exemple, l'enseignant ou l'enseignante invite trois élèves qui ont exactement un frère ou une sœur à venir représenter au tableau les enfants de leur famille. Le nombre total d'enfants est représenté par 3 × 2 enfants, pour un total de 6 enfants (Figure 1). Ensuite, l'enseignant ou l'enseignante fait la même démarche avec deux enfants qui ont exactement deux frères ou sœurs. Le nombre total d'enfants est représenté par 2 × 3 enfants, pour un total de 6 enfants (Figure 2).

Figure 1

Michel et son frère Terry et sa sœur Hannah et sa sœur

Figure 2

Jeanne et ses frères Miguel et ses sœurs

Les deux phrases mathématiques, 3 × 2 = 6 et 2 × 3 = 6, indiquent un même résultat, même si l'ordre des facteurs est inversé. Les élèves peuvent alors comprendre que 3 familles de 2 enfants ou 2 familles de 3 enfants donnent un total de 6 enfants, sans que les situations soient identiques.

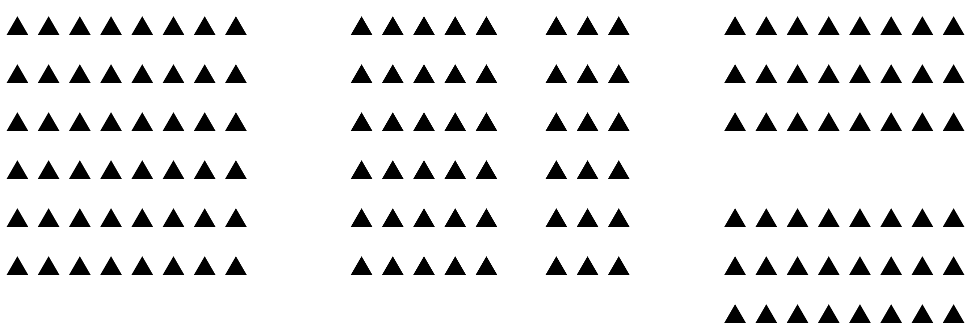
Lorsqu'on utilise la commutativité de la multiplication, on s'intéresse davantage à la réponse, sans égard à la situation. Par exemple, même si on cherche 12 × 2, on peut choisir de calculer 2 × 12 si le résultat est plus facile à obtenir, même si les deux expressions ne représentent pas la même situation. Au début de l'apprentissage de la multiplication, les élèves perçoivent souvent la multiplication comme une addition répétée. En tentant de résoudre une variété de problèmes, ils peuvent utiliser la commutativité de la multiplication pour développer une stratégie plus efficace de calcul. Par exemple, les élèves qui utilisent l'addition répétée reconnaîtraient que 2 × 12 (12 + 12) est plus simple et moins long à représenter et à calculer que 12 × 2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2).

Une disposition rectangulaire est un excellent modèle visuel pour représenter la commutativité de la multiplication.

Distributivité

La propriété de distributivité permet d'effectuer une opération sur une somme ou une différence de termes et d'obtenir le même résultat que si l'opération avait été effectuée sur chaque terme. La multiplication est distributive sur l'addition. Par exemple, on peut multiplier 3 × (5 + 6) et arriver au même résultat que si on avait effectué (3 × 5) + (3 × 6). La multiplication est aussi distributive sur la soustraction. Par exemple, on peut multiplier 3 × (20 – 2) en faisant (3 × 20) – (3 × 2).

L'exemple suivant illustre comment on peut utiliser la distributivité pour calculer 6 × 8. Dans un cas, on décompose le facteur 8 pour obtenir 5 + 3. On a alors 6 × (5 + 3) = (6 × 5) + (6 × 3). Dans l'autre cas, on décompose le facteur 6 pour obtenir 3 + 3. On a alors (3 + 3) × 8 = (3 × 8) + (3 × 8).



6 × 8 | (6 × 5) + (6 × 3) | (3 × 8) + (3 × 8)

Il existe un lien important entre la distributivité et l'algorithme usuel de multiplication. Par exemple, pour calculer 3 × 15, le 15 est décomposé pour obtenir (10 + 5) :

$3 \times (10 + 5)$, soit $(3 \times 10) + (3 \times 5)$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{\times\ 3} \\ 45 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{\times\ 3} \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \underline{\times\ 3} \\ 15 \end{array}$$

Pour calculer 13 × 24, les deux facteurs sont décomposés :

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times\ 13} \\ 72 \\ \underline{+\ 240} \\ 312 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \underline{(3 \times 4) + (3 \times 20)} \; + \; \underline{(10 \times 4) + (10 \times 20)}$$

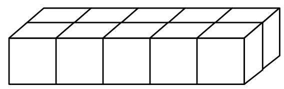
Seule la multiplication est distributive. On pourrait reconnaître que la division est partiellement distributive. Par exemple, pour calculer 32 ÷ 8, il est possible de décomposer le dividende 32 pour obtenir 16 + 16. On a alors (16 + 16) ÷ 8 et la division par 8 est distribuée sur l'addition. On obtient (16 ÷ 8) + (16 ÷ 8) = 2 + 2, soit 4. Cependant si le diviseur est décomposé, la distributivité ne fonctionne pas. Par exemple, 32 ÷ 8 ≠ (32 ÷ 4) + (32 ÷ 4). C'est la raison pour laquelle la distributivité n'est pas une propriété de la division.

Associativité

L'associativité est une propriété de l'addition et de la multiplication. Elle permet de combiner les termes d'une expression de différentes façons sans en modifier la valeur. Par exemple, dans l'expression 15 + 13 + 17, il est possible d'associer 13 et 17 pour obtenir 15 + (13 + 17), ce qui donne 15 + 30, soit 45. On peut aussi associer 15 et 13 pour obtenir (15 + 13) + 17, ce qui donne 28 + 17, soit 45.

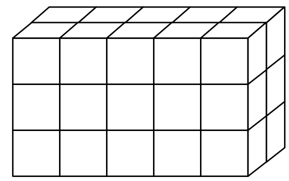
L'associativité de la multiplication [p. ex., 3 × 2 × 5 = 3 × (2 × 5) ou 3 × 2 × 5 = (3 × 2) × 5] n'est pas facile à comprendre. Certes, on peut la constater en vérifiant les résultats des multiplications, mais cela ne constitue pas une compréhension. Pour comprendre, on peut utiliser un prolongement du modèle d'une disposition rectangulaire à l'aide de cubes.

Dans la figure 1, on voit qu'il y a 2 rangées de 5 cubes, soit 2 × 5 cubes. Dans la figure 2, on voit 3 étages contenant chacun 2 × 5 cubes. La figure représente donc 3 × (2 × 5) cubes.



2 × 5

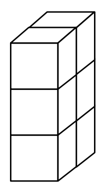
Figure 1



3 × (2 × 5)

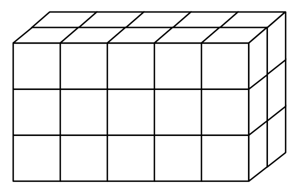
Figure 2

On peut aussi considérer la figure 3, qui illustre 3 étages de 2 cubes, soit 3 × 2 cubes. La figure 4 peut alors représenter (3 × 2) cubes qui paraissent 5 fois, soit (3 × 2) × 5.



3 × 2

Figure 3



(3 × 2) × 5

Figure 4

On voit donc que 3 × (2 × 5) et (3 × 2) × 5 représentent la même quantité de cubes (même si chaque expression représente un point de vue différent) et que chacune donne le même produit que 3 × 2 × 5.

Devant une expression numérique telle que 3 × (2 × 5) = ?, certains élèves tentent parfois d'appliquer la distributivité de manière à calculer (3 × 2) × (3 × 5), ce qui a pour effet que 2 × 5 est multiplié par 9, plutôt que par 3. Dans un tel cas, il faut rappeler que la distributivité de la multiplication s'effectue seulement sur l'addition ou la soustraction et expliquer la situation en utilisant un modèle concret ou semi-concret.

L'associativité ne change pas l'ordre des nombres d'une expression numérique. On peut cependant jumeler l'associativité et la commutativité pour faciliter l'évaluation d'une expression numérique. Par exemple, pour déterminer la valeur de l'expression 2 × 3 × 5, on peut déterminer celle de l'expression (2 × 5) × 3. En effet, il est habituellement plus facile de calculer 10 × 3 que de calculer 6 × 5. De même, pour déterminer la valeur de l'expression 19 + 27 +11, on peut déterminer celle de (19 + 11) + 27, car le 9 et le 1 sont complémentaires et donnent une dizaine, ce qui permet d'obtenir la réponse mentalement, soit 30 + 27 = 57. C'est en exposant les élèves à un grand nombre d'activités que l'enseignant ou l'enseignante les amène à comprendre et à utiliser les différentes propriétés avec efficacité.

La décomposition d'un nombre en produit de facteurs, de pair avec l'associativité, peut aussi s'avérer utile. Par exemple, le nombre 24 peut être représenté par 24 × 1, 12 × 2, 8 × 3, 6 × 4 ou même par 2 × 4 × 3 ou 2 × 2 × 2 × 3. Pour déterminer la valeur d'une expression numérique telle que 24 × 5, les élèves qui possèdent un bon sens du nombre et un bon sens des opérations peuvent choisir de transformer 24 en 12 × 2 et utiliser les propriétés des opérations ainsi :

24 × 5 = (12 × 2) × 5	ou	24 × 5 = (12 × 2) × 5
24 × 5 = 12 × 2 × 5		24 × 5 = 12 × 5 × 2
24 × 5 = 12 × 10		24 × 5 = 60 × 2
24 × 5 = 120		24 × 5 = 120

Élément neutre

Comme son nom l'indique, un élément neutre est un nombre qui n'a aucun effet pour une opération donnée. Ainsi, le nombre 0 est l'élément neutre de l'addition (p. ex., 287 + 0 = 287 et 0 + 287 = 287) et le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication (p. ex., 133 × 1 = 133 et 1 × 133 = 133).

La soustraction et la division n'ont pas d'élément neutre. Dans une soustraction, le nombre 0 ne produit aucun effet lorsqu'il est le deuxième terme (p. ex., 3 – 0 = 3), mais ce n'est pas le cas s'il paraît comme premier terme (p. ex., 0 – 3 ≠ 3). Ainsi, le nombre 0 n'est pas neutre pour la soustraction. De même, dans une division, le nombre 1 ne produit aucun effet lorsqu'il est le diviseur (p. ex., 3 ÷ 1 = 3), mais ce n'est pas le cas s'il paraît comme dividende (p. ex., 1 ÷ 3 ≠ 3). Ainsi, le nombre 1 n'est pas neutre pour la division.

Élément absorbant

Dans une multiplication, le 0 a pour effet d'« absorber » l'autre facteur. Ainsi, peu importe le nombre multiplié par 0, le produit sera toujours 0 (p. ex., 684 × 0 = 0) et si 0 est multiplié par un autre nombre, le produit sera aussi 0 (p. ex., 0 × 684 = 0). On qualifie alors le nombre zéro d'élément absorbant pour la multiplication.

PRIORITÉ DES OPÉRATIONS

La priorité des opérations peut survenir dans un contexte de résolution de problèmes ou dans des opérations présentées sous forme d'expressions numériques sans contexte.

1. Les opérations en contexte de résolution de problèmes

Pour résoudre un problème comportant une série d'opérations, l'ordre à suivre est dicté par le sens du problème.

Exemple 1

Simon a 3 enveloppes contenant 5 timbres chacune et sa sœur Annabelle a 7 enveloppes contenant 4 timbres chacune. Ils décident de regrouper tous leurs timbres pour former une plus grosse collection. Combien de timbres compte leur collection commune?

Pour résoudre ce problème logiquement, les élèves doivent d'abord déterminer le nombre de timbres dans la collection de Simon ($3 \times 5 = 15$), puis le nombre de timbres dans celle d'Annabelle ($7 \times 4 = 28$). Ensuite, ils doivent trouver le nombre total de timbres dans les deux collections ($15 + 28 = 43$). Ici, la multiplication a donc priorité sur l'addition.

Pour représenter toutes ces opérations en une seule expression numérique, on pourrait écrire $3 \times 5 + 7 \times 4$. Or, cette expression peut porter à confusion. C'est pourquoi il est préférable de recourir à des parenthèses pour préciser l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées, soit $(3 \times 5) + (7 \times 4)$. La solution peut alors être présentée comme suit :

$$(3 \times 5) + (7 \times 4) = 15 + 28$$
$$(3 \times 5) + (7 \times 4) = 43$$

Donc, la collection commune contient 43 timbres.

Dans l'exemple suivant, il est possible de résoudre le problème en donnant la priorité à l'addition sur la multiplication.

Exemple 2

Alphonse commande 12 recueils de bandes dessinées vendus au prix de 7 $ chacun. Il y a des frais de livraison de 2 $ par recueil. Combien lui coûtent les 12 recueils?

Les élèves peuvent d'abord déterminer le prix de chaque recueil (7 \$ + 2 \$ = 9 \$), puis le coût total (12 × 9 \$ = 108 \$). Comme dans l'exemple précédent, il est possible de présenter les deux opérations avec des parenthèses dans la même expression numérique : $(7 + 2) \times 12$ ou $12 \times (7 + 2)$.

Ainsi, les parenthèses permettent de regrouper certains éléments d'une expression numérique et de préciser que ces éléments doivent être traités en priorité. L'activité *Que des trois!* (p. 209-211) traite de l'utilisation des parenthèses.

2. Les opérations sous forme d'expressions numériques

Idéalement, les expressions numériques devraient être présentées dans un contexte qui permet d'établir la priorité des opérations. Il arrive cependant qu'on doive évaluer une expression numérique hors contexte. Telles que présentées précédemment, les parenthèses aident à prioriser les opérations à effectuer, comme dans les expressions numériques $(3 \times 5) + (7 \times 4)$ et $12 \times (7 + 2)$. Cependant, une expression numérique présentée sans parenthèses et sans contexte pourrait générer une multitude de réponses. Par exemple, on pourrait décider de traiter les opérations dans l'ordre dans lequel elles paraissent :

$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 15 + 7 \times 4$$
$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 22 \times 4$$
$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 88$$

On pourrait aussi décider de donner la priorité à l'addition sur la multiplication :

$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 3 \times 12 \times 4$$
$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 36 \times 4$$
$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 144$$

Devant une expression numérique de ce genre, certaines règles ont été établies afin de lever toute ambiguïté et d'uniformiser son traitement. Une de ces règles stipule que les multiplications et les divisions s'effectuent avant les additions et les soustractions. Dans ce contexte, la façon convenue d'évaluer l'expression précédente est :

$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 15 + 28$$
$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 43$$

L'acronyme PEDMAS est souvent présenté aux élèves pour les aider à retenir l'ensemble des règles qui définissent la priorité des opérations. Le « P » représente les parenthèses qu'il faut traiter en premier. Le « E » désigne les exposants qui sont évalués ensuite. Le « D » et le « M » représentent la division et la multiplication, opérations à effectuer selon l'ordre dans lequel elles paraissent. Enfin, l'addition et la soustraction correspondent aux lettres « A » et « S ». Ces deux dernières opérations sont effectuées en dernier lieu selon l'ordre dans lequel elles paraissent. La priorité des opérations est au programme de 6e année, mais il peut arriver que les élèves des autres années abordent ces règles de façon informelle. Ce n'est qu'au cycle intermédiaire qu'interviennent les exposants. En classe, il est plus important de miser sur le sens des expressions en contexte de résolution de problèmes que sur l'habileté à évaluer des expressions comportant de multiples opérations.

L'activité suivante représente un défi pour les élèves. Elle les incite à appliquer leurs connaissances de l'ordre des opérations et de l'effet des opérations sur les nombres. Les élèves doivent utiliser chacun des nombres d'une série donnée une seule fois, ainsi que quelques-unes des quatre opérations afin d'arriver le plus près possible d'un nombre cible. Par exemple, la suite de nombres est 2, 4, 5, 7, 10 et 25 et la cible est 433.

Exemple 1	*Exemple 2*	*Exemple 3*
10 × 25 = 250	10 × 7 = 70	5 × 7 = 35
5 × 7 = 35	70 × 5 = 350	10 + 2 = 12
250 – 35 = 215	350 + 25 = 375	35 × 12 = 420
215 × 2 = 430	4 + 2 = 6	420 + 25 = 445
430 + 4 = **434**	375 + 6 = **381**	445 – 4 = **441**

Le niveau de difficulté de l'activité peut varier selon certaines modalités, à savoir :

- le choix des nombres – *il peut être utile de fournir au moins quatre ou cinq nombres inférieurs à 10 et deux ou trois nombres qui facilitent les calculs (p. ex., 15, 25, 40, 50, 75, 100)*;
- l'utilisation des nombres – *il faut déterminer si un nombre peut servir une seule fois ou à plusieurs reprises*;
- le choix de la stratégie de calcul – *sur papier, mentalement ou à l'aide de la calculatrice*.

Si la priorité des opérations a fait l'objet d'une étude en classe, les élèves peuvent résumer leur solution à l'aide d'une phrase mathématique. Par exemple, ils pourraient résumer leur solution ainsi $(5 \times 7) \times (10 + 2) + 25 - 4 = 441$ pour l'exemple 3.

CALCUL MENTAL

La plupart des calculs effectués au quotidien sont reliés à un calcul mental. Les personnes qui acquièrent de bonnes habiletés de calcul mental ne dépendent pas de l'électronique ou du papier pour effectuer les calculs de la vie courante. Or, il est important de démystifier le calcul mental. « Le calcul mental consiste à effectuer des calculs sans l'aide ou presque d'un crayon et d'un papier, ou d'une calculatrice. Il représente une composante essentielle d'un enseignement efficace au cycle moyen. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 24). Ainsi, il ne s'agit pas d'utiliser un algorithme dans sa tête, mais de calculer avec souplesse et efficacité.

On peut faire appel à diverses activités pédagogiques qui permettent de développer le calcul mental. L'habileté peut être développée, par exemple, en situation d'apprentissage partagé sous forme de jeux (p. ex., l'activité *Cartes en folie*, p. 208), en situation d'apprentissage guidé (p. ex., en utilisant des séries d'opérations apparentées comme celles présentées dans la section suivante) ou en situation d'apprentissage autonome (p. ex., en résolvant un problème mentalement). Peu importe la situation d'apprentissage, l'enseignant ou l'enseignante profite des occasions, lors d'échanges mathématiques, pour faire ressortir les relations qui existent entre les différentes stratégies de calcul mental utilisées par les élèves. Cela fait ressortir les ressemblances et les différences entre les stratégies ainsi que leurs forces et leurs faiblesses et aide les élèves à établir des liens et à assimiler d'autres stratégies.

Selon les situations, on fait appel au calcul mental pour déterminer des résultats approximatifs ou exacts. On estime souvent mentalement lorsque c'est l'ordre de grandeur qui est recherché. Par exemple, pour avoir une idée du coût total de ses achats, on utilise des nombres plus simples. Il est important aussi de savoir calculer mentalement avec précision (p. ex., un serveur qui doit rendre la monnaie à un client). Plusieurs stratégies de calcul mental sont basées sur la relation entre le tout et ses parties (décomposition et regroupement), sur l'établissement de relations entre les nombres et sur les propriétés des opérations. Souvent ces stratégies proviennent d'un transfert de modèles utilisés au cours de l'apprentissage des opérations. Quelques-unes sont présentées dans le tableau ci-après. D'autres exemples sont présentés dans *Énoncé 3 – Représentations des opérations* (p. 116-145).

Exemples de stratégies de calcul mental

Appliquer une propriété des opérations Utiliser la commutativité de l'addition.	68 + 27 + 12 = ? 68 + 27 + 12 = 68 + 12 + 27 68 + 12 = 80 80 + 27 = 107 68 + 27 + 12 = 107
Utiliser les opérations inverses Doubler et diviser par deux.	45 × 14 = ? 90 × 7 = 630 45 × 14 = 630
Compenser Multiplier un nombre supérieur et retrancher le surplus.	24 × 5 = ? 25 × 5 = 125 et 1 × 5 = 5 24 × 5 = 125 – 5 24 × 5 = 120
Utiliser les valeurs de position Additionner 10, 20, 30, 100… à partir de n'importe quel nombre.	163 + 230 163 + 200 = 363 363, 373, 383, 393 163 + 230 = 393
Décomposer les nombres Décomposer un nombre ou des nombres.	78 + 29 = ? 75 + 3 + 25 + 4 = 100 + 7 78 + 29 = 107

SÉRIES D'OPÉRATIONS APPARENTÉES

L'univers des mathématiques est rempli de relations. Plus les élèves établissent des relations entre les nombres et les opérations, plus ils arrivent à résoudre des problèmes aisément et souvent, mentalement. Une des stratégies pour y arriver est l'utilisation de séries d'opérations apparentées. Il s'agit de courtes activités (10 à 15 minutes) d'enseignement guidé des stratégies de calcul.

L'exercice consiste à explorer une série de quatre à sept opérations entre lesquelles il existe des relations qui mettent en valeur une stratégie ou un concept particulier. Par exemple, un enseignant ou une enseignante qui veut vérifier si ses élèves savent comment appliquer la compensation au cours d'une addition peut leur présenter cette série d'opérations :

46 + 10
46 + 9
64 + 20
64 + 19
35 + 19

Voici un exemple d'une démarche à suivre pour présenter une série d'opérations apparentées. L'enseignant ou l'enseignante :

- écrit la première opération de la série horizontalement au tableau;
- invite les élèves à trouver la réponse mentalement (au besoin, ils peuvent avoir recours au papier-crayon, mais ne doivent pas faire l'opération par écrit en utilisant l'algorithme usuel);
- demande à quelques élèves d'expliquer leur façon d'effectuer cette opération (cet échange aide les élèves à clarifier leur démarche et l'ensemble de la classe à faire des liens entre les stratégies);
- modèle le raisonnement utilisé au tableau;
- présente les autres opérations une à une en suivant les mêmes étapes;
- anime une courte discussion après que toutes les opérations ont été effectuées, et que la stratégie visée a été bien cernée.

Dans cet exemple, les élèves calculent 46 + 10, puis 46 + 9; ils remarquent qu'en additionnant 1 de moins, la somme sera 1 de moins que la somme précédente. Il en est de même pour 64 + 20 et 64 + 19. Pour déterminer la somme de 35 +19, les élèves calculent mentalement 35 + 20 et enlèvent 1. La stratégie visée est la compensation au cours d'une addition : on ajoute un nombre pour obtenir un nombre familier, souvent un multiple de 10, et à la fin, on soustrait de la réponse le nombre qu'on a ajouté.

Pour construire des séries d’opérations apparentées, l’enseignant ou l’enseignante doit d’abord choisir la stratégie visée. Habituellement, les opérations sont jumelées deux à deux. La première opération soutient la seconde, puisque celle-ci peut être effectuée en appliquant la stratégie visée à partir de la réponse de la première opération. On peut recommencer avec deux opérations semblables. Le dernier problème est donné sans aide, et les élèves doivent appliquer ce qu’ils ont observé dans les opérations précédentes. L’exemple suivant démontre une série d’opérations apparentées visant la stratégie « addition par la gauche ».

Ces opérations utilisent les connaissances des élèves pour développer la stratégie visée.

43 + 10
58 + 10
58 + 12
65 + 20
65 + 26

Ces opérations sont reliées aux précédentes et peuvent être résolues en appliquant la stratégie visée.

83 + 24

Cette dernière opération donne l’occasion aux élèves d’appliquer, sans aide, la stratégie développée au cours des opérations précédentes.

Selon la compréhension de ses élèves, l’enseignant ou l’enseignante peut présenter une autre série d’opérations apparentées de manière à faire pratiquer la même stratégie ou une autre. On peut aussi utiliser une structure différente (p. ex., une série qui contient seulement 4 opérations). Plus les élèves s’adonnent à ce genre d’activités, plus ils deviennent habiles à établir des relations et à créer leurs propres séries devant un problème difficile à résoudre. Ce faisant, ils accroissent leur aptitude au calcul mental. Le tableau ci-après présente quelques exemples de séries d’opérations apparentées.

Exemples de séries d'opérations apparentées

Effectuer des soustractions partielles	Compenser	Doubler ou diviser en 2	Appliquer l'associativité	Compenser
85 – 20	4 × 12	2 × 24	10 × 6	56 – 30
85 – 3	8 × 6	4 × 24	3 × 6	56 – 29
85 – 23	16 × 3	8 × 24	3 × 10 × 6	56 – 28
275 – 100	32 × 1,5	8 × 12	4 × 7	344 – 200
275 – 40		4 × 12	10 × 7	344 – 199
275 – 3			4 × 10 × 7	344 – 197
275 – 143			3 × 5 × 20	546 – 196
98 – 27				

Maintenir la différence constante	Appliquer la distributivité	Multiplier par des multiples de 10	Faire des regroupements
50 – 25	8 × 5	3 × 10	1 + 9 + 2 + 8
51 – 26	8 × 40	3 × 2	8 + 4 + 3 + 7 + 6 + 2
49 – 24	8 × 45	3 × 20	9 + 8 + 1 + 7 + 3
72 – 30	6 × 4	6 × 10	14 + 13 + 6 + 7
73 – 31	6 × 30	6 × 4	75 + 12 + 13 + 50 + 50 + 30 + 70
71 – 29	6 × 34	6 × 40	5 + 75 + 95 + 14 + 25 + 3
64 – 29	5 × 63	7 × 50	

Une activité préparatoire facultative qui utilise quelques séries d'opérations apparentées pour développer la propriété de distributivité se retrouve dans la situation d'apprentissage *Cible mathématique* (p. 195-222).

Énoncé 3 – Représentations des opérations

> Connaître une variété de stratégies pour effectuer les opérations permet de les utiliser avec efficacité selon le contexte.

À la suite de l'apprentissage des opérations, les élèves devraient être en mesure de choisir et d'utiliser des stratégies appropriées de calcul mental, écrit ou électronique pour chaque opération, tout en tenant compte du degré de précision exigé et de la vraisemblance du résultat.

(Department of Education and Training of Western Australia, 2005, p. 6-7, traduction libre)

Pour assimiler les mathématiques, les élèves doivent passer par plusieurs étapes, être exposés à diverses représentations d'un concept et s'en servir fréquemment. Les apprentissages reliés aux opérations sont réalisés en suivant un cheminement similaire. Dès leur jeune âge, les élèves vivent des situations mathématiques qu'ils ont tendance à mimer pour bien comprendre l'action exprimée par l'opération (+, –, ×, ÷). À cet égard, la littérature jeunesse s'avère utile pour encourager les jeunes à raconter des problèmes sous forme d'histoires, ce qui leur permet de montrer la compréhension qu'ils en ont; pour des suggestions de livres, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 3 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 86-89). Au fil de leurs années d'études, les élèves expriment cette compréhension par des représentations concrètes (p. ex., matériel de manipulation) et semi-concrètes (p. ex., droite numérique), tout en cheminant vers des représentations plus symboliques (p. ex., algorithme) accompagnées de descriptions orales.

Sous la thématique des « Représentations des opérations », les aspects suivants sont abordés :

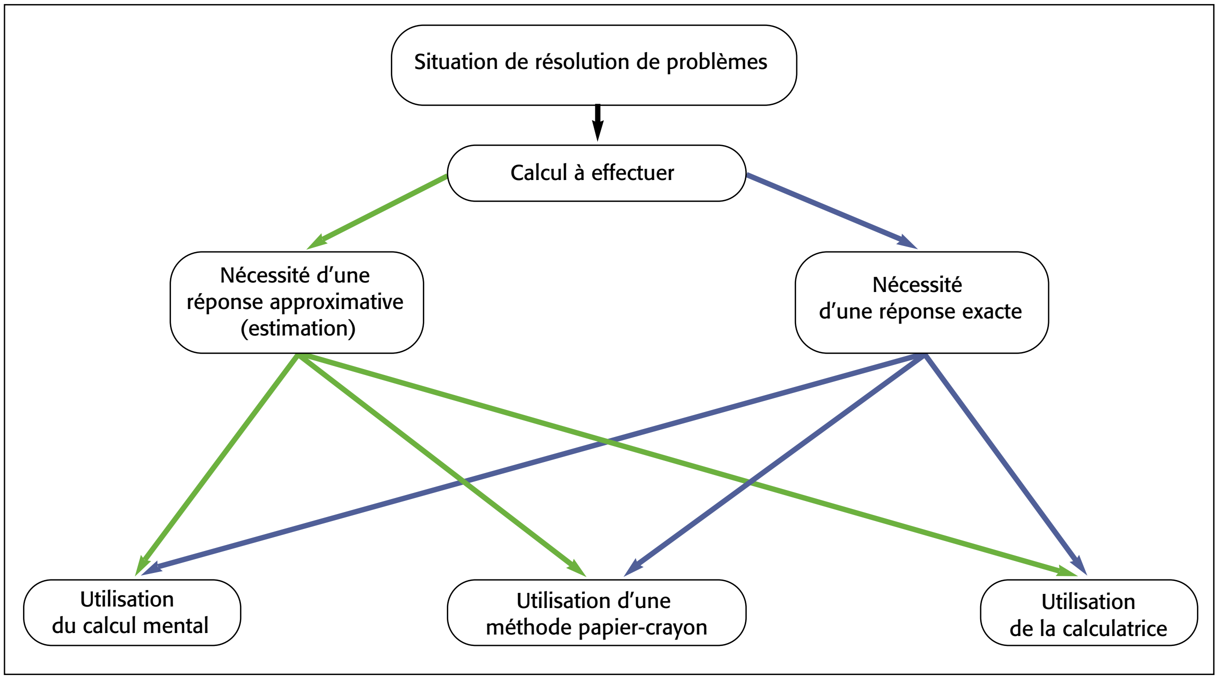
- la réflexion des élèves devant un problème;
- l'utilisation de stratégies personnelles, d'algorithmes et de la calculatrice;
- quelques stratégies qui peuvent être utilisées pour additionner, soustraire, multiplier et diviser avec les nombres naturels.

RÉFLEXION RELIÉE AUX CALCULS

L'idée de base de l'énoncé 3, *Représentations des opérations*, est d'amener les élèves à calculer adéquatement afin de résoudre des problèmes. Cela suppose qu'ils doivent prendre des décisions et faire des choix en fonction du contexte. Une approche axée sur la résolution de problèmes les initiera à cette réflexion.

Devant un problème, il faut d'abord l'analyser afin d'en déterminer les données et de comprendre qu'un calcul doit être effectué. Ensuite, il faut savoir si, selon le contexte, on cherche une réponse approximative ou une réponse exacte. Dans les deux cas, selon le contexte et les nombres en cause, il faut ensuite déterminer si le calcul sera effectué mentalement, par écrit ou à l'aide d'une calculatrice. Enfin, le calcul désiré est effectué.

Schéma de la réflexion faite par les élèves devant un problème



(National Council of Teachers of Mathematics, 1992, p. 9, traduction libre)

STRATÉGIES DE CALCUL

Traditionnellement, les algorithmes (étapes de calcul standardisées) ont été conçus à une époque où une élite de « calculateurs humains » ne disposait pas de calculatrices (Ma, 2004). Les algorithmes n'étaient pas conçus pour favoriser le niveau de compréhension que nous attendons aujourd'hui des élèves.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 13)

Pour calculer correctement, les élèves ont recours à divers modèles concrets, semi-concrets et symboliques qu'ils ont déjà utilisés dans d'autres situations. Une fois maîtrisés, ces modèles deviennent des stratégies de résolution de problèmes (voir *Modèles mathématiques*, p. 10-12).

Au début de leurs apprentissages, les élèves représentent généralement les opérations de façon concrète, par exemple, à l'aide de jetons. Puis, à la suite d'une variété d'expériences, leur sens du nombre et leur habileté à manipuler les nombres se développent, ce qui leur permet de calculer à l'aide de stratégies personnelles. Ces stratégies, qui sont le résultat de leur compréhension et de leur cheminement, peuvent varier grandement d'un élève à l'autre, mais elles sont toutes fondées sur des relations entre les nombres et les opérations. Il arrive aussi que la façon dont certains élèves organisent leurs données ressemble de près aux algorithmes usuels.

Les stratégies personnelles ou inventées offrent plusieurs avantages par rapport à l'enseignement traditionnel des algorithmes usuels, à commencer par la fierté et la confiance en soi qu'elles procurent. Les élèves qui utilisent des algorithmes personnels font moins d'erreurs, car ils comprennent ce qu'ils font. De plus, ils améliorent leur connaissance et leur compréhension du système numérique à base dix, sur lequel reposent la plupart des stratégies de calcul. Par ailleurs, Van de Walle et Lovin (2006, p. 40) précisent que des recherches démontrent que les élèves qui ont pu développer des stratégies personnelles réussissent aussi bien, sinon mieux, que les autres dans des tests standardisés.

Il existe des disparités de taille entre les algorithmes personnels et les algorithmes usuels. Les algorithmes personnels sont habituellement orientés sur le sens des chiffres, selon leur position (p. ex., dans l'addition 323 + 20, j'ajoute 2 dizaines à 323, ce qui donne 343) alors que les algorithmes usuels tendent à utiliser les chiffres sans tenir compte de leur position (p. ex., dans l'addition $\begin{array}{r}323\\ +\ 20\\ \hline\end{array}$, on fait : 3 + 0, c'est 3; 2 + 2, c'est 4…). Les algorithmes usuels commencent habituellement par la droite, alors que dans leurs algorithmes personnels, les élèves commencent souvent par la gauche, ce qui leur permet de maintenir un sens de la grandeur des quantités en cause. Puisqu'un algorithme personnel est le fruit de l'imagination et de la compréhension de chaque élève, il demeure très souple, de manière à ce qu'il puisse servir dans diverses situations.

En salle de classe, il est suggéré d'examiner plusieurs algorithmes pour une même opération. Il est essentiel que les élèves comprennent le raisonnement derrière les gestes posés dans ces algorithmes. Avec le temps, cela leur permet de choisir une stratégie efficace selon le contexte. L'enseignant ou l'enseignante qui a dans sa classe des élèves de cultures différentes peut les inviter à discuter, à la maison, de la méthode que les parents utilisent pour effectuer une addition, une soustraction, une multiplication ou une division. Ces élèves peuvent présenter ces méthodes à la classe, ce qui peut apporter de nouvelles stratégies.

On présente souvent les algorithmes usuels comme principale stratégie de calcul. Bien qu'ils soient efficaces, ils ne sont pas toujours appropriés. Lorsque l'enseignement est axé sur l'algorithme usuel, par exemple, pour calculer 300 – 15, les élèves ont tendance à sortir un crayon et à résoudre le problème par écrit, avec l'algorithme écrit et ses échanges, ce qui est une source commune d'erreurs. Il est pourtant plus efficace de calculer mentalement comme suit : 300 – 10 = 290, 290 – 5 = 285. De plus, l'algorithme usuel n'est pas la meilleure méthode à utiliser là où une estimation suffit. C'est pourquoi il est suggéré de considérer l'algorithme usuel comme une stratégie de calcul parmi tant d'autres.

Les outils technologiques, tels que les ordinateurs et les calculatrices, occupent une grande place dans la vie quotidienne. Il est donc important que les élèves puissent s'en servir. Or, les élèves associent souvent la calculatrice à une façon « facile » d'effectuer un calcul sans comprendre qu'elle affiche le résultat d'un calcul et non pas la solution exacte d'un problème. Il importe donc d'initier les jeunes élèves à une utilisation réfléchie de la calculatrice.

Pour apprendre comment et quand se servir d'une calculatrice, les élèves doivent interpréter les données du problème et les entrer correctement, d'où l'importance de bien connaître les fonctions de l'outil. De façon particulière, ils doivent savoir interpréter les nombres affichés sur l'instrument tels que les nombres décimaux, surtout lorsqu'ils proviennent d'une division (p. ex., les élèves peuvent interpréter la réponse de 12 ÷ 5, soit $\boxed{2.4}$ comme étant 2 reste 4). L'utilisation de la calculatrice est basée sur des connaissances conceptuelles et techniques. Les élèves doivent savoir que certaines calculatrices peuvent conserver la dernière opération en mémoire, ce qui permet de la réutiliser automatiquement. Par exemple, si on appuie sur les touches $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{4}$ et ensuite sur $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$, la calculatrice affiche successivement les nombres 7, 11 et 15, car elle effectue 3 + 4 = 7, suivi de 7 + 4 = 11 et de 11 + 4 = 15. Dans cet exemple, elle conserve en mémoire

Au Moyen-Âge, les calculs s'effectuaient à l'aide d'abaques. Fosnot et Dolk (2001) affirment que la montée du système numérique arabe et la chute de l'utilisation de l'abaque, au XII^{e} siècle, ont suscité de vives controverses à l'époque : « Une dure lutte s'installe alors en Europe entre les tenants du calcul sur abaque et ceux du recours aux chiffres et aux procédures indo-arabes de calcul » (Fosnot et Dolk, 2001, p. 47). En effet, les gens qui maîtrisaient bien l'utilisation de l'abaque avaient du mal à admettre qu'une autre méthode pouvait mieux fonctionner. Le même scepticisme est palpable aujourd'hui dans nos écoles. Il est difficile pour certains parents, enseignants ou enseignantes d'admettre que d'autres méthodes que l'algorithme usuel sont aussi efficaces.

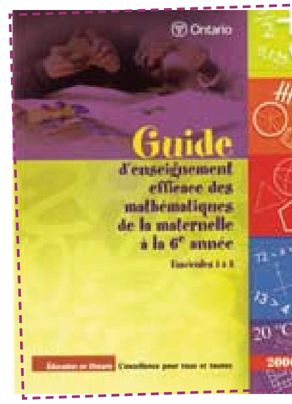
l'opération $\boxed{+}\boxed{4}$. De même, certaines calculatrices respectent la priorité des opérations, alors que d'autres ne le font pas (p. ex., si on appuie sur les touches $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{\times}\boxed{5}\boxed{=}$, une calculatrice qui respecte la priorité des opérations afficherait 23, tandis qu'une calculatrice qui ne la respecte pas afficherait 35). Les élèves doivent alors connaître les caractéristiques de leur calculatrice, ainsi que la priorité des opérations, de manière à changer l'ordre des opérations au besoin (p. ex., il faudrait appuyer sur les touches $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{(}\boxed{4}\boxed{\times}\boxed{5}\boxed{)}\boxed{=}$ ou $\boxed{4}\boxed{\times}\boxed{5}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}$ pour obtenir la bonne réponse sur une calculatrice qui ne respecte pas la priorité des opérations).

La calculatrice peut s'avérer utile en classe pour résoudre un problème à plusieurs étapes, comme elle l'est pour la majorité des gens au quotidien. Ainsi, son emploi n'exclut pas la résolution de problèmes comme telle puisque les élèves doivent tout de même comprendre le problème et décider des calculs à exécuter. Voici quelques exemples d'activités pédagogiques qui peuvent être réalisées à l'aide de la calculatrice.

Exemples

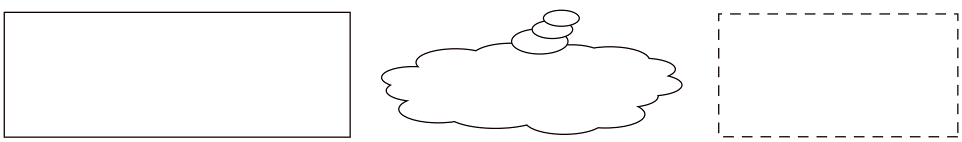
Les mots à la calculatrice	La multiplication et l'addition répétée	Une touche est brisée
Les chiffres 0, 1, 3, 4, 5 et 7, lorsqu'ils sont lus à l'envers sur une calculatrice, semblent indiquer les lettres respectives O, I, E, h, S et L. Il est possible de s'amuser à trouver des mots (p. ex., SOI, LES, SOLEIL, LOI) et des séries d'opérations à effectuer, qui permettent d'obtenir ces mots sur l'écran (p. ex., détermine deux nombres dont la somme indiquera le mot SOL, soit 705).	On peut utiliser la calculatrice dans l'apprentissage de la multiplication. Par exemple, pour explorer la multiplication 4 x 3, qui est l'équivalent de 3 + 3 + 3 + 3 = 12, on peut, sur certaines calculatrices, appuyer sur les touches $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$.	Demander aux élèves d'effectuer des calculs à la calculatrice sans utiliser une touche en particulier. Par exemple, sans utiliser la touche 9, effectuer 993 – 99. Pour réussir, on peut calculer 883 + 110 – 100 + 1 ou 1 000 – 106.

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES NATURELS



Voici une panoplie de stratégies qui peuvent être utilisées pour effectuer les quatre opérations de base. Elles répondent à des besoins variés et facilitent l'apprentissage des élèves (voir *Apprentissage des opérations fondamentales*, p. 75-78). Les stratégies écrites qui représentent un raisonnement sont des algorithmes personnels et sont présentées dans des rectangles. Les stratégies de calcul mental sont présentées dans un nuage. Les algorithmes usuels, que l'on trouve généralement dans des manuels, sont présentés dans un encadré à tirets. Pour des renseignements supplémentaires sur l'apprentissage des algorithmes usuels, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 54-68).

Algorithme personnel écrit | Stratégie de calcul mental | Algorithme usuel



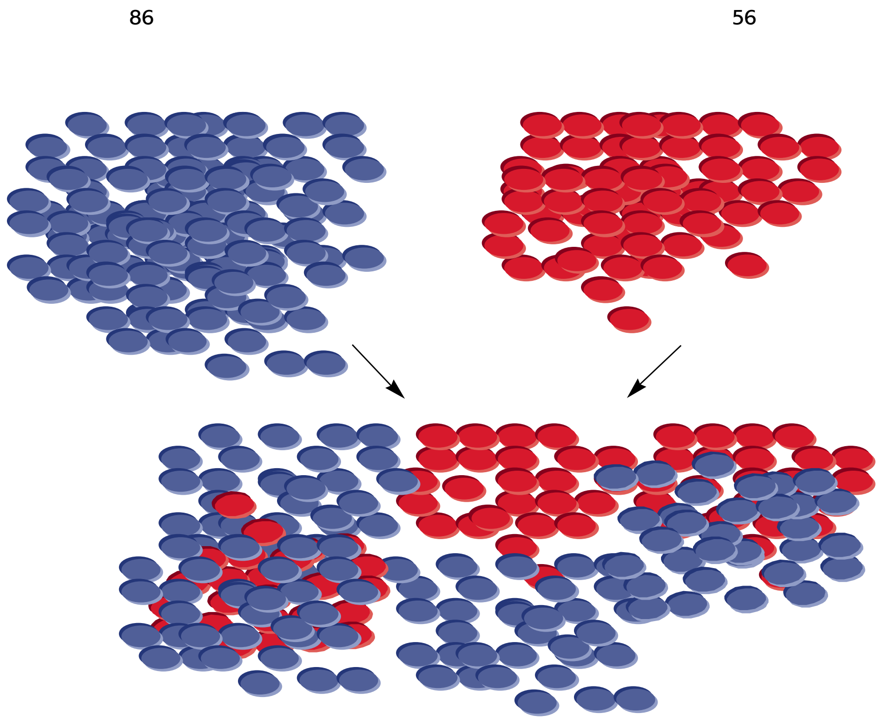
Pour faciliter la lecture et la compréhension de cette section, les opérations sont présentées sous forme d'expressions numériques et de modèles. En classe, en modelant les stratégies des élèves au tableau ou au rétroprojecteur, l'enseignant ou l'enseignante devrait aussi représenter les opérations horizontalement, par exemple :

$35 + 26$ $273 - 185$ 5×432 $532 \div 5$

Addition

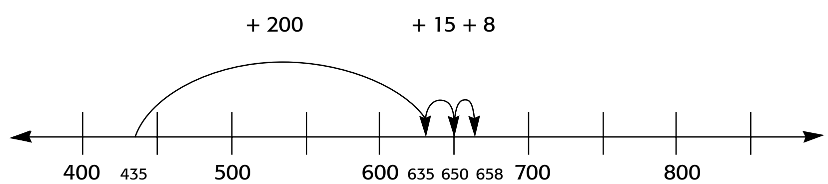
L'utilisation de matériel de manipulation est une des premières stratégies auxquelles les élèves ont recours. Ils peuvent prendre des objets de la classe tels que des billes, des jetons ou des blocs pour représenter, par exemple, 86 + 56, et employer des stratégies de dénombrement pour trouver la somme. Cette stratégie n'est cependant pas très efficace avec de grands nombres. Par exemple :

86 + 56

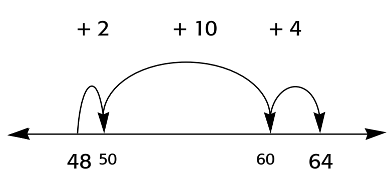


86 + 56 = 142

Une addition peut aussi être représentée sur une droite numérique. Par exemple, les élèves pourraient effectuer 435 + 223 en décomposant 223 (200 + 15 + 8) et en représentant l'opération comme suit :



Une droite numérique ouverte peut aussi aider à représenter une addition telle que 48 + 16 en la décomposant en 48 + 2 + 10 + 4 :



La grille de nombres peut être utilisée pour représenter une addition. Par exemple, 34 + 32 et 39 + 27 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

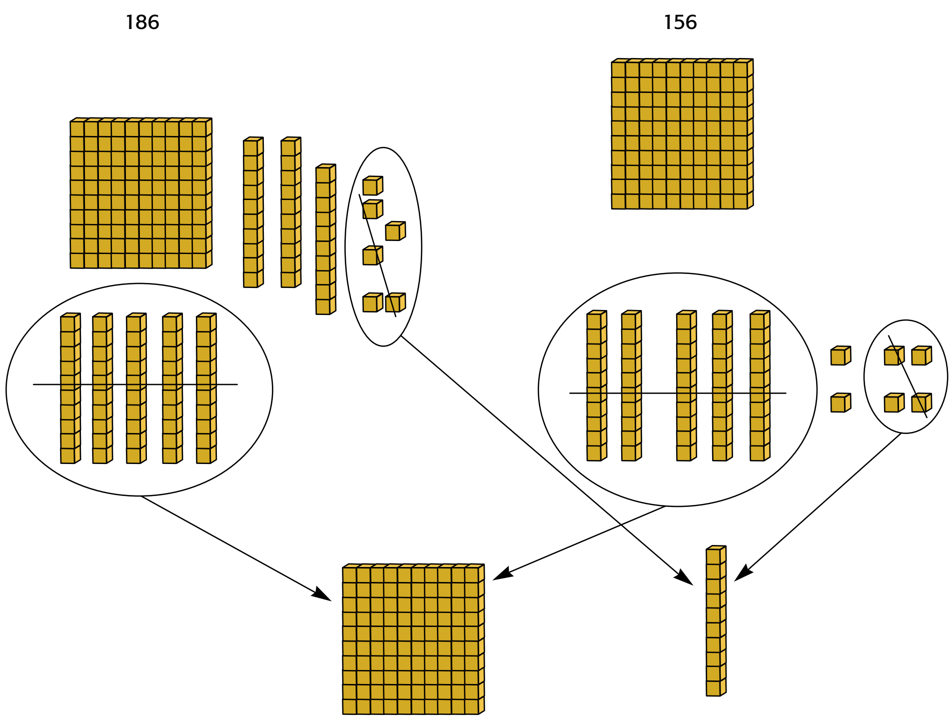
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Au cycle moyen, les élèves développent progressivement leur sens de l'abstraction et peuvent utiliser la même stratégie sans avoir recours à une grille de nombres, mais en effectuant le calcul mentalement.

Le matériel de base dix aide certains élèves à visualiser l'opération plus clairement. Voici comment le matériel de base dix peut servir pour représenter les additions.

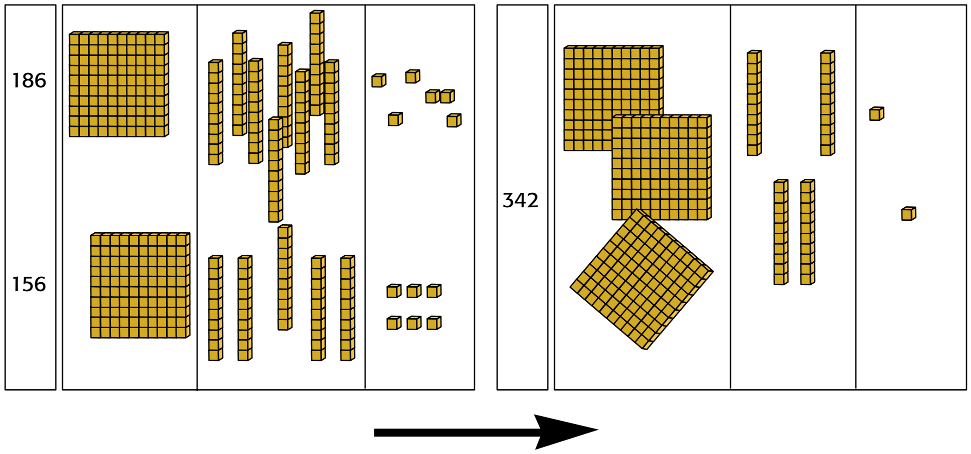
Exemple

$\boxed{\mathbf{186 + 156}}$

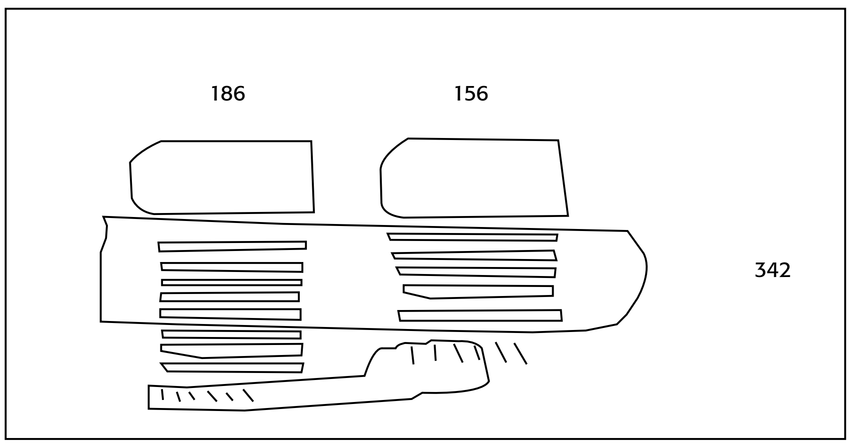


186 + 156 = 342

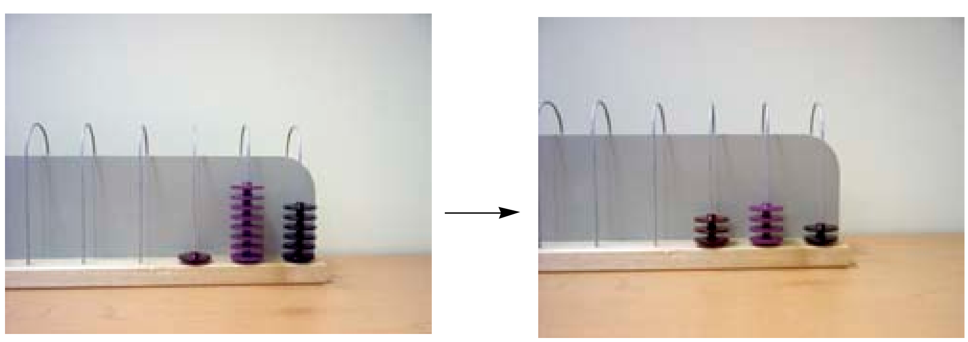
Les élèves peuvent aussi avoir recours à un tapis de valeur de position qui permet d'organiser le matériel selon la position du chiffre dans le nombre.



La même expression numérique (186 + 156) peut être représentée à l'aide d'illustrations. Ainsi, les élèves démontrent un certain niveau d'abstraction puisqu'un dessin quelconque représente 100, 10 ou 1.



Un abaque peut aussi être utilisé afin d'effectuer l'addition 186 + 156.



186 + 156 = 342

À partir de leurs expériences avec les nombres et quelques algorithmes, les élèves peuvent additionner en utilisant des algorithmes personnels. Selon l'enseignement qu'ils ont reçu, certains élèves ont recours au papier-crayon pour garder des traces de ce qu'ils font. Voici quelques exemples de stratégies de calcul.

Exemples

378 + 123

- Additionner de gauche à droite :

300 et 100 font 400.
70 et 20 font 90.
8 et 3 font 11.
Donc, 378 plus 123 égalent 501.

378 + 123

400 + 90 + 11 = 501

$$\begin{array}{r} 378 \\ +\ 123 \\ \hline 400 \\ 90 \\ +\ 11 \\ \hline 501 \end{array}$$

- Transformer le problème et compenser :

378, c'est 3 de plus que 375.
123, c'est 2 de moins de 125.
375 plus 125 égalent 500.
500 plus 3 moins 2, c'est égal à 501.
Donc, 378 plus 123 égalent 501.

378 + 123 = ?
375 + 125 = 500
500 + 3 – 2 = 501
378 + 123 = 501

- Compter par intervalles selon la valeur de position :

378 plus 1 centaine donnent 478.
478 plus 2 dizaines donnent 488, 498.
498 plus 3 unités donnent 499, 500, 501.
Donc, 378 plus 123 donnent 501.

378 + 100 = 478
478 + 10 = 488
488 + 10 = 498
498 + 1 = 499
499 + 1 = 500
500 + 1 = 501

Rappel

Stratégie de calcul mental

Algorithme personnel écrit

Algorithme usuel

- Décomposer un des nombres selon la valeur de position :

378 plus 100 égalent 478.
478 plus 20 égalent 498.
498 plus 3 égalent 501.
Donc, 378 plus 123 égalent 501.

$378 + 100 = 478$
$478 + 20 = 498$
$498 + 3 = 501$

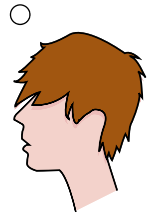
- Arrondir un nombre et compenser :

En arrondissant 378 à 380, je devrai compenser en enlevant 2 unités à 123; j'ai maintenant 380 plus 121, ce qui donne 501.

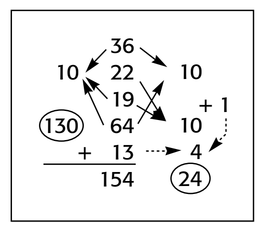
$378 + 2 = 380$
$123 - 2 = 121$
$380 + 121 = 501$

Pour déterminer la somme de plusieurs nombres, les élèves ont avantage à faire des regroupements. S'ils ont un bon sens des opérations, ils peuvent penser à des regroupements de 10, par exemple. Voici une stratégie de regroupement pour calculer 36 + 22 + 19 + 64 + 13 :

Pour les unités : 6 et 4 font 10, 9 plus 1 (qui vient du 2) égalent 10. Il me reste 1 (du 2) plus 3; donc, j'ai 24 unités. Ensuite, les dizaines : 6 plus 3 plus 1 égalent 10 et il me reste 2 plus 1 pour un total de 13 dizaines (130). Ma réponse est donc 154.



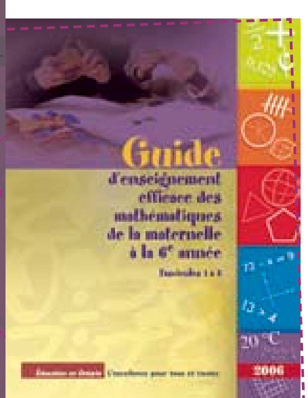
Raisonnement de l'élève



Voici l'algorithme usuel de l'addition qu'on retrouve souvent dans les manuels de mathématiques.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 76 \\ +\ 38 \\ \hline 114 \end{array}$$

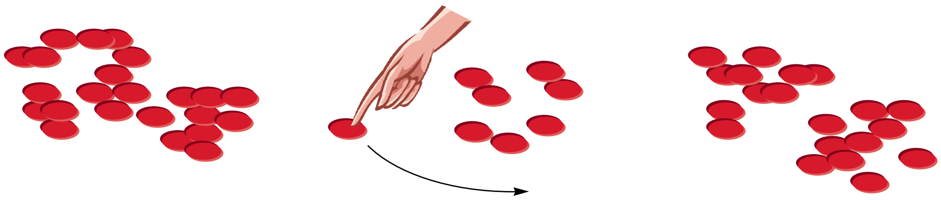
Il importe de rappeler que l'algorithme usuel n'est qu'une stratégie parmi tant d'autres et qu'il est essentiel que les élèves emploient une stratégie efficace pour résoudre un problème donné, d'où l'importance de connaître et de maîtriser une variété de stratégies de calcul. Pour découvrir d'autres algorithmes usuels, consulter le *Guide d'enseignement efficace de mathématiques, de la maternelle à la 6ᵉ année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 36).



Soustraction

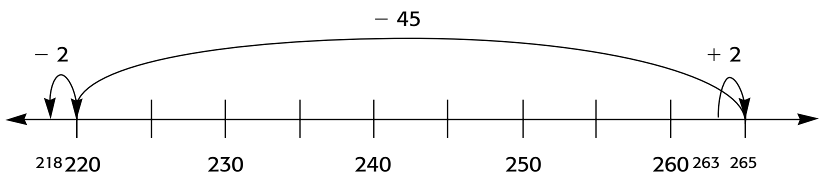
Comme pour l'addition, les élèves utilisent souvent du matériel de manipulation pour effectuer des soustractions. Cette stratégie les aide à saisir le concept de retrait, même si elle n'est pas très efficace lorsqu'il s'agit de grands nombres. Par exemple :

60 – 28

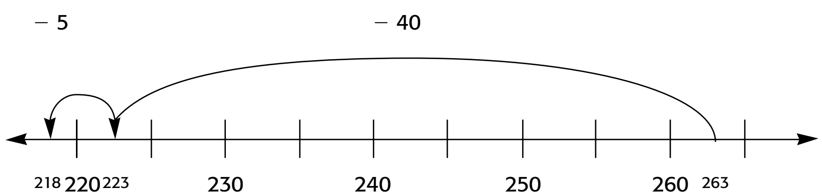


60 – 28 = 32

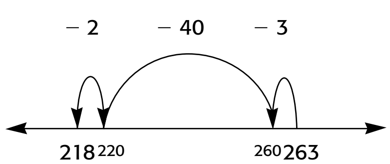
Les élèves peuvent aussi utiliser la droite numérique pour effectuer une soustraction. Par exemple, pour calculer 263 – 45, ils peuvent utiliser la compensation afin de travailler avec des nombres plus familiers. Puisque 263 + 2 = 265, on peut donc effectuer 265 – 45 = 220 et ensuite, soustraire 2 pour compenser (263 + 2 – 45 – 2). Les élèves n'ont pas à transcrire leur réflexion sous forme d'expression numérique, mais peuvent néanmoins utiliser la droite numérique pour illustrer leur démarche :



La droite numérique peut également être employée avec la décomposition selon les valeurs de position des chiffres du nombre (263 – 40 = 223, 223 – 5 = 218) :



La droite numérique ouverte permet aux élèves de procéder par bonds significatifs (263 – 3 = 260, 260 – 40 = 220, 220 – 2 = 218) :



La soustraction peut être représentée sur une grille de nombres. Par exemple :

$68 - 45 = 23$

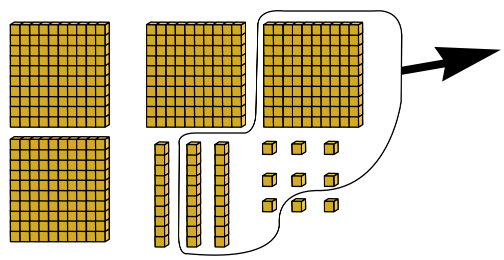
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$63 - 44 = 19$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

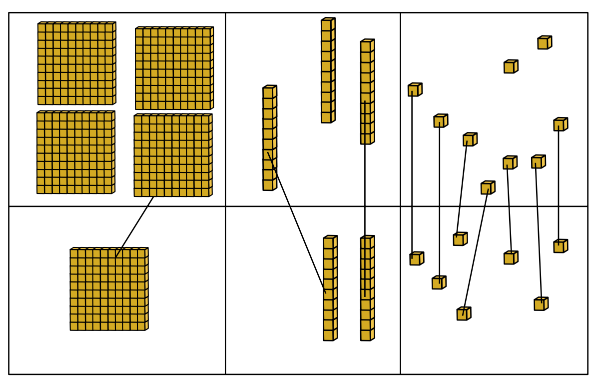
Le matériel de base dix permet aux élèves d'effectuer la soustraction au moyen d'un retrait. Par exemple :

$439 - 127 = 312$

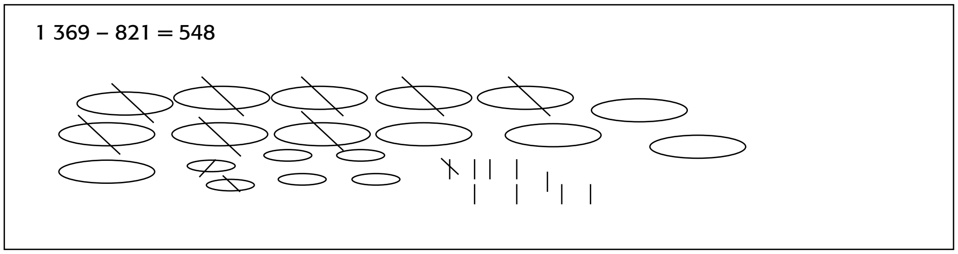


S'ils utilisent le tapis de valeur de position pour la soustraction, certains élèves sont portés à représenter les deux termes. La soustraction est alors effectuée par comparaison. Par exemple :

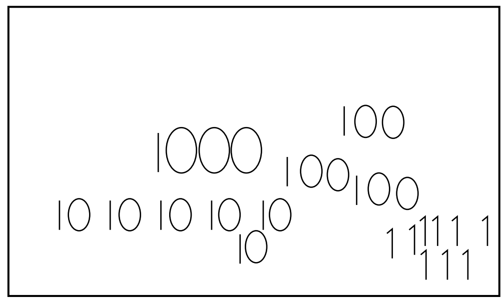
$439 - 127 = 312$



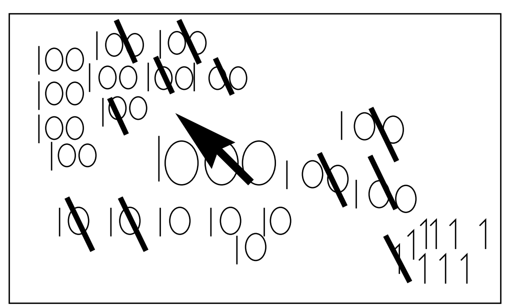
Les élèves peuvent utiliser des dessins pour illustrer rapidement une expression numérique comme 1 369 — 821. Les nombres peuvent être représentés par des lignes, des cercles, des points, etc. Un retrait peut être exprimé par des barres sur le dessin. Pour 1 369 – 821, il faut enlever 8 centaines, 2 dizaines et 1 unité des 13 centaines, 6 dizaines et 9 unités.



Au lieu d'utiliser un dessin, les élèves peuvent se servir de la valeur de position des chiffres et appliquer la même stratégie. Par exemple, dans l'illustration ci-après, 1 369 — 821 a d'abord été représenté par un millier, 3 centaines, 6 dizaines et 9 unités. Lorsque l'élève a voulu soustraire 821, elle s'est vite aperçue que c'était impossible dans la forme actuelle. Elle a donc décomposé le millier en 10 centaines, ce qui lui a permis d'enlever les 8 centaines.



1 369 moins 821. Je ne peux pas enlever 8 centaines, car j'en ai seulement 3. Mais si j'échange le millier, j'ai maintenant 13 centaines et je peux enlever 8 centaines. Je peux ensuite enlever 2 dizaines des 6 dizaines et 1 unité des 9 unités. Il reste alors 548.



Rappel

Stratégie de calcul mental

Algorithme personnel écrit

Algorithme usuel

Il serait important d'amener cette élève à reconnaître le lien entre ce qu'elle a fait dans cette représentation et l'échange dans l'algorithme usuel.

$$\begin{array}{rr} & {}^{0}\cancel{1}\,{}^{13}369 \\ - & 821 \\ \hline & 548 \end{array}$$

Après avoir fait l'expérience de diverses façons de représenter les opérations, les élèves comprennent mieux leur valeur respective. Voici quelques exemples de stratégies de calcul.

Exemples

588 – 234

- Décomposer des nombres selon les valeurs de position et effectuer des soustractions partielles :

500 moins 200 égalent 300.
80 moins 30 égalent 50.
8 moins 4 égalent 4.
Donc, 588 moins 234 donnent 354.

588 – 234 = ?
500 – 200 = 300
80 – 30 = 50
8 – 4 = 4
300 + 50 + 4 = 354

588 – 234 = ?
300 50 4
354

- Arrondir les nombres, soustraire et rajuster :

J'arrondis 588 à 600. Je soustrais 200 (400), ensuite 30 (370), puis 4 (366). J'enlève 12 (ajouté à 588 au début). J'obtiens donc 354.

588 – 234
600 – 234
600 – 200 = 400
400 – 30 = 370
370 – 4 = 366
366 – 12 = 354

- Soustraire par la gauche :

588 moins 200 égalent 388.
388 moins 30 égalent à 358.
358 moins 4 égalent 354.

588 − 234 = ?
588 − 200 = 388
388 − 30 = 358
358 − 4 = 354
588 − 234 = 354

- Décomposer les nombres :

Je sais que 500 moins 200 donnent 300, que 88, c'est 84 plus 4 et que 84 moins 34 donnent 50. Il ne me reste plus qu'à additionner 300, 4 et 50, ce qui donne 354.

588 − 234 = ?
300   88 − 34
4 + 84
84 − 34 = 50
300 + 4 + 50 = 354

Divers algorithmes usuels sont utilisés dans le monde pour effectuer des soustractions. Voici celui qu'on retrouve habituellement dans les manuels de mathématiques des écoles ontariennes :

$$\begin{array}{r} {}^{2}\cancel{3}\,{}^{11}\cancel{2}\,{}^{1}4 \\ -\ 189 \\ \hline 135 \end{array}$$

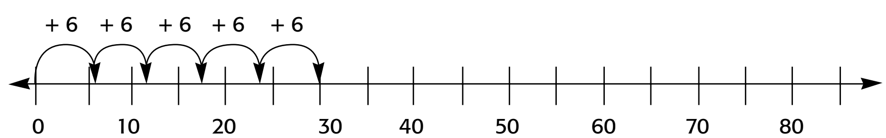
Cet algorithme n'est pourtant qu'une stratégie parmi tant d'autres. Il demeure important que les élèves choisissent une stratégie efficace qu'ils comprennent et puissent expliquer.

Multiplication

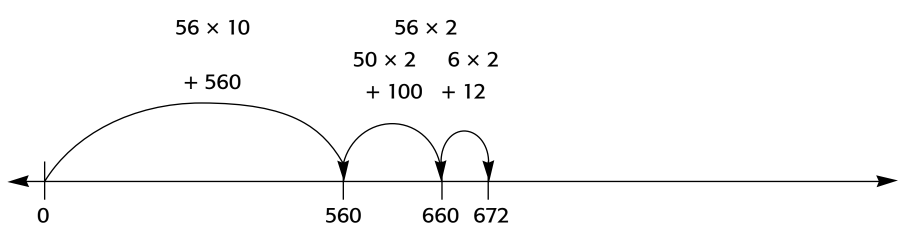
L'enseignement du concept de multiplication occupe une grande place au cycle moyen. L'enseignant ou l'enseignante doit faire en sorte que ses élèves l'intègrent bien et qu'ils puissent effectuer des multiplications en utilisant diverses stratégies.

Il est possible de représenter la multiplication en utilisant du matériel concret. Par exemple, 3×7 peut être représenté par 3 groupes de 7 jetons. Les jetons sont ensuite dénombrés afin de déterminer le résultat de l'opération.

La droite numérique est utile pour représenter par bonds le nombre de répétitions d'une quantité. Le nombre sur lequel s'arrête le dernier bond est le produit recherché. Par exemple, 5×6 :



Pour évaluer une expression avec de grands nombres, il est possible de jumeler des stratégies et de les représenter sur une droite numérique. Par exemple, 56×12 c'est $56 \times (10 + 2)$. Alors $56 \times 10 = 560$ et il reste 56×2. Or, $50 \times 2 = 100$ et $6 \times 2 = 12$. Dans ce cas, on a jumelé la propriété de la distributivité et la droite numérique ouverte :



L'utilisation de la grille de nombres permet aux élèves de voir certaines régularités de la multiplication, ce qui les aide à établir des liens entre les propriétés des nombres. Par exemple, les multiples de 4, dans l'ordre, ont comme chiffre des unités, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0…

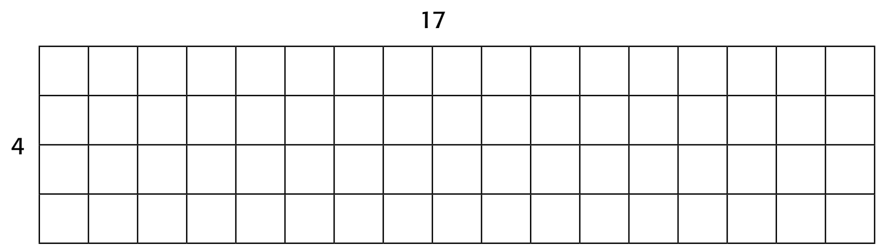
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
34	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les élèves peuvent aussi utiliser la relation entre la multiplication et l'addition et faire une addition répétée, ou jumeler l'addition répétée à la stratégie du « double ». Par exemple, 43 × 8 :

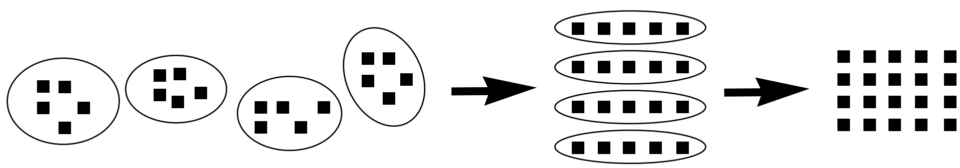
```
  43                      43
+ 43                    + 43
----                    ----
  86                      86   (double de 43) 86
                                            + 86
+ 43               43 × 2                   ----
----                                         172   (double de 86)  172
 129                                                              +172
                                   43 × 4                         ----
 ...                                                               344  (double de 172)
+ 43
----                                                     43 × 8
 344
```

Dans l'exemple à gauche, on effectue des additions pour obtenir 43 + 43 + 43 + 43 + 43 + 43 + 43 + 43. Dans l'exemple à droite, on double trois fois, en effectuant des additions, ce qui équivaut à effectuer 43 × 2 × 2 × 2.

La multiplication peut aussi être représentée à l'aide d'une disposition rectangulaire. Il s'agit d'un modèle de forme rectangulaire qui illustre des rangées et des colonnes d'objets. Par exemple, 4 × 17 est représenté par un rectangle de 4 rangées de 17 petits carrés.



Le modèle de la disposition rectangulaire peut être présenté aux élèves de différentes façons. Dans le cadre d'un échange mathématique, par exemple, l'enseignant ou l'enseignante peut partir du travail d'un élève et proposer une nouvelle organisation des objets en disposition rectangulaire. De 4 groupes de 5 objets, on obtient 4 rangées de 5 objets.



Travail d'un élève

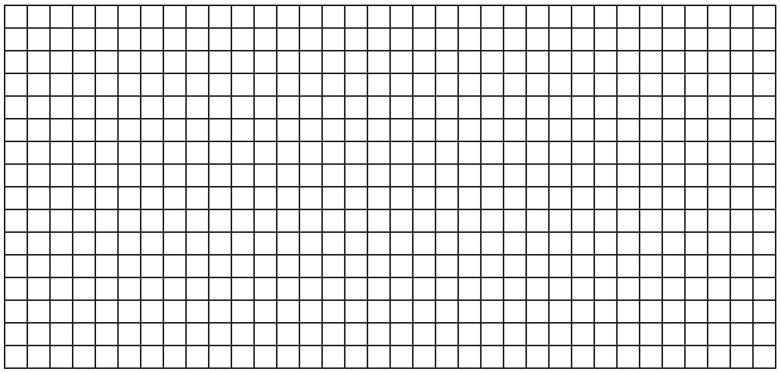
Disposition rectangulaire

On peut aussi présenter divers articles de la vie courante placés en arrangements rectangulaires (p. ex., boîte à œufs, boîtes de jus, contenants de yogourt, moule à muffins) et demander comment déterminer le nombre d'articles. Certains font un dénombrement, mais plusieurs, intuitivement, effectuent une addition répétée ou même une multiplication en fonction des rangées.

Lorsque les élèves comprennent bien le modèle, il est possible d'utiliser une disposition rectangulaire pour effectuer un calcul. On peut le faire sur du papier quadrillé. Par exemple, pour calculer 16 × 34 :

34

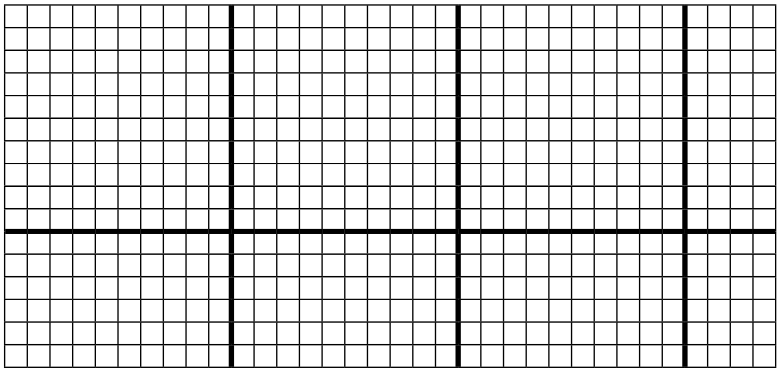
16



Pour mieux calculer le nombre de carrés, on trace des lignes épaisses afin de délimiter les regroupements de 10 de chaque facteur.

34

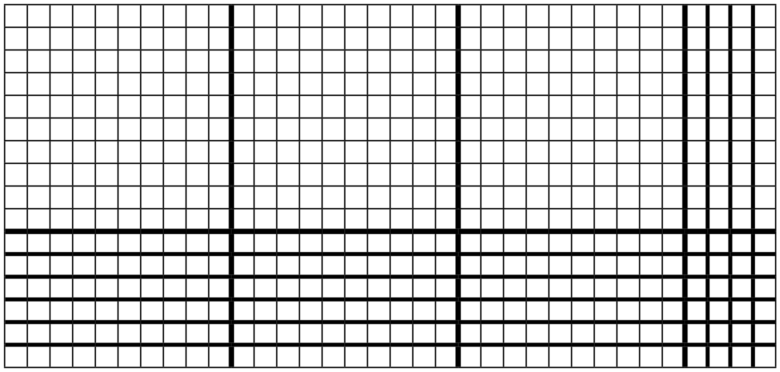
16



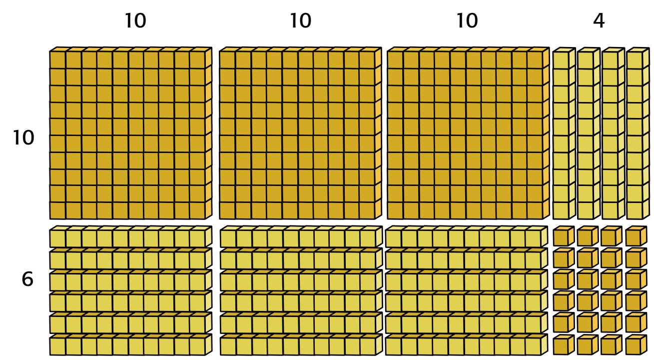
Ainsi, on voit bien les 3 centaines. Pour mieux voir les dizaines et les unités, on peut aussi noircir certaines lignes.

34

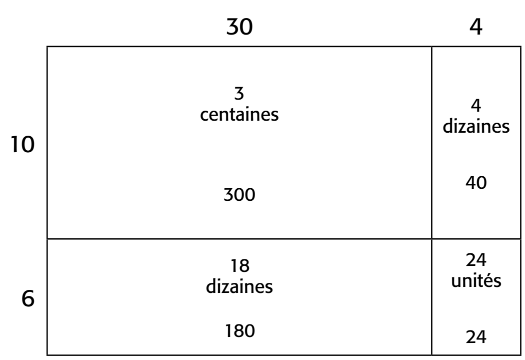
16

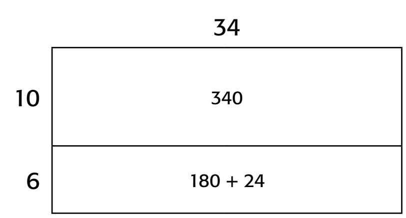


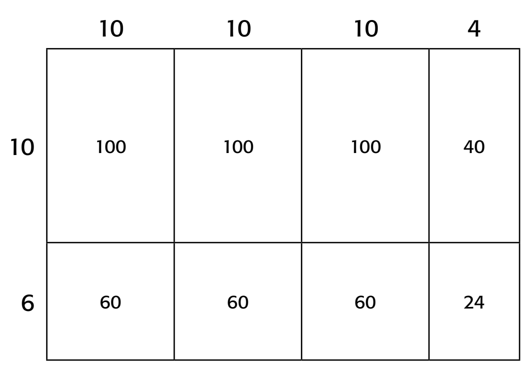
On voit bien les 18 dizaines en position horizontale et les 4 dizaines en position verticale, ainsi que les 24 unités en bas à droite. Vingt dizaines peuvent être regroupées pour faire 2 centaines et vingt unités peuvent être regroupées pour faire 2 dizaines. À la fin, on a 5 centaines, 4 dizaines et 4 unités, soit 544. Cette représentation s'apparente à une disposition rectangulaire créée avec du matériel de base dix.

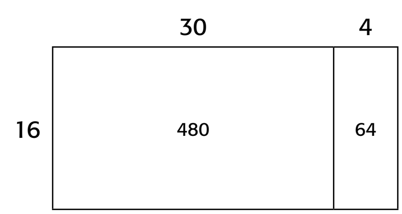


Dans les exemples précédents, toutes les rangées et toutes les colonnes sont délimitées. Donc, chaque unité est identifiable. Avec le temps, les élèves peuvent représenter la même situation autrement en créant des dispositions rectangulaires variées où chaque unité n'est pas représentée. Voici quatre autres dispositions rectangulaires qui représentent 16 × 34.

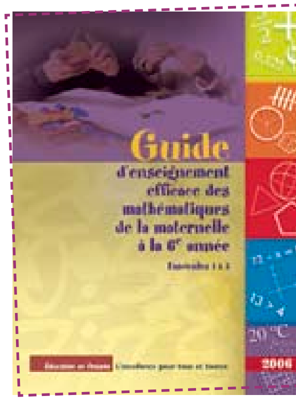








Avec de la pratique, les élèves se servent de la disposition rectangulaire mentalement. Pour avoir une description plus détaillée, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 61-64).



En apprenant et en pratiquant plusieurs façons de représenter les opérations, les élèves acquièrent un meilleur sens de la multiplication et réussissent plus facilement à déterminer le produit. Voici quelques exemples de stratégies de calcul.

Rappel

Stratégie de calcul mental

Algorithme personnel écrit

Algorithme usuel

Exemples

28 × 12

- Utiliser un cas plus facile à calculer ou utiliser la distributivité :

Puisque 28 est près de 30 et que 3 × 12 = 36, donc 30 × 12 = 360
Puisque j'ai rajouté 2 groupes de 12, je dois maintenant les retirer.
Donc, 360 – 24 = 336.

$$\begin{array}{r} 30 \times 12 = 360 \\ 2 \times 12 = 24 \\ \hline 28 \times 12 = 336 \end{array}$$

- Décomposer le premier facteur selon la valeur de position, multiplier et additionner les produits partiels :

28, c'est 20 + 8.
Puisque 2 × 12 = 24,
donc 20 × 12 = 240 et
8 × 12 = 96. Donc,
240 + 96 = 336.

$$\begin{array}{r} 20 \times 12 = 240 \\ 8 \times 12 = 96 \\ \hline 28 \times 12 = 336 \end{array}$$

- Utiliser les propriétés de la multiplication (distributivité et associativité) :

28 × 12, c'est (25 × 12) + (3 × 12).
25 × 12, c'est (25 × 4) × 3 ou 300
et 3 × 12, c'est 36. En tout, on a 336.

$$\begin{array}{c} 28 \times 12 \\ (25 + 3) \times 12 \\ (25 \times 12) + (3 \times 12) \\ 25 \times 4 \times 3 + 36 \\ 100 \times 3 + 36 \\ 336 \end{array}$$

Voici l'algorithme usuel de la multiplication qu'on retrouve souvent dans les manuels de mathématiques.

$$\begin{array}{r} {}^{4} \\ 37 \\ \times \quad 6 \\ \hline 222 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1\,\cancel{2}} \\ 34 \\ \times \quad 45 \\ \hline 170 \\ +\ 1360 \\ \hline 1530 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{3\,2} \\ {}^{\cancel{4}\,\cancel{3}} \\ 354 \\ \times \quad 169 \\ \hline 3186 \\ 21240 \\ +\ 35400 \\ \hline 59826 \end{array}$$

Voici deux exemples de stratégies de multiplication qui pourraient être présentées pour susciter l'intérêt des élèves et exercer leur raisonnement mathématique par rapport aux opérations.

Exemple 1

La première méthode, dite du paysan russe, est une forme de compensation. Voici comment on multiplie 28 × 12 selon cette méthode :

On divise le premier facteur par 2 et on multiplie le deuxième facteur par 2 pour obtenir 14 × 24.

On recommence pour obtenir 7 × 48.

On recommence pour obtenir 3,5 × 96.

$$28 \times 12 = 14 \times 24 = 7 \times 48 = 3{,}5 \times 96 \xrightarrow{(-\,48)} 3 \times 96 = 1{,}5 \times 192 \xrightarrow{(-\,96)} 1 \times 192$$

÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2

× 2 × 2 × 2 × 2

Les trois premières expressions, soit 28 × 12, 14 × 24 et 7 × 48, ont le même produit, puisque dans chaque cas, on a divisé le premier facteur par 2 et compensé en multipliant le deuxième facteur par 2.

Or, on remplace la dernière opération par 3 × 96, ce qui a pour effet de diminuer le produit de 0,5 × 96, soit la moitié de 96 (48). On devra donc ajouter 48 à la fin.

On divise de nouveau le premier facteur par 2 et on multiplie le deuxième par 2 pour obtenir une expression équivalente, soit 1,5 × 192.

Une fois de plus, on laisse tomber la partie décimale, soit 0,5, pour ne conserver que l'expression 1 × 192, ce qui diminue le produit de 0,5 × 192, soit la moitié de 192 (96). On devra donc ajouter 96 à la fin.

Ainsi, l'expression 1 × 192 est égale à 192. Ce produit, avec les produits qu'on a enlevés, est égal au produit de l'expression initiale. Donc, 28 × 12 est égal à 192 + 48 + 96, soit 336.

Exemple 2

Le deuxième exemple est d'origine égyptienne. Pour multiplier, on fait appel au concept de doublement et à la décomposition d'un des facteurs. Ainsi, pour calculer 12 × 28, on double 28, on double le résultat, et ainsi de suite. On s'arrête lorsque l'expression suivante (16 × 28) dépasse celle que l'on veut, soit 12 × 28.

On obtient ainsi :

$1 \times 28 = 28$

$2 \times 28 = 56$

$4 \times 28 = 112$

$8 \times 28 = 224$

$$\boxed{\begin{array}{c}(4 \times 28) + (8 \times 28) = 12 \times 28 \\ 112 + 224 = 336\end{array}}$$

Des expressions ci-dessus, on peut penser qu'on a 1 groupe de 28, 2 groupes de 28, 4 groupes de 28 et 8 groupes de 28. On veut choisir un total de 12 groupes de 28. On choisit donc 4 groupes plus 8 groupes. Ainsi, on détermine que 12 × 28 = 336.

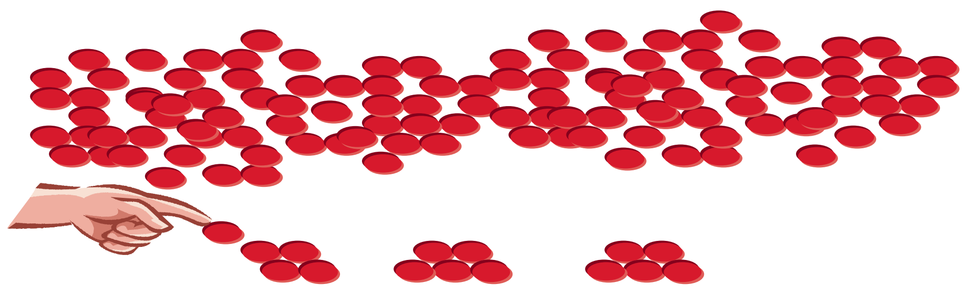
Une stratégie de multiplication d'origine arabe, basée sur un système de numération positionnel, est démontrée dans le module *Opérations fondamentales* sur le site atelier.on.ca.

atelier.on.ca

Division

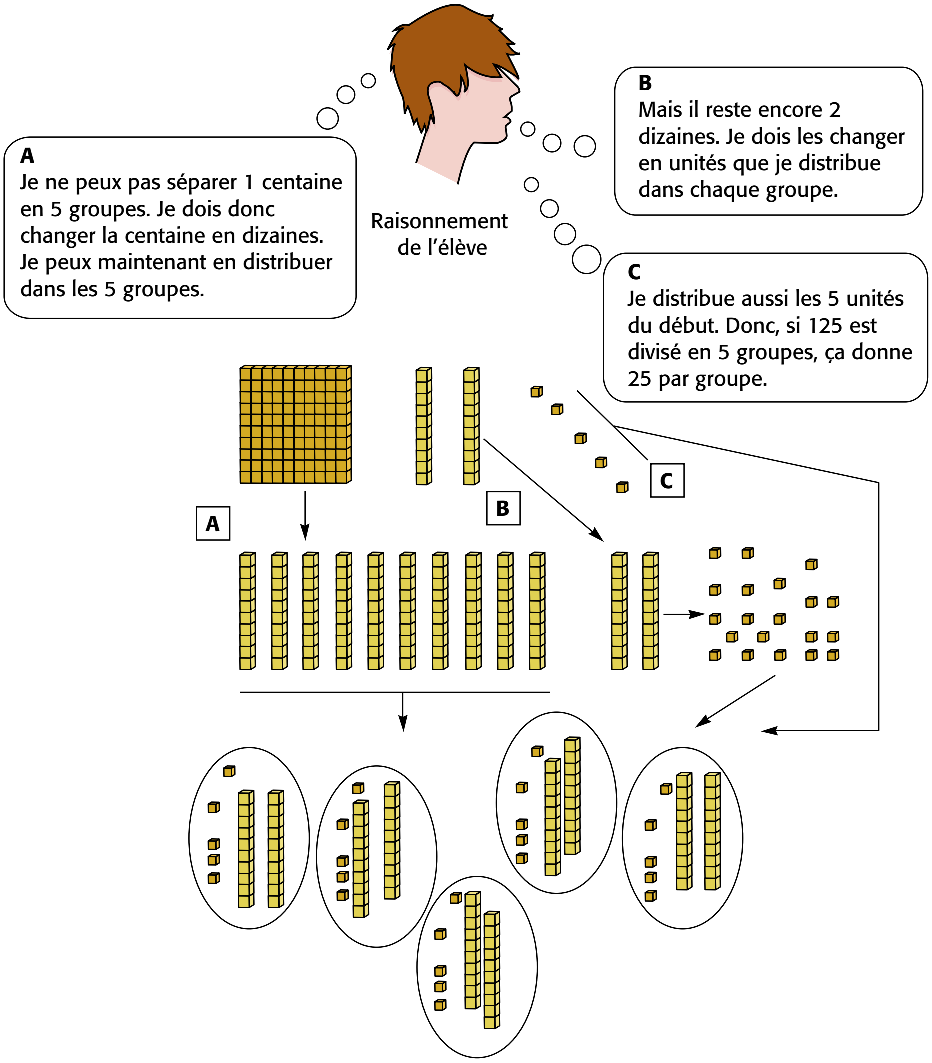
Devant une division à effectuer, soit que l'on cherche le nombre de groupes, – sens de groupement – soit que l'on cherche la taille de chaque groupe – sens de partage (pour plus de détails, voir *Multiplication et division*, p. 84-87). Ainsi, les stratégies de calcul peuvent différer selon le sens de la division. Les élèves doivent avoir l'occasion d'apprendre et d'utiliser plusieurs stratégies pour résoudre des problèmes de division des deux types.

Comme pour les autres opérations, au départ les élèves peuvent utiliser du matériel de manipulation. L'exemple suivant illustre comment représenter 125 ÷ 5 dans une **situation de groupement**. On cherche le nombre de groupes de 5 jetons.

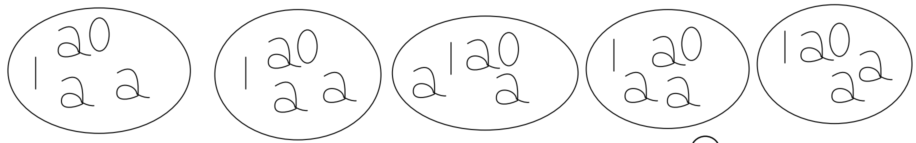


L'exemple suivant illustre comment représenter 125 ÷ 5 dans une **situation de partage**. On cherche le nombre de jetons qu'il y aura dans chacun des 5 sacs.

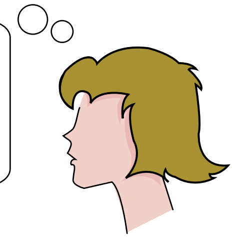
On peut ensuite amener les élèves à utiliser le matériel de base dix qui fait appel aux regroupements. Ainsi, pour calculer **125 ÷ 5**, ils pourraient agir comme suit :



Après avoir travaillé avec du matériel de base dix dans une variété de situations, les élèves peuvent se servir d'illustrations ou de nombres. Ainsi, pour calculer **125 ÷ 5**, ils pourraient faire comme suit :



125, c'est 100 plus 25. Puisque 100, c'est 5 groupes de 20, chaque ensemble comprend au moins 20 éléments. Il faut tenir compte des 25 unités qui restent. Si je mets 2 unités dans chaque ensemble, je dois répéter ce geste 1 fois. Ensuite, il reste seulement 5 unités, donc 1 par ensemble pour un total de 25.



Raisonnement de l'élève

$125 \div 5 = (100 + 25) \div 5$

$5 \times \mathbf{20} \qquad 5 \times \mathbf{5}$

$(20 + 5)$

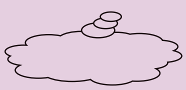
$125 \div 5 = 25$

Dans cet algorithme personnel écrit, l'élève passe par une réflexion mentale avant de laisser des traces sur papier. Cette réflexion mène aussi au calcul mental.

Les élèves peuvent effectuer des divisions en utilisant différentes stratégies de calcul.

Rappel

Stratégie de calcul mental



Algorithme personnel écrit

Algorithme usuel

Exemples

$\boxed{\mathbf{372 \div 6}}$

- Décomposer le dividende :

372, c'est 360 + 12. Puisque 6 × 6 = 36, alors 6 × 60 = 360. Puisque 12 ÷ 6 = 2, la réponse est 60 + 2 ou 62.

$372 \div 6 = ?$

$372 = \quad 360 + 12$

$60 \times 6 \qquad 2 \times 6$

$60 \quad + \quad 2 = 62$

$372 \div 6 = 62$

- Décomposer le dividende selon la valeur de position :

372, c'est 300 + 70 + 2. Or, 6 × 50 = 300 et 70 ÷ 6 est égal à 10 reste 10. Alors 12 (de 10 + 2) ÷ 6 = 2. On a donc 50 + 10 + 2, soit 62.

$372 = 300 + 70 \quad + \quad 2$

$\downarrow{\div 6} \quad \downarrow{\div 6} \qquad \downarrow$

12

$50 \qquad 10 \text{ r } 10 \qquad \downarrow{\div 6}$

2

$372 \div 6 = 62$

Puisque la division peut être associée à une soustraction répétée, les élèves l'emploient souvent pour résoudre un problème de division. Par exemple, si on possède 120 bonbons et qu'on en donne 15 par ami, la soustraction nous permet de conclure que 8 amis vont en recevoir.

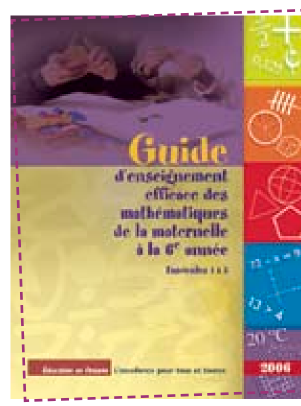
120	
– 15	1
105	
– 15	2
90	
– 15	3
75	
– 15	4
60	
– 15	5
45	
– 15	6
30	
– 15	7
15	
– 15	8
0	

Il existe plusieurs algorithmes usuels pour calculer le quotient et le reste d'une division. Voici deux versions d'un algorithme usuel que l'on voit dans les écoles ontariennes. En les comparant, on remarque que le raisonnement est le même. Seule la disposition est différente.

```
  153 r 3
5)768
 – 5
   26
 – 25
    18
  – 15
     3
```

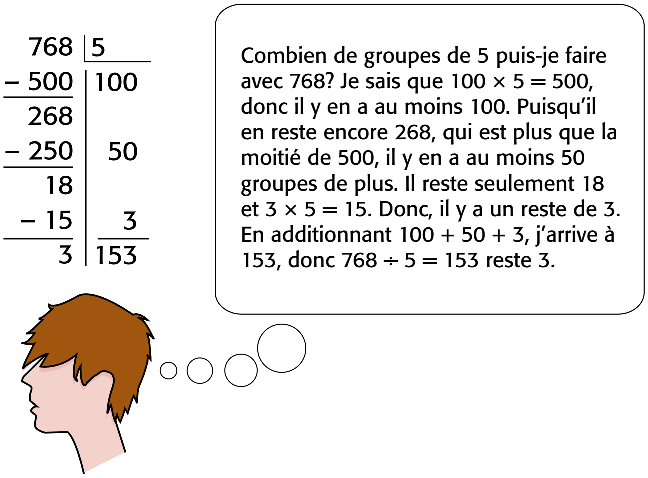
```
 768 | 5
– 5  | 153 r 3
  26
– 25
   18
 – 15
    3
```

Dans cet algorithme, plusieurs concepts sont sous-entendus. Lorsqu'on l'utilise, on doit porter une attention particulière à la manière de traiter les nombres et au vocabulaire utilisé. Par exemple, pour évaluer l'expression numérique 768 ÷ 5, certains enseignants et enseignantes pourraient demander : « Combien de fois 5 va-t-il dans 7? » Cette façon de présenter le problème, en traitant les chiffres comme des nombres, sans tenir compte de leur valeur, amène les élèves à croire que l'algorithme n'est qu'une suite d'étapes à suivre, soit une recette. Il est pourtant essentiel de comprendre la raison d'être des étapes. Il est préférable de demander : « Combien de centaines peuvent être placées dans chacun des 5 groupes? » Pour d'autres pistes pédagogiques, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 65-68).



Voici une utilisation de l'algorithme qui correspond à une compréhension des étapes :

$$
\begin{array}{r|r}
5\overline{)768} & \\
\underline{-\ 500} & 100 \\
268 & \\
\underline{-\ 250} & 50 \\
18 & \\
\underline{-\ 15} & \underline{3} \\
3 & 153
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r|l}
768 & \underline{5\quad} \\
\underline{-\ 500} & 100 \\
268 & \\
\underline{-\ 250} & \ \ 50 \\
18 & \\
\underline{-\ 15} & \underline{\ \ \ \ 3} \\
3 & 153
\end{array}
$$

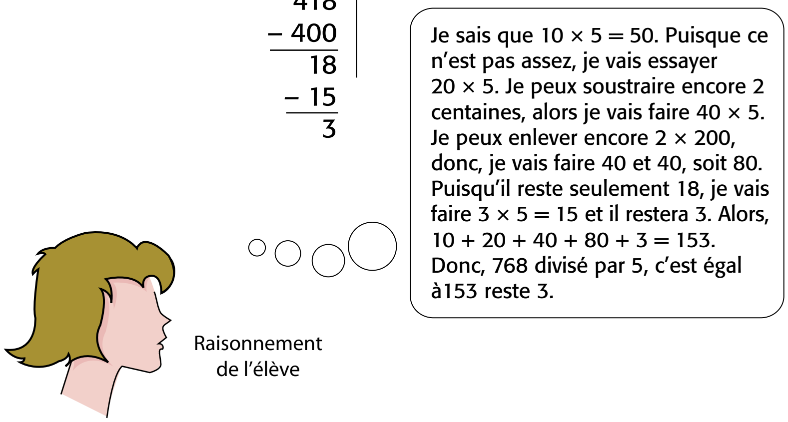


Raisonnement
de l'élève

Dans ce cas, l'élève a choisi d'écrire à côté les nombres de groupes qu'il estimait pouvoir faire (100, 50, 3). Les élèves peuvent choisir d'écrire ces nombres ailleurs. D'ailleurs, s'ils utilisent l'algorithme de la façon la plus logique pour eux, il devient un algorithme personnel.

Certaines élèves pourraient arriver à effectuer l'opération avec un raisonnement semblable, tout en prenant plusieurs étapes de plus, comme dans l'exemple suivant. Il est important que les élèves comprennent les gestes qu'ils posent, alors que l'algorithme usuel est souvent enseigné comme une simple recette.

$$
\begin{array}{r}
10 + 20 + 40 + 80 + 3 = 153 \\
\hline
5\,\big)\,768 \\
-\ 50 \\
\hline
718 \\
-\ 100 \\
\hline
618 \\
-\ 200 \\
\hline
418 \\
-\ 400 \\
\hline
18 \\
-\ 15 \\
\hline
3
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r|l}
768 & 5 \\
\cline{2-2}
-\ 50 & 10 + 20 + 40 + 80 + 3 = 153 \\
\cline{1-1}
718 & \\
-\ 100 & \\
\cline{1-1}
618 & \\
-\ 200 & \\
\cline{1-1}
418 & \\
-\ 400 & \\
\cline{1-1}
18 & \\
-\ 15 & \\
\cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$



Il importe aussi que les élèves aient vu plusieurs notations de la division afin de pouvoir facilement passer de l’une à l’autre et d’élargir leur banque de stratégies personnelles. Par exemple, pour exprimer $360 \div 24$, $\frac{360}{24}$, $24\overline{)360}$ ou $360\,\underline{|\,24}$, il arrive que des élèves ignorent où positionner le dividende, le diviseur et le quotient. Cette situation se produit moins souvent si l’algorithme émane des élèves, car ils comprennent mieux ce qui se passe.

ÉTABLIR DES LIENS

> *Les élèves doivent se rendre compte que « … les mathématiques sont beaucoup plus qu'un ensemble de notions théoriques et pratiques isolées. Les enseignantes et enseignants encouragent les élèves à découvrir de quelles façons les mathématiques sont reliées à leurs expériences quotidiennes afin de leur permettre d'en comprendre l'utilité et la pertinence, à l'école et ailleurs. »*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 19)

Afin de faciliter l'apprentissage des concepts liés aux nombres naturels, l'enseignant ou l'enseignante doit fournir aux élèves des occasions d'établir des liens entre ces concepts et :

- des expériences de la vie quotidienne;
- des concepts dans les autres domaines de mathématiques;
- des concepts dans les autres matières;
- différentes professions.

Voici quelques exemples d'activités qui permettent de créer des liens ainsi que des exemples de professions qui demandent une bonne connaissance des nombres naturels.

Liens avec des expériences de la vie quotidienne

Exemple 1 : Au voleur!

Cette activité aide les élèves à développer le sens des grands nombres (p. ex., un million) et à interpréter de façon critique les nombres donnés dans les médias.

L'enseignant ou l'enseignante projette l'article suivant au tableau (ou en remet une copie à chaque élève) et demande à un ou à une élève d'en faire la lecture à la classe.

Vol de banque!

Un cambriolage a eu lieu hier soir à la banque de la ville. Selon des sources sûres, 21 liasses de 100 000 $ chacune ont disparu du coffre-fort principal. Les policiers sont à la recherche de tout indice pouvant mener à l'arrestation du ou des coupables. Tout renseignement peut être communiqué au 555-555-5555.

Après la lecture, l'enseignant ou l'enseignante invite les élèves à échanger entre eux sur la portée de ce vol en posant des questions telles que : « Quel montant d'argent a été volé? Comment écrit-on ce montant en chiffres? » Afin que les élèves se fassent une idée juste du sens de la quantité volée, il ou elle leur demande combien il faudrait de liasses de 10 000 $ pour obtenir une somme équivalente à la somme volée. Combien de liasses de 1 000 $? Ces questions font ressortir les relations entre les valeurs de position (p. ex., 1 million c'est aussi 100 dizaines de mille ou 1 000 milliers). L'utilisation d'un tapis de valeur de position ou de billets en papier peut aider les élèves à mieux voir ces relations et déterminer qu'il s'agit d'une escroquerie de plus de 2 millions de dollars. L'enseignant ou l'enseignante peut aussi aider les élèves à développer un sens de la quantité volée en posant des questions telles que : « Le montant de 2 100 000 $ représente combien de dollars par habitant de notre ville? Pour une personne qui travaille 8 heures par jour, 250 jours par année au tarif de 15 $ l'heure, combien d'années de travail ce vol représente-t-il? »

L'enseignant ou l'enseignante peut ensuite demander aux élèves de trouver d'autres exemples d'utilisation de grands nombres dans les journaux ou les revues (p. ex., population d'une ville ou d'un pays, montant du budget provincial ou fédéral, coût moyen des maisons) et échanger avec eux sur le sens de ces nombres.

Exemple 2 : Mon âge? – J'ai 5 650 000 secondes, et toi?

Cette activité permet aux élèves d'examiner de grands nombres et d'évaluer l'importance du choix de l'unité de mesure.

Lorsque les adultes rencontrent des enfants, il est fréquent qu'ils leur demandent leur âge. Généralement, l'âge est calculé en années, mais les jeunes enfants répondent souvent : « J'ai 5 ans et 6 mois » tout comme une maman dira de son bébé qu'il a « 18 mois ». Pourquoi, en effet, ne pas calculer l'âge en utilisant d'autres unités de mesure que l'année (p. ex., seconde, minute, heure, jour, semaine, mois)?

L'enseignant ou l'enseignante propose aux élèves de calculer leur âge en fonction de diverses unités de mesure. Pour y arriver, les élèves doivent d'abord connaître les liens entre les mesures de temps (p. ex., il y a 60 secondes dans 1 minute, 60 minutes dans 1 heure, 24 heures dans 1 journée, 7 jours dans 1 semaine; il y 12 mois, 52 semaines ou 365 jours dans 1 année). Un élève de 10 ans pourra donc affirmer qu'il est âgé de *plus de 3 650 jours* ou encore qu'il est âgé de *plus de 520 semaines* ou *120 mois*. Il pourra même ajouter qu'il a vécu *plus de 87 600 heures* ou *plus de 5 256 000 minutes* ou même *plus de 300 millions de secondes*.

Note : Il est courant d'utiliser la forme décimale pour représenter certains grands nombres. Par exemple, on peut dire que 5 256 000 minutes correspondent à environ 5,3 millions de minutes.

Après que les élèves ont fait des calculs mentalement, sur papier ou à l'aide d'une calculatrice, l'enseignant ou l'enseignante peut discuter avec eux du choix des stratégies de calcul et des unités de mesure employées. Il ou elle doit souligner l'importance d'arrondir les nombres compte tenu du fait qu'il n'est pas nécessaire d'obtenir une réponse avec un haut niveau d'exactitude. Par exemple, après avoir calculé qu'une année équivaut à 525 600 minutes, un ou une élève peut choisir d'arrondir ce nombre à un demi-million de minutes. Un ou une autre peut choisir d'arrondir le nombre de semaines dans une année à 50 pour faciliter ses calculs et ensuite, faire ou non l'ajout des semaines manquantes à la fin. À l'inverse, certains élèves peuvent chercher une réponse plus précise en tenant compte, par exemple, de la date exacte de naissance ou des années bissextiles.

L'enseignant ou l'enseignante peut discuter avec les élèves des avantages de mesurer l'âge en années. En effet, les âges donnés en secondes sont très grands, plus difficiles à manipuler, à lire, à exprimer ou à écrire, et leur sens, plus difficile à saisir. Par exemple, le fait que la différence d'âge entre deux élèves de la même classe soit de un demi-million de minutes peut sembler énorme alors qu'en réalité, cela représente moins de un an de différence. Dans ce cas, il serait plus pertinent d'examiner la différence d'âge en mois.

L'enseignant ou l'enseignante peut aussi discuter de l'avantage, dans certains cas, d'utiliser une unité de mesure autre que les années. En effet, dans le cas de jeunes enfants, il est courant de donner l'âge en mois (p. ex., bébé de 16 mois). Parfois, le choix de l'unité de mesure fait partie d'une stratégie de marketing (p. ex., une garantie prolongée de 36 mois peut sembler plus avantageuse qu'une garantie de 3 ans).

Liens avec des concepts dans les autres domaines de mathématiques

Exemple 1 : Et ensuite?

Cette activité intègre des concepts en numération et sens du nombre ainsi qu'en mesure. Elle permet d'abord aux élèves de se construire une représentation mentale de grands nombres jusqu'à 1 million et ensuite de faire le lien avec le concept d'aire mesurée en centimètres et en mètres carrés.

Matériel

- 1 petit carré unitaire (1 cm × 1 cm)
- 10 bandes de papier (10 cm × 1 cm), chacune comptant 10 carrés unitaires
- photocopies d'un grand carré (10 cm × 10 cm) comptant 100 carrés unitaires (2 par élève)
- grandes feuilles de papier ou papier journal
- colle ou ruban adhésif

Dans la première partie de l'activité, les élèves développent progressivement un sens de la quantité représentée par des grands nombres (1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000). L'enseignant ou l'enseignante montre aux élèves le petit carré (Figure 1) et leur indique qu'il représente **1 carré unitaire**. Il ou elle leur montre ensuite une bande qui équivaut à **10 carrés unitaires** (Figure 2) et leur demande comment faire pour représenter **100 carrés unitaires**. À partir de leur sens du nombre et de leurs expériences antérieures avec le matériel de base dix, ils devraient répondre qu'ils peuvent assembler 10 bandes l'une à côté de l'autre de façon à former un grand carré de 10 cm sur 10 cm (Figure 3). Il est important de faire ressortir que les 10 bandes constituent 10 dizaines de carrés unitaires ou 100 carrés unitaires. Et ensuite?

Figure 1
1 carré unitaire

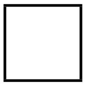


Figure 2
10 carrés unitaires

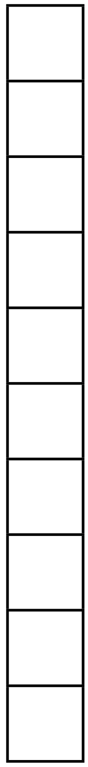


Figure 3
100 carrés unitaires

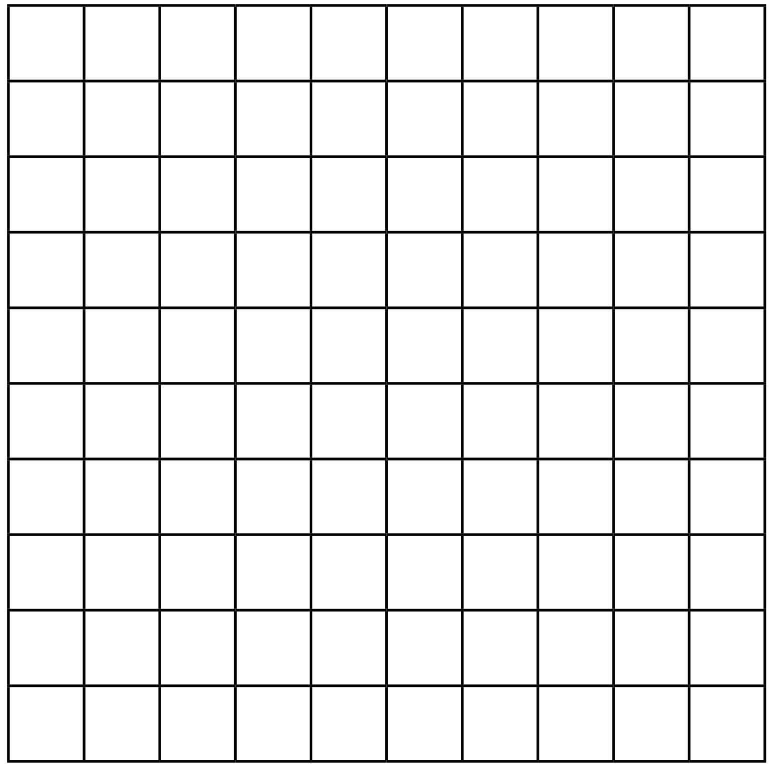


Photo A : 1 000 carrés unitaires

Photo B : 10 000 carrés unitaires

L'enseignant ou l'enseignante remet à chaque élève deux copies de la figure 3 (100 carrés unitaires). Il ou elle groupe les élèves par cinq et leur demande de représenter **1 000 carrés unitaires**. Ils pourraient les disposer de façon à former une grande bande mesurant 10 cm sur 100 cm (Photo A) à partir de leurs 10 copies de 100 carrés unitaires. Et ensuite?

L'enseignant ou l'enseignante remet ensuite à chaque groupe une grande feuille de papier ou du papier journal et leur demande de représenter **10 000 carrés unitaires**. Pour ce faire, les élèves peuvent prendre leur bande de 1 000 carrés unitaires et la reproduire 10 fois sur la grande feuille ou sur le papier journal (Photo B) de façon à former un carré de 100 cm sur 100 cm. Et ensuite?

L'enseignant ou l'enseignante demande maintenant à tous les élèves de la classe de se regrouper pour représenter **100 000 carrés unitaires**. Ils peuvent par exemple assembler 10 représentations de 10 000 carrés unitaires (Photo C) de façon à former une bande de 100 cm sur 1 000 cm. Il faut prévoir un espace assez grand (p. ex., corridor) puisque la bande mesurera 10 m de long. Et ensuite?

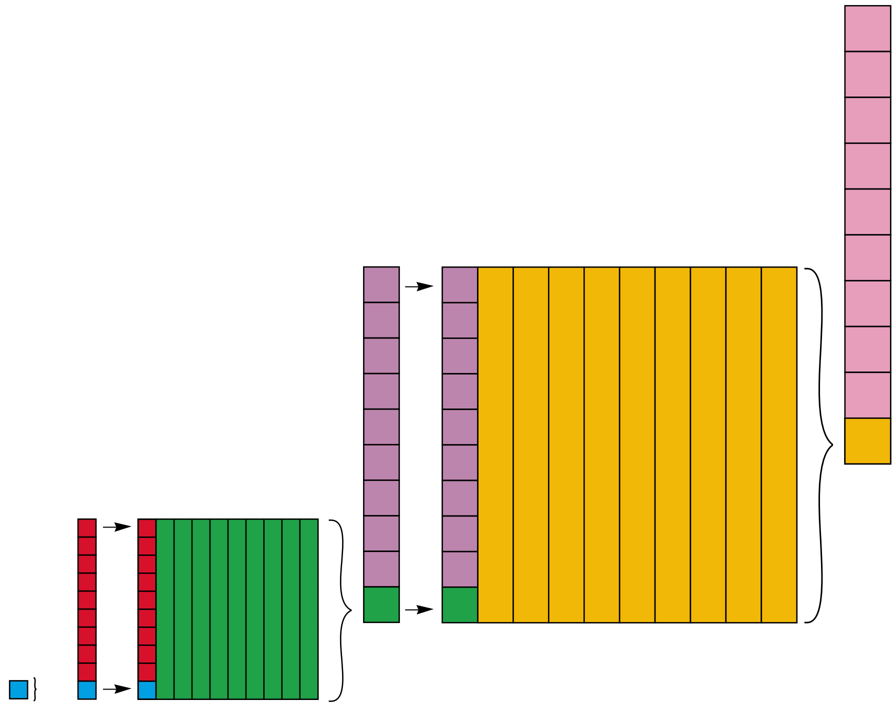
Photo C : 100 000 carrés unitaires

Pour représenter **1 000 000 de carrés unitaires**, il faut se rendre à l'extérieur ou au gymnase et assembler 10 grandes bandes de 100 000 carrés unitaires, ou délimiter l'espace qu'occuperaient ces 10 bandes, de façon à former un carré de 1 000 cm sur 1 000 cm (Photo D).

Photo D : 1 000 000 de carrés unitaires

Tout au long de l'activité, attirer l'attention sur la relation multiplicative par 10 qui définit chaque passage d'une étape à l'autre, ainsi que sur la suite de représentations composée d'un carré, d'une bande, d'un plus grand carré, d'une plus grande bande… Par exemple, on multiplie un carré unitaire par 10 pour obtenir une bande formée de 10 carrés unitaires, on multiplie la bande par 10 pour obtenir un plus grand carré formé de 100 carrés unitaires… (Figure 4 et Photo E). Cette régularité est identique à celle que l'on retrouve dans les valeurs de position de notre système de numération (unités, dizaines, centaines…). Au cours d'un échange mathématique, il est important de faire ressortir les liens entre les nombres pour que le concept de quantité soit bien compris. Par exemple, 1 000 unités sont égales à 100 dizaines d'unités ou à 10 centaines d'unités.

Figure 4



1 10 100 1 000 10 000 100 000

Note : Les représentations ci-dessus ne sont pas à l'échelle.

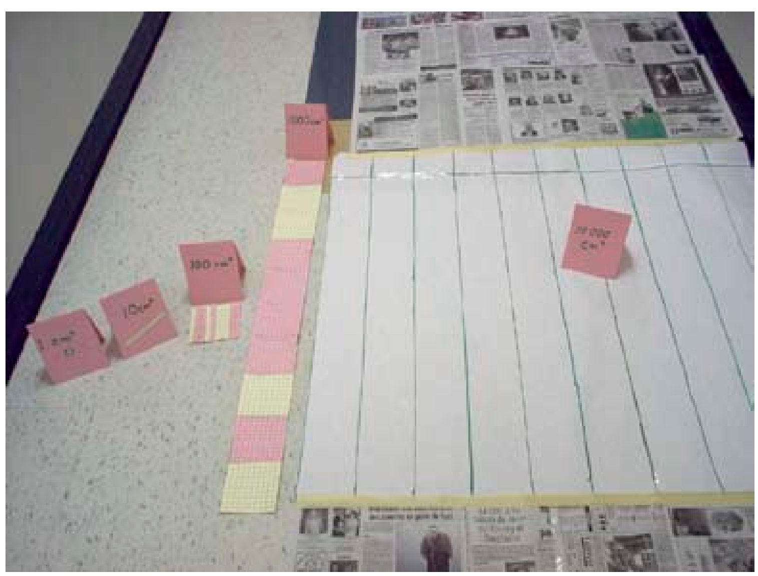


Photo E : 1 carré unitaire, 10 carrés unitaires, 100 carrés unitaires, 1 000 carrés unitaires, 10 000 carrés unitaires

Dans la deuxième partie de l'activité, l'enseignant ou l'enseignante amène les élèves à établir des liens entre la suite de représentations de grands nombres et le concept d'aire. Il ou elle leur indique que le carré unitaire mesure 1 cm sur 1 cm et leur demande d'en déterminer l'aire (1 cm^2). L'enseignant ou l'enseignante leur demande ensuite de déterminer l'aire de la bande formée de 10 carrés unitaires (10 cm^2), puis de chacune des autres représentations produites dans la première partie de l'activité. Il importe aussi de faire des liens entre les unités de mesure carrées. Par exemple, l'aire du carré formé de 10 000 carrés unitaires est 10 000 cm^2 (100 cm sur 100 cm) ou 1 m^2 (1 m sur 1 m). Par la suite, les élèves peuvent utiliser les bandes et les carrés fabriqués pour estimer et mesurer l'aire de diverses surfaces planes.

Exemple 2 : J'aime ma ville

Cette activité intègre des concepts en numération et sens du nombre ainsi qu'en traitement des données et probabilité. Elle permet aux élèves de développer un sens des grands nombres et des stratégies pour analyser les données dans un tableau.

L'enseignant ou l'enseignante demande aux élèves quelle est la population du village ou de la ville où est située l'école. Il ou elle leur présente ensuite le tableau suivant, tiré de www.statcan.com, qui présente la population de certains villages ou villes de l'Ontario selon le Recensement de 2006. En utilisant la population de leur ville ou village comme quantité repère, les élèves peuvent développer un sens de la quantité représentée par la population de certaines autres villes ontariennes.

La population de villes ontariennes selon le Recensement de 2006

Villes ou villages	Population en 2006 (habitants)	Villes ou villages	Population en 2006 (habitants)
Toronto	2 503 281	Oakville	165 613
Ottawa	812 129	Orillia	30 259
Hamilton	504 559	Greenstone	4 906
London	352 395	St. Thomas	36 110
Kitchener	204 668	Sault Ste. Marie	74 948
St. Catharines	131 989	Kapuskasing	8 509
Windsor	216 473	Kenora	15 177
Oshawa	141 590	Timmins	42 997
Pickering	87 838	Barrie	128 430
Kingston	117 207	Renfrew	7 846
Thunder Bay	109 140	Cornwall	45 965
North Bay	53 966	Innisfil	31 175
Clarence-Rockland	20 790	Woodstock	35 480
Hearst	5 620	Rainy River	909

Pour aider les élèves à développer l'habileté à analyser les données dans un tableau, l'enseignant ou l'enseignante peut, selon l'année d'études des élèves, effectuer certaines des activités suivantes :

1. Demander aux élèves de comparer les populations de divers villages ou villes. Pour ce faire, les élèves auront surtout recours à l'arrondissement et à l'addition ou à la soustraction. Par exemple :
   - Josée, de St. Catharines (131 989 habitants), remarque que la ville de sa cousine Shelly, d'Oshawa (141 590 habitants), a presque 10 000 habitants de plus que la sienne.

     Stratégie : 141 000 – 131 000 = 10 000

- Lee, de Woodstock (35 480 habitants), note qu'il doit ajouter à la population de sa ville les populations de Innisfil (31 175 habitants), Orillia (30 259 habitants) et Greenstone (4 906 habitants) pour atteindre un peu plus de 100 000 habitants.

  Stratégie : 35 000 + 31 000 + 30 000 + 5 000 > 100 000

2. Demander aux élèves de comparer la grandeur relative des populations de certaines villes. Pour ce faire, les élèves auront recours à l'arrondissement et au concept de proportionnalité. Par exemple :
   - Mathieu visite souvent son cousin à North Bay (53 966 habitants). Il constate que cette ville est presque 3 fois plus peuplée que sa ville de Clarence-Rockland (20 790 habitants).

     Stratégie : 20 000 × 3 = 60 000
   - Afin d'apprécier la grandeur de la capitale nationale, Ahmed de Pickering (87 838 habitants) constate qu'Ottawa (812 129 habitants) compte environ 9 fois plus d'habitants que Pickering.

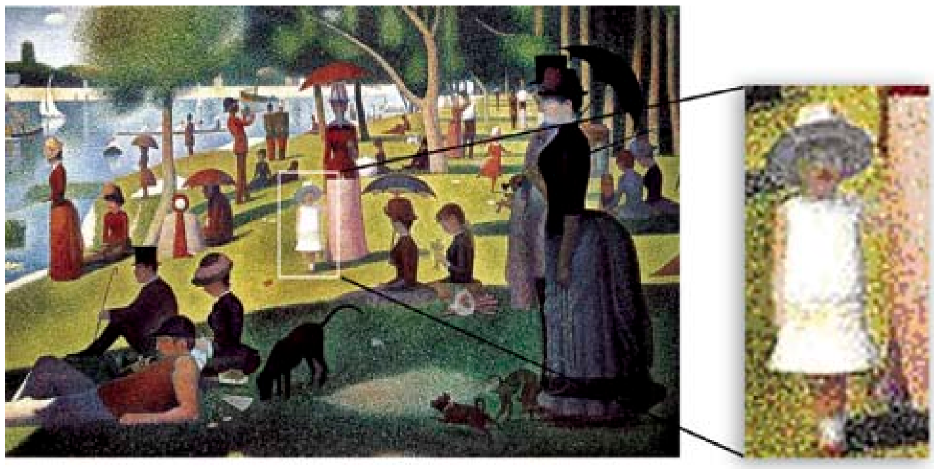
     Stratégie : 90 000 × 9 = 810 000
   - Hayfa note qu'Ottawa (812 129 habitants), la capitale nationale, est environ 3 fois moins peuplée que Toronto (2 503 281 habitants), la capitale provinciale.

     Stratégie : 800 000 × 3 = 2 400 000
3. Poser des questions aux élèves qui les inciteront à formuler des inférences ou des arguments fondés sur l'analyse des données dans le tableau. Par exemple :
   - Y a-t-il encore 352 395 habitants à London aujourd'hui? *(Il y a lieu de croire que ce nombre n'est pas exact aujourd'hui puisque la population d'une ville varie continuellement en fonction des naissances, des décès et des déménagements*.)
   - Est-ce que l'écart entre les populations de St. Thomas (36 110 habitants) et de Timmins (42 997 habitants) sera encore de 7 000 au prochain recensement? (*Puisque le nombre d'habitants dans chacune des deux villes est semblable, on peut prévoir qu'à moins de circonstances exceptionnelles comme l'ouverture ou la fermeture d'une usine importante, la croissance de population sera comparable et que l'écart demeurera stable.*)

Liens avec des concepts dans les autres matières

Exemple 1 : Des petits points

Cette activité intègre des concepts en numération et sens du nombre ainsi qu'en éducation artistique.



Seurat – Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte –1885 – (Chicago)

Note : Georges Seurat (1859-1891) est un artiste français néo-impressionniste reconnu pour sa technique du pointillisme. Cette technique consiste à peindre en juxtaposant de petites taches de peinture dont les couleurs s'influencent réciproquement, modifiant ainsi l'intensité de leur ton et s'harmonisant pour bien reproduire la réalité. L'œuvre la plus connue de Seurat réalisée à l'aide de cette technique, *Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte*, a exigé deux ans de travail.

L'enseignant ou l'enseignante présente aux élèves l'œuvre *Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte* et leur explique brièvement la technique du pointillisme utilisée par Seurat. Il ou elle leur indique que le tableau mesure environ 2 m sur 3 m, puis les incite à réfléchir au nombre de petits coups de pinceau que le tableau complet peut représenter.

L'enseignant ou l'enseignante propose ensuite aux élèves de réaliser une œuvre d'art collective en s'inspirant de la technique du pointillisme. L'œuvre sera réalisée sur une feuille de format légal (21,6 cm sur 35,6 cm). L'enseignant ou l'enseignante montre aux élèves un ensemble de marqueurs de couleur et leur demande de deviner combien il leur faudra faire de points à l'aide de ces marqueurs pour réaliser l'œuvre. Spontanément les élèves peuvent proposer des nombres, mais puisqu'ils n'ont aucune quantité repère sur laquelle s'appuyer, l'écart entre les réponses risque d'être important. L'enseignant ou l'enseignante leur demande alors s'ils peuvent suggérer une stratégie qui leur permettrait de formuler une estimation vraisemblable. Par exemple, ils peuvent proposer de tracer un carré de dimensions 1cm sur 1cm et de compter le nombre de points nécessaires pour le remplir.

Note : En général, les élèves peuvent remplir un tel carré en 1 ou 2 minutes en traçant environ 130 points avec un marqueur à pointe fine. À partir de cette quantité repère et en déterminant que l'aire de l'œuvre mesure environ 700 cm^2, ils peuvent estimer qu'il faudra environ 100 000 points pour compléter l'œuvre.

L'enseignant ou l'enseignante discute ensuite avec la classe du sens de leurs estimations en posant des questions telles que : « Y aura-t-il exactement 100 000 points? Peut-il y en avoir en réalité 104 325, 60 000, 364 250 ou 93 254? » En complétant l'œuvre, les élèves auront l'occasion de voir ce que représentent environ 100 000 points.

L'enseignant ou l'enseignante propose ensuite aux élèves de réaliser l'œuvre collectivement en respectant certaines modalités. Par exemple, il ou elle peut découper en sections la feuille sur laquelle l'œuvre est réalisée et demander à chaque élève de remplir une des sections tout en tenant compte du nombre de points tracés. Ce travail peut être réparti sur plusieurs jours à raison de 5 à 10 minutes par jour. Quand tous les élèves ont terminé, il suffit d'assembler les sections et de calculer le total des points comptabilisé par chaque élève. Il est alors pertinent de comparer avec les élèves ce total aux estimations données au début de l'activité.

L'enseignant ou l'enseignante peut aussi demander aux élèves d'estimer combien de jours il aurait fallu à un ou une élève s'il ou elle avait réalisé toute l'œuvre sans aide à raison de 5 minutes par jour. Par exemple, en estimant qu'il leur est possible de remplir de points 3 cm^2 de l'œuvre en 5 minutes, les élèves peuvent déterminer qu'il faudra environ 230 jours pour remplir les 700 cm^2, ce qui représente une période de temps plus longue que toute l'année scolaire. On peut reprendre cet exercice d'estimation en modifiant le nombre de minutes accordées à la réalisation de l'œuvre chaque jour ou le nombre d'élèves qui y travaillent de façon collective.

L'occasion est bonne de faire des liens entre le pointillisme et la technologie, en donnant l'exemple des imprimantes et des caméras numériques. La résolution d'impression se détermine en points par pouce (PPP) – en anglais il s'agit de « dots per inch » (DPI). Plus le nombre de points par pouce est élevé, meilleure est la qualité de l'impression. Parallèlement, la résolution d'une image numérique est définie par le nombre de pixels qui la composent. Une photo prise avec une résolution de 5 mégapixels (5 millions de pixels) sera donc mieux définie que celle prise avec une résolution de 1 mégapixel.

Exemple 2 : Comme le dit l'expression figurée

Cette activité intègre des concepts en numération et sens du nombre et ainsi qu'en français.

Au cours d'une activité de lecture d'un livre (p. ex., *L'autobus colère* de Marie-Danielle Croteau) ou de visionnage d'une vidéo (p. ex., émission avec le personnage *Bofwigou* de la série Méga TFO), l'enseignant ou l'enseignante demande aux élèves de repérer les expressions figurées qui comportent des nombres (p. ex., *être tiré à quatre épingles, dormir sur ses deux oreilles, la semaine des quatre jeudis, être au 7e ciel* ou *faire les quatre cents coups*). Il ou elle anime un échange sur la signification de ces expressions, en attirant l'attention sur les nombres utilisés et sur leur sens. Par exemple, il ou elle peut leur demander : « Est-ce que le nombre utilisé dans cette expression représente une quantité exacte? »

Par la suite, l'enseignant ou l'enseignante demande aux élèves s'ils connaissent d'autres expressions figurées qui contiennent des nombres. Il ou elle leur propose d'écrire un texte en y incorporant ces expressions. Celles-ci peuvent servir de déclencheur à l'écriture du texte ou elles peuvent être l'objet d'une illustration à la manière de l'illustrateur Philippe Germain dans l'album *L'école, c'est fou*, de Luc Durocher.

Liens avec des professions

Dans le cadre de la mise en œuvre de la politique *Des choix qui mènent à l'action : Politique régissant le programme d'orientation et de formation au cheminement de carrière dans les écoles élémentaires et secondaires de l'Ontario*, l'enseignant ou l'enseignante doit aider les élèves « … à identifier dans le milieu communautaire les emplois et les professions connexes aux matières étudiées à l'école » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 1999, p. 8). Pour ce faire, il ou elle peut profiter de toutes les occasions pour mettre en évidence les professions qui nécessitent un bon sens des nombres naturels et un bon sens des opérations. Le tableau ci-après présente des exemples de telles professions.

Exemple de profession	Courte description du travail
Agriculteur ou agricultrice	Il ou elle détermine la superficie des champs à cultiver et la quantité de semences à acheter, dirige son exploitation comme un chef d'entreprise et utilise des outils informatiques pour suivre sa production et pour la vendre.
Entraîneur ou entraîneuse	Il ou elle analyse les résultats obtenus à la suite de l'observation des athlètes (p. ex., nombre de victoires, nombre de défaites, nombre et force des lancers, nombre de buts, nombre de mètres parcourus) et prépare un programme d'entraînement adapté à leurs besoins.
Billettiste	Il ou elle jongle avec les horaires des compagnies aériennes et les fuseaux horaires pour faire en sorte que les clients arrivent à destination à temps.
Démographe	Il ou elle réalise des enquêtes, collecte des données et les analyse pour mieux connaître les impacts économiques et sociaux des phénomènes démographiques.
Magasinier ou magasinière	Il ou elle comptabilise quotidiennement les entrées et les sorties des stocks et planifie les commandes auprès des distributeurs.
Diététiste	Il ou elle compose des menus en fonction du nombre de calories de façon à les adapter à l'état de santé, au poids, au sexe et à l'âge des clients.
Carrossier-réparateur ou carrossière-réparatrice	Il ou elle donne des estimations aux clients quant au coût des réparations à effectuer en tenant compte du coût des matériaux et des équipements utilisés, du coût de la main-d'œuvre et du temps requis pour la réparation.

CHEMINEMENT DE L'ÉLÈVE

Les élèves poursuivent leur apprentissage en numération et sens du nombre en s'appuyant sur les connaissances acquises au cours des années précédentes et sur l'acquisition d'un nouveau vocabulaire et de nouvelles habiletés.

Le tableau 1 ci-après présente une synthèse du vocabulaire relatif aux nombres naturels à l'étude au cycle primaire et une progression du vocabulaire à acquérir au cours de la 4e à la 6e année. L'acquisition du vocabulaire à une année d'études en particulier sous-entend son utilisation au cours des années suivantes.

Le tableau 2 ci-après présente une synthèse des habiletés relatives aux nombres naturels à l'étude au cycle primaire et une progression des habiletés à développer au cours de la 4e à la 6e année. Il est important de reconnaître qu'il s'agit d'énoncés qui représentent l'habileté. Le programme-cadre présente des précisions reliées à ces habiletés.

Tableau de progression 1 - Vocabulaire

		Synthèse du cycle primaire		4e année	5e année	6e année
Vocabulaire	**Sens du nombre**	• Unité • Dizaine • Centaine • Regroupement • Nombre • Chiffre • Symbole • Nombre en lettres • Nombre en chiffres • Nom des nombres de 1 à 99 • Nombre pair • Nombre impair • Dénombrement • Compter par intervalles de • Compter à rebours • Estimation	• Arrondissement • Comparaison • Plus que • Moins que • Plus grand que • Plus petit que • Supérieur à • Inférieur à • Égal à • Égalité • Équivalence • Le double de • Deux fois plus petit que • Le triple de • Trois fois plus petit que • Le quadruple de • Ordre croissant • Ordre décroissant	• Millier	• Dizaine de milliers • Centaine de milliers • Nombre premier • Nombre composé	• Million
Vocabulaire	**Sens des opérations**	• Opération • Addition (ajout, réunion) • Terme • Somme • Total • En tout • Soustraction (retrait, comparaison) • Différence • Fait numérique • Double • Voisins des doubles • Multiplication (ensemble de groupes égaux, comparaison)	• Addition répétée • Produit • Multiple • Facteur • Division (partage, groupement) • Soustraction répétée • Diviseur • Dividende • Quotient • Reste • Opération inverse • Commutativité • Calcul mental • Estimation	• Distributivité • Associativité		• Priorité des opérations arithmétiques • Parenthèses

Tableau de progression 2 - Habiletés

		Synthèse du cycle primaire	4e année	5e année	6e année
Habiletés	**Sens du nombre**	**Démontrer** les liens entre un nombre naturel et une quantité au moins jusqu'à 1 000, et vice versa. **Comparer**, **ordonner**, **décomposer** et **représenter** les nombres naturels jusqu'à 1 000. **Arrondir** des nombres naturels à une valeur de position pour faire des estimations et du calcul mental. **Estimer** une quantité jusqu'à 1 000. **Lire** et **écrire** les nombres naturels en lettres, jusqu'à 100 et en chiffres, jusqu'à 1 000. **Compter** par intervalles de 2, de 3, de 5, de 6, de 9, de 10, de 25 et de 100. **Compter à rebours** par intervalles de 2, de 5, de 10 et de 25. **Utiliser** les nombres ordinaux.	**Démontrer** les liens entre un nombre naturel et une quantité jusqu'à 1 000, et vice versa. **Comparer**, **ordonner**, **décomposer** et représenter les nombres naturels jusqu'à 10 000. **Arrondir** des nombres naturels à une valeur de position pour faire des estimations et du calcul mental. **Lire** et **écrire** en lettres les nombres naturels jusqu'à 1 000 et en chiffres les nombres jusqu'à 10 000. **Compter** par intervalles de 4, de 7, de 8, de 10, de 25 et de 100. **Compter à rebours** selon divers intervalles. **Trouver** les facteurs d'un nombre naturel.	**Distinguer** les relations qui existent entre des nombres naturels, des fractions et des nombres décimaux. **Comparer**, **ordonner**, **décomposer** et représenter les nombres naturels jusqu'à 100 000. **Estimer** des nombres naturels à une valeur de position à l'aide d'une procédure d'arrondissement. **Lire** et **écrire** en lettres et en chiffres les nombres naturels jusqu'à 100 000. **Identifier** les nombres premiers et les nombres composés inférieurs à 50. **Trouver** les facteurs d'un nombre naturel inférieur à 144.	**Analyser** et **expliquer** les relations qui existent entre des nombres naturels, des fractions et des nombres décimaux. **Comparer**, **ordonner**, **décomposer** et **représenter** les nombres naturels au moins jusqu'à 1 000 000. **Utiliser** diverses stratégies d'estimation lors d'opérations de calcul mental à l'aide de procédures d'arrondissement. **Lire** et **écrire** en lettres et en chiffres des nombres naturels jusqu'à 1 000 000.

		Synthèse du cycle primaire	4e année	5e année	6e année
Habiletés	**Sens des opérations**	**Utiliser** et **expliquer** diverses stratégies pour additionner ou soustraire mentalement des nombres naturels. **Estimer** et **vérifier** une somme, une différence, un produit ou un quotient. **Décrire** et **utiliser** diverses stratégies pour calculer des nombres naturels inférieurs à 1 001. **Démontrer** et **expliquer** la relation entre la multiplication et l'addition répétée, la relation entre la division et la soustraction répétée ainsi que la commutativité de l'addition et de la multiplication. **Démontrer** que l'addition et la soustraction ainsi que la multiplication et la division sont des opérations inverses. **Utiliser** les faits numériques d'addition et de soustraction jusqu'à 18 et les faits numériques de multiplication et de division jusqu'à 25.	**Utiliser** et **expliquer** diverses stratégies pour additionner ou soustraire mentalement des nombres naturels. **Estimer** et **vérifier** le quotient et le produit d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à un chiffre. **Décrire** et **utiliser** diverses stratégies pour calculer des nombres inférieurs à 10 001. **Démontrer** et **utiliser** la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ainsi que la propriété d'associativité de l'addition et de la multiplication. **Multiplier** et **diviser** mentalement un nombre naturel par 10, par 100 et par 1 000. **Utiliser** les faits numériques de multiplication et division jusqu'à 81. **Expliquer** les stratégies utilisées ainsi que les démarches effectuées pour résoudre divers problèmes.	**Utiliser** et **expliquer** diverses stratégies pour effectuer mentalement des opérations arithmétiques. **Estimer** et **vérifier** le quotient et le produit d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à deux chiffres. **Décrire** et **utiliser** diverses stratégies pour effectuer des additions et des soustractions de nombres inférieurs à 100 001. **Expliquer** les stratégies utilisées ainsi que les démarches effectuées pour résoudre divers problèmes de multiplication et de division de nombres naturels.	**Utiliser** l'estimation et le calcul mental comme stratégie de résolution de problèmes. **Estimer** et **vérifier** en situation réelle le produit d'un nombre naturel à quatre chiffres par un nombre naturel à trois chiffres et le quotient d'un nombre naturel à quatre chiffres par un nombre naturel à deux chiffres. **Décrire** et **utiliser** diverses stratégies pour calculer des nombres naturels inférieurs à 1 000 001. **Effectuer** des opérations en respectant la priorité des opérations arithmétiques pour résoudre des problèmes. **Démontrer** le lien entre la multiplication et la division en tant qu'opérations inverses. **Utiliser** la propriété de distributivité comme technique de calcul. **Formuler** des problèmes avec des nombres naturels comprenant au moins deux opérations arithmétiques. **Expliquer** les stratégies utilisées ainsi que la démarche effectuée pour résoudre divers problèmes comportant des nombres naturels.

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Aperçu

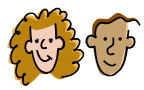
Cette section présente, pour chacune des années d'études du cycle moyen, une situation d'apprentissage en lien avec les nombres naturels et les grandes idées en numération et sens du nombre. Ce sont des situations de résolution de problèmes engageantes qui suscitent le questionnement et la réflexion. En outre, elles contribuent au développement de l'habileté à communiquer et à formuler un bon argument mathématique. Chacune des situations d'apprentissage est riche en contenu mathématique. Afin d'être en mesure d'anticiper les difficultés que pourraient éprouver les élèves et de planifier ses interventions, il est préférable de résoudre le problème avant de le présenter aux élèves.

Toutes les situations d'apprentissage présentées sont structurées en trois temps : avant l'apprentissage (mise en train), pendant l'apprentissage (exploration) et après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique). Elles sont suivies de suggestions d'adaptations pour faciliter ou enrichir la tâche, d'une activité de suivi à la maison et de quelques activités supplémentaires que l'enseignant ou l'enseignante pourrait utiliser comme prolongement.

Dans un contexte d'enseignement par la résolution de problèmes, l'enseignant ou l'enseignante a recours à l'étayage et à des stratégies de questionnement efficaces afin d'inciter les élèves à réfléchir et à développer leurs propres stratégies de résolution de problèmes. Pour plus de détails au sujet du rôle de l'enseignant ou de l'enseignante dans un contexte de résolution de problèmes, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 27).

Dans la présentation des situations d’apprentissage, les icônes suivantes sont utilisées afin de faciliter le repérage de certains renseignements.

Légende

Icônes d’ordre organisationnel		**Icônes d’ordre pédagogique**	
	Travail individuel		Observations possibles
	Travail en équipe		Mise au point à l’intention de l’enseignant ou de l’enseignante
	Travail en groupe classe		Pistes de questionnement
	Durée approximative		

Situation d'apprentissage, 4^e année

Gomme santé!

GRANDE IDÉE : SENS DES OPÉRATIONS

SOMMAIRE

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves explorent le concept de division en résolvant un problème dans le contexte de la fabrication et de l'emballage d'un produit.

Matériel

- transparent de l'annexe 4.1
- annexe 4.1 (1 copie par équipe)
- rétroprojecteur
- grandes feuilles de papier (1 feuille par équipe)
- matériel de manipulation (p. ex., cubes emboîtables, jetons, matériel de base dix, réglettes Cuisenaire)

INTENTION PÉDAGOGIQUE

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à reconnaître à quel sens de la division une situation donnée fait appel : au sens « groupement » (division dans laquelle le nombre de groupes est inconnu) ou au sens « partage » (division dans laquelle la taille des groupes est inconnue);
- à développer des stratégies ou des algorithmes personnels de division.

ATTENTE ET CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Attente

L'élève doit pouvoir résoudre des problèmes reliés aux quatre opérations étudiées en utilisant diverses stratégies ou des algorithmes personnels.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

- estimer et vérifier le quotient d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à un chiffre;
- expliquer les stratégies utilisées ainsi que les démarches effectuées pour résoudre divers problèmes de multiplication et de division avec des nombres naturels, et d'addition et de soustraction avec des nombres décimaux.

Durée approximative de la situation d'apprentissage : **90 minutes**

CONTEXTE

Au cycle primaire, les élèves sont initiés à la division, dans un contexte de résolution de problèmes et à l'aide de matériel concret, en effectuant une soustraction répétée de groupes d'objets en ensembles égaux. Ils développent une compréhension des faits numériques de base relatifs à la division jusqu'à 25. En 4e année, ils utilisent des stratégies personnelles et leurs connaissances antérieures pour résoudre des problèmes de division d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à un chiffre.

PRÉALABLES

La présente situation d'apprentissage expose les élèves à deux situations-problèmes différentes qui font appel à la division. En comparant chacune des deux situations et en utilisant divers algorithmes pour les résoudre, ils développent leur compréhension du concept de division.

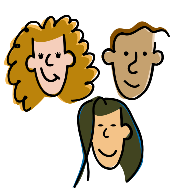
Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent :

- pouvoir utiliser et expliquer diverses stratégies d'addition, de soustraction et de multiplication (p. ex., compensation, décomposition);
- comprendre qu'un nombre peut être décomposé de différentes façons;
- connaître les faits numériques de base relatifs à la multiplication et à la division.

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Quotient, diviseur, dividende, table de valeurs.

AVANT L'APPRENTISSAGE (MISE EN TRAIN)



environ
15 minutes

Demander aux élèves s'ils ont déjà visité une usine de fabrication et d'emballage d'un produit quelconque (p. ex., usine de fabrication de chocolat, usine d'embouteillage d'eau) ou s'ils ont déjà vu un reportage à la télévision à ce sujet. Discuter avec eux des différents formats d'emballage retenus par les fabricants (p. ex., tablette de chocolat présentée sous forme de 4 bâtonnets ou de 8 petits carrés, bouteilles d'eau emballées dans une caisse de 12 ou de 24).

Présenter la mise en situation suivante dans un contexte intéressant. Par exemple, dire aux élèves :

> *L'autre jour, j'ai vu un reportage à la télévision au sujet du virage santé que compte prendre un fabricant de gommes à mâcher. Le fabricant effectue des essais afin de développer des gommes à mâcher qui auraient une saveur originale et qui seraient enrichies de vitamines et de minéraux. Pour que ce nouveau produit se démarque des autres gommes à mâcher présentement sur le marché, il prévoit le vendre dans un emballage contenant 8 gommes de saveur différente.*

En groupe classe, demander aux élèves de suggérer des saveurs originales qu'ils aimeraient goûter dans les gommes (p. ex., bleuet, carotte, yogourt aux bananes, muffin au son, thé vert, miel et citron, petits fruits, mangue). Parmi toutes les suggestions reçues, convenir avec eux d'une sélection de 8 saveurs.

Note : La sélection par les élèves des 8 saveurs rend la situation d'apprentissage plus engageante et facilite la résolution de la seconde partie du problème.

Demander aux élèves d'imaginer que le fabricant accepte de fabriquer ses paquets de gommes à mâcher en utilisant les 8 saveurs choisies par la classe, à savoir que chaque paquet du nouveau produit comprendra 8 gommes de saveur différente. À l'aide du transparent de l'annexe 4.1 (*Usine de gommes à mâcher*) ou d'une grande feuille, présenter le problème suivant aux élèves.

Dans le reportage, on nous montrait deux machines : une première qui peut produire et emballer 208 gommes à mâcher à la fois et une seconde qui peut couper cet emballage en paquets de 8 gommes. Les gommes sont disposées de façon à avoir 8 saveurs différentes dans chaque paquet. Pour chaque production de 208 gommes :

1. Combien de paquets de gommes le fabricant obtiendra-t-il?
2. Combien de gommes de chacune des saveurs doit-il fabriquer?

S'assurer que les élèves comprennent bien les deux parties du problème, en leur demandant de les expliquer en leurs propres mots. Pour rendre le problème plus concret, montrer un paquet de 8 gommes à mâcher ou en dessiner un modèle au tableau.

équipes de 2

environ
55 minutes

PENDANT L'APPRENTISSAGE (EXPLORATION)

Grouper les élèves par deux et leur distribuer une copie de l'annexe 4.1 (Usine de gommes à mâcher). Mettre à leur disposition du matériel de manipulation, des feuilles et du papier quadrillé. Observer les élèves et les appuyer dans leur travail sans toutefois leur dire comment relever le défi. Il faut les amener, par des interventions stratégiques, à réfléchir :

- aux stratégies à utiliser pour résoudre chacune des deux parties du problème;
- à ce qui est inconnu dans chacune des deux parties.

Accorder suffisamment de temps pour permettre aux élèves d'explorer diverses stratégies de résolution de problèmes et d'en discuter. Circuler et poser des questions telles que :

– « Comment pouvez-vous représenter cette situation autrement? »

– « Comment pouvez-vous vous assurer que cette solution est vraie? »

– « Pourquoi votre stratégie fonctionne-t-elle? »

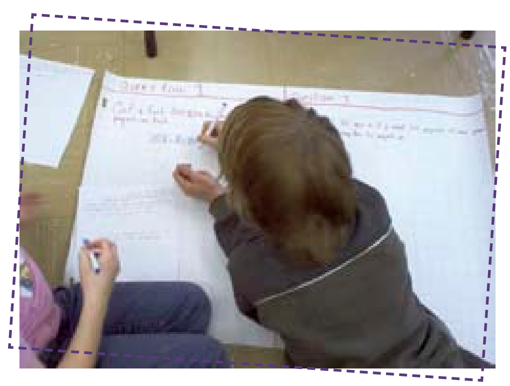
Note : Si les élèves connaissent l'algorithme usuel de la division, leur suggérer de résoudre le problème en utilisant une stratégie différente et d'effectuer ensuite l'algorithme usuel pour vérifier le résultat.

Voici quelques stratégies que les élèves peuvent suggérer pour résoudre chacune des parties du problème.

Partie 1 : Combien de paquets de gommes le fabricant obtiendra-t-il?

Les élèves peuvent :

- effectuer des soustractions répétées;



Exemple

208 – 8 = 200

200 – 8 = 192

192 – 8 = 184

…

8 – 8 = 0

Ils comptent ensuite combien de fois ils ont soustrait 8.

- construire une table de valeurs;

Exemple

Nombre de paquets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	26
Nombre de gommes	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	160	208

Note : Dans l'exemple ci-dessus, les élèves ont utilisé la stratégie du double en passant de 10 paquets de gommes à 20 paquets.

- utiliser du matériel de manipulation, des illustrations ou du papier quadrillé pour représenter des groupements de 8.

Exemple

Partie 2 : Combien de gommes de chacune des saveurs doit-il fabriquer?

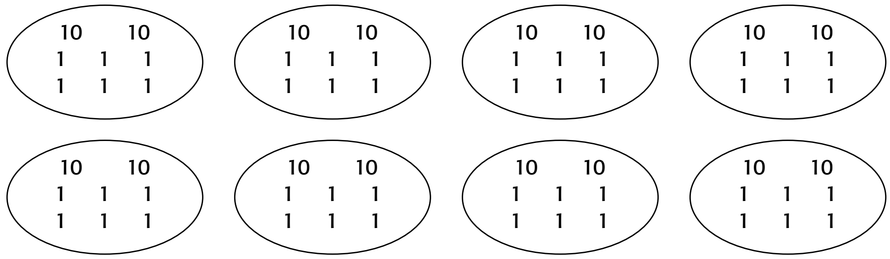
Les élèves peuvent distribuer des gommes, individuellement ou par groupes, selon les 8 saveurs :

- avec du matériel de manipulation, par exemple, des cubes emboîtables de différentes couleurs;

Exemple

- de façon symbolique.

Exemple



Les élèves peuvent aussi utiliser le même mode de représentation pour les deux parties. Dans l'exemple ci-après, ils ont d'abord utilisé du papier quadrillé pour représenter le matériel de base dix (planchettes et cubes d'unité). Ils ont représenté le nombre 208 en dessinant 2 planchettes et 8 cubes d'unité. Ils ont ensuite formé des groupes de 8 petits carrés chacun et ont compté 26 groupes (partie 1). Puis, ils ont numéroté les carrés de 1 à 8 dans chacun des groupes pour représenter les 8 saveurs (partie 2). Ils ont ensuite compté qu'il y avait 26 fois la saveur 1, 26 fois la saveur 2, etc.

Exemple

Observations possibles	Interventions possibles
Des équipes ont de la difficulté à énoncer une phrase mathématique correcte pour justifier le calcul lorsqu'ils combinent des groupes de 8 (p. ex., 16 + 16 + 16 = 6 groupes).	Séparer les groupes avec eux à l'aide de cubes emboîtables et les inciter à revoir la phrase mathématique.
Certaines équipes utilisent des languettes pour représenter des groupes, mais oublient qu'une languette représente 10 unités alors que le problème présuppose des groupements de 8.	Les inviter à comparer le nombre de cubes d'unité dans une languette avec le nombre de gommes dans un paquet.
Une équipe a de la difficulté à faire la différence entre le nombre de gommes par paquet et le nombre de gommes de chaque saveur.	Suggérer aux élèves d'utiliser des cubes d'unité de même couleur pour représenter les gommes dans un paquet (partie 1) et des cubes emboîtables de 8 couleurs différentes pour représenter les 8 saveurs (partie 2).
Certaines équipes soulignent que la réponse (26) est la même pour les deux parties du problème sans faire de distinction entre 26 paquets de 8 gommes et 26 gommes de chacune des 8 saveurs.	Les inviter à explorer le problème avec le matériel de manipulation. Poser des questions telles que : – « Qu'est-ce que vous cherchez dans la première partie du problème? » (*Le nombre de paquets*.) – « Qu'est-ce que vous cherchez dans la seconde partie du problème? » (*Le nombre de gommes de chaque saveur*.)

Une fois les deux parties du problème résolues, demander aux élèves de préparer une présentation pour l'échange mathématique. Leur préciser :

- de noter leurs essais et leurs stratégies sur une grande feuille;
- de garder le matériel de manipulation utilisé pour appuyer leur présentation;
- d'utiliser des arguments mathématiques clairs et convaincants.

Circuler et choisir les équipes qui présenteront lors de l'échange mathématique. Cibler des équipes qui ont utilisé des stratégies de calcul différentes.

Note : Le choix des équipes qui doivent présenter leur solution est très important puisque c'est par l'entremise des différentes présentations que les élèves peuvent comparer leurs stratégies, compléter leur objectivation et, du même coup, vérifier leur compréhension du concept de division.

environ
20 minutes

APRÈS L'APPRENTISSAGE (OBJECTIVATION/ÉCHANGE MATHÉMATIQUE)

Discuter d'une partie du problème à la fois. Demander aux équipes sélectionnées de venir, à tour de rôle, présenter leur démarche. Après chaque présentation, les autres élèves contribuent à la communication et enrichissent l'échange mathématique en posant des questions et en faisant des observations pertinentes dans un climat de respect. Encourager les élèves à utiliser un vocabulaire précis et des termes de causalité. Les inciter à réfléchir en posant, au besoin, des questions telles que :

– « Qui peut expliquer dans ses mots la stratégie qu'on vient de présenter? »

– « Est-ce une stratégie efficace? »

– « Est-ce que d'autres élèves ont utilisé cette stratégie ou une stratégie similaire? »

– « Quelles sont les similitudes entre les stratégies utilisées par ces deux équipes (p. ex., une équipe qui fait des groupements de 8 et une équipe qui utilise une table de valeurs)? »

Lorsque les équipes sélectionnées ont terminé leur présentation, faire ressortir les ressemblances et les différences entre les deux parties du problème en posant des questions telles que :

– « Qu'y a-t-il d'inconnu dans la première partie? dans la seconde? »

– « En quoi les deux parties du problème sont-elles similaires? différentes? »

S'assurer de faire ressortir que :

- la division implique de séparer la totalité d'une quantité donnée en groupes égaux;
- l'on peut utiliser diverses stratégies pour effectuer une division;
- l'on retrouve deux sens à la division, le sens « partage » et le sens « groupement ». (Il n'est pas nécessaire que les élèves connaissent ces termes; il leur suffit de comprendre que le quotient peut représenter deux types de quantité.)

Il est aussi important de souligner qu'il est possible de représenter chacune des deux parties du problème à l'aide de l'équation 208 ÷ 8 = 26. Ce qui est différent, c'est le sens qu'on accorde aux nombres dans chaque équation :

- Dans la partie 1, il y a lieu d'écrire :
  208 gommes ÷ 8 gommes par paquet = 26 paquets.
- Dans la partie 2, il y a lieu d'écrire :
  208 gommes ÷ 8 saveurs = 26 gommes de chaque saveur.

Note : Mentionner les termes propres à la division tels que le quotient, le diviseur et le dividende.

ADAPTATIONS

L'activité peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• diminuer le nombre de gommes produites (p. ex., 104 au lieu de 208).	• demander aux élèves de représenter, pour chacune des deux parties du problème à l'aide d'une disposition rectangulaire sur papier ou à l'aide de cubes emboîtables, comment les 208 gommes à mâcher peuvent être placées lorsqu'elles sortent de la première machine.

SUIVI À LA MAISON

Demander aux élèves de résoudre, à la maison, de deux façons différentes le problème suivant ou un problème similaire sans utiliser la calculatrice ou l'algorithme usuel et d'expliquer leurs démarches à un membre de la famille.

> *Pour une fête, je dois préparer des sacs de guimauves. Dans chaque sac, je compte mettre 6 guimauves. Si j'ai 108 guimauves en tout, combien de sacs pourrais-je préparer?*

Note : Cette activité permet aux parents de voir qu'il est possible d'effectuer une division sans utiliser l'algorithme usuel.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 1

Construction de structures

Présenter un problème en deux parties, semblable à celui de la situation d'apprentissage, afin que les élèves puissent utiliser les diverses stratégies présentées lors de l'échange mathématique.

Exemple

Une enseignante demande à ses élèves de construire une structure en se servant de cubes emboîtables.

1. L'enseignante demande à Éric de distribuer 196 cubes emboîtables à 7 équipes. Combien de cubes emboîtables Éric doit-il remettre à chaque équipe si chacune doit recevoir le même nombre de cubes?
2. L'enseignante demande ensuite aux équipes d'échanger leurs structures et d'utiliser un autre ensemble de cubes emboîtables pour construire une structure identique à celle reçue. Pour ce faire, elle demande à Louise de distribuer 196 autres cubes aux équipes. Elle remet à Louise une boîte pleine de petits sacs contenant 7 cubes chacun. Combien de sacs Louise doit-elle prendre si elle veut s'assurer de distribuer 196 cubes en tout?

Lorsque les équipes ont terminé, mener un échange mathématique afin de faire ressortir les différentes stratégies utilisées. Comme dans la situation d'apprentissage précédente, demander aux élèves d'expliquer ce que les nombres représentent dans chacune des deux parties du problème.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 2

Qu'est-ce qui est inconnu?

Distribuer à chaque équipe une copie de l'annexe 4.2 (*Qu'est-ce qui est inconnu?*). Leur demander de lire les problèmes et, **sans les résoudre**, d'indiquer pour chacun si c'est la taille des groupes ou le nombre de groupes qui est inconnu. Leur demander de justifier leur réponse et de rédiger un nouveau problème pour chacune des deux sortes de situations.

Note : Le but de cette activité n'est pas de résoudre les problèmes, mais plutôt de reconnaître les deux sens de la division :

- La division dans laquelle le nombre de groupes est inconnu, soit le sens « groupement »;
- La division dans laquelle la taille des groupes est inconnue, soit le sens « partage ».

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 3

Que reste-t-il?

Distribuer à chaque équipe une copie de l'annexe 4.3 (*Que reste-t-il?*) et leur demander de résoudre les problèmes en tenant compte du reste en fonction du contexte.

Une fois les problèmes résolus, animer un échange mathématique au cours duquel les élèves pourront justifier leurs réponses. Cet échange devra permettre de faire ressortir différentes façons de tenir compte du reste dans une situation de partage.

Note : Dans chaque problème, il est question de partager 26 en 4 groupes, ce qui occasionne un reste de 2. Compte tenu du contexte du problème, voici comment tenir compte du reste dans chaque cas.

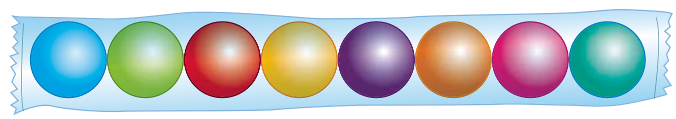
- Problème 1 : le reste est réparti parmi les équipes. (*Il y aura 6 élèves dans deux des équipes et 7 élèves dans les deux autres*.)
- Problème 2 : le reste fait augmenter le quotient de 1. (*Il faudra 7 conducteurs pour transporter les élèves*.)
- Problème 3 : le reste est ignoré. (*Chaque élève doit ramasser 6 pommes de terre*.)
- Problème 4 : le reste est exprimé en fraction. (*Chaque équipe recevra $6\,\frac{2}{4}$ réglisses ou $6\,\frac{1}{2}$ réglisses*.)
- Problème 5 : le reste est la réponse. (*Deux pots ne seront pas sur la table*.)
- Problème 6 : le reste est exprimé sous forme décimale. (*Il y a 6,5 m entre chaque borne*.)

ANNEXE 4.1

Usine de gommes à mâcher

Dans le reportage, on nous montrait deux machines : une première qui peut produire et emballer 208 gommes à mâcher à la fois et une seconde qui peut couper cet emballage en paquets de 8 gommes. Les gommes sont disposées de façon à avoir 8 saveurs différentes dans chaque paquet. Pour chaque production de 208 gommes :

1. Combien de paquets de gommes le fabricant obtiendra-t-il?
2. Combien de gommes de chacune des saveurs doit-il fabriquer?



ANNEXE 4.2

Qu'est-ce qui est inconnu?

1. Pour chacun des problèmes suivants, indique si c'est la taille des groupes qui est inconnue ou si c'est le nombre de groupes et justifie ta réponse. **Tu ne dois pas résoudre le problème**.
   a) Le magasin de l'école est géré par 7 élèves. Chaque semaine, ils se partagent les profits également. Cette semaine, ils ont réalisé un profit de 56 $. Quel montant chaque élève recevra-t-il?
   b) Nathan fait cuire des biscuits et veut les décorer de petits bonbons. Il a 84 bonbons. S'il veut mettre 6 bonbons sur chaque biscuit, combien de biscuits pourra-t-il décorer?
   c) Sylvie a une collection de 96 billes de différentes couleurs. Elle classe ses billes selon la couleur et se rend compte qu'elle a 8 billes de chacune des couleurs. Combien de couleurs différentes de billes Sylvie a-t-elle?
   d) Une enseignante veut donner un nombre égal de crayons à chacun de ses 22 élèves. Elle a une boîte de 110 crayons. Combien de crayons pourrait-elle remettre à chacun?
   e) À la cafétéria, on peut asseoir 6 élèves par table. Un midi, on prévoit que 138 élèves iront manger. Combien de tables faut-il installer pour que chaque élève ait une place?
2. Compose un problème dans lequel le nombre de groupes est inconnu.
3. Compose un problème dans lequel la taille des groupes est inconnue.

Inspiré de Cornelis de Groot et Timothy Whalen, avril 2006, « Longing for Division », *Teaching Children Mathematics*, p. 412.

ANNEXE 4.3

Que reste-t-il?

Chacun des problèmes suivants est relié à une sortie éducative à une foire agricole à laquelle participent 26 élèves. Résous chaque problème et exprime ta réponse à l'aide d'une phrase complète.

1) Pendant la journée, différentes activités sont organisées. Les 26 élèves sont répartis en 4 équipes qui feront le tour de chacune des activités. Combien d'élèves feront partie de chacune des équipes?

2) Les 26 élèves se rendent à la foire en voiture. Si chaque voiture peut transporter un maximum de 4 élèves, combien de conducteurs seront nécessaires?

3) Les élèves participent à une course de sacs de pommes de terre. Sur un parcours de 26 mètres, ils doivent ramasser une pomme de terre à tous les 4 mètres et la mettre dans leur sac. Pour compléter la course, combien de pommes de terre chaque élève doit-il ramasser?

4) Un parent a apporté un paquet de 26 réglisses qu'il veut partager également entre les 4 équipes. Combien de réglisses recevra chacune des équipes?

5) Une dame a apporté 26 pots de confiture pour les vendre à la foire. Elle veut les disposer sur la table de façon à former un rectangle composé de 4 rangées. Combien de pots ne seront pas sur la table?

6) Au cours de l'après-midi, les élèves assistent à une course de chiens. Afin de guider les chiens le long du parcours de 26 mètres, 4 bornes sont placées à égale distance les unes des autres. Quelle distance y a-t-il entre chaque borne?

Situation d'apprentissage, 5^{e} année

La salle de théâtre

GRANDE IDÉE : SENS DU NOMBRE

SOMMAIRE

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves utilisent diverses stratégies pour estimer le nombre de spectateurs qu'une salle de spectacle peut contenir. Ils déterminent ensuite de façon approximative le profit ou le déficit généré par un spectacle présenté à guichets fermés.

Matériel

- transparents des annexes 5.1 et 5.2
- rétroprojecteur
- annexes 5.1 et 5.2 (1 copie par équipe)
- annexe 5.2 en grand format (1 copie par équipe)
- grandes feuilles de papier (1 par équipe)
- crayons feutres
- bâtonnets de colle

INTENTION PÉDAGOGIQUE

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à développer le sens des grands nombres dans un contexte réel;
- à appliquer des stratégies d'estimation et de calcul;
- à vérifier la vraisemblance du résultat d'un calcul;
- à établir un lien entre l'arrondissement et l'estimation.

ATTENTES ET CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Attentes

L'élève doit pouvoir :

- distinguer les relations qui existent entre des nombres naturels, des fractions et des nombres décimaux dans divers contextes;
- résoudre des problèmes reliés aux quatre opérations étudiées en utilisant diverses stratégies ou des algorithmes personnels.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

– comparer, ordonner et représenter les nombres naturels jusqu'à 100 000;
– estimer des nombres naturels à une valeur de position (dizaine de milliers près) à l'aide d'une procédure d'arrondissement;
– estimer, compter et enregistrer des montants d'argent en pièces de monnaie et en billets jusqu'à 1 000 $;
– utiliser et expliquer diverses stratégies pour effectuer mentalement des opérations arithmétiques (p. ex., double, regroupement, compensation, décomposition).

Durée approximative de la situation d'apprentissage : **85 minutes**

CONTEXTE

Au cours des années d'études précédentes, les élèves ont appris à comparer, à ordonner et à représenter les nombres naturels jusqu'à 10 000. Ils ont estimé le résultat de diverses opérations arithmétiques, notamment des opérations comprenant des montants d'argent. En 5^e^ année, ils développent davantage ces habiletés dans le but d'acquérir une compréhension de la quantité représentée par de plus grands nombres naturels (jusqu'à 100 000).

PRÉALABLES

La présente situation d'apprentissage permet aux élèves d'approfondir leur habileté à estimer en appliquant diverses stratégies appropriées.

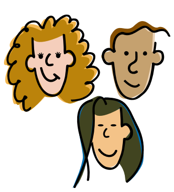
Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent :

- connaître certaines stratégies pour estimer une quantité donnée;
- être capables d'effectuer des calculs comprenant des montants d'argent;
- savoir multiplier mentalement des nombres par 10, par 100 et par 1 000.

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Estimation, arrondissement, plus que, moins que, environ, entre, approximation.

AVANT L'APPRENTISSAGE (MISE EN TRAIN)



environ
15 minutes

Demander aux élèves s'ils ont déjà assisté à un spectacle, à une pièce de théâtre, à un concert ou pris part à un grand rassemblement et, le cas échéant, s'ils se souviennent du nombre approximatif de spectateurs. Discuter avec eux afin de vérifier s'ils ont simplement deviné ce nombre ou s'ils ont utilisé une stratégie d'estimation.

Faire un retour sur les mots *estimation*, *arrondissement*, *plus que*, *moins que*, *environ*, *entre*, *approximation*.

Présenter la mise en situation suivante aux élèves :

> *Une troupe de théâtre aimerait louer une grande salle pour présenter sa nouvelle pièce. Le directeur de la troupe doit déterminer le coût des billets. Après discussion, les membres de la troupe lui suggèrent de fixer le prix à 19,75 $ le billet.*

Projeter le transparent de l'annexe 5.2 (*Plan de la salle*) juste assez longtemps pour que les élèves puissent avoir une idée de la grandeur de la salle, sans toutefois leur laisser le temps de compter, par exemple, le nombre de sièges par rangée. Leur demander d'inscrire sur un bout de papier, le nombre de sièges qu'ils pensent que la salle contient. Plus tard, lors de l'échange mathématique, ils pourront comparer ce nombre avec un nombre qu'ils auront obtenu en utilisant une stratégie d'estimation. Cette comparaison devrait leur permettre de constater à nouveau l'avantage de connaître et d'utiliser de telles stratégies, notamment lorsqu'il est question de grands nombres.

Note : Le nombre de sièges de la salle n'est pas précisé, car il est important, dans cette situation de ne pas prêter une attention particulière au nombre exact afin de miser davantage sur les stratégies et le concept d'estimation.

À l'aide du transparent de l'annexe 5.1 (*Salle de théâtre*) ou d'une grande feuille, présenter le problème suivant aux élèves.

> La troupe de théâtre souhaite louer la salle que je viens de vous montrer pour présenter sa pièce. Elle prévoit un budget de 22 230 $ pour l'ensemble des dépenses reliées à cette présentation (p. ex., location de la salle, éclairage, son, programme). Si le directeur de la troupe retient la suggestion de fixer le prix d'un billet à 19,75 $ et si tous les billets sont vendus, est-ce que la troupe fera un profit? Si oui, quel sera-t-il environ? Sinon, quel sera le déficit?

S'assurer que les élèves comprennent bien le problème en leur demandant d'expliquer dans leurs propres mots la situation, ainsi que les termes *profit* et *déficit*.

Note : Il est important de ne pas fournir trop de pistes aux élèves; il faut les laisser trouver des stratégies personnelles de résolution de problèmes et d'estimation.

PENDANT L'APPRENTISSAGE (EXPLORATION)

équipes de 2

environ **40 minutes**

Grouper les élèves par deux. Distribuer une copie de l'annexe 5.1 (*Salle de théâtre*) et de l'annexe 5.2 (*Plan de la salle*) à chaque équipe. Leur demander de résoudre le problème en laissant des traces de leur démarche; préciser qu'ils peuvent écrire sur le plan. Afin d'encourager les élèves à arrondir, ne pas permettre l'usage de la calculatrice pendant l'exploration.

Observer les élèves et les appuyer dans leur travail, sans toutefois leur dire comment relever le défi. Il faut les amener, par des interventions stratégiques, à réfléchir :

- aux stratégies à utiliser pour résoudre le problème;
- à la nature approximative de la quantité recherchée.

Allouer suffisamment de temps pour permettre aux élèves d'explorer diverses stratégies de résolution de problèmes et d'en discuter. Circuler et intervenir au besoin en posant des questions telles que :

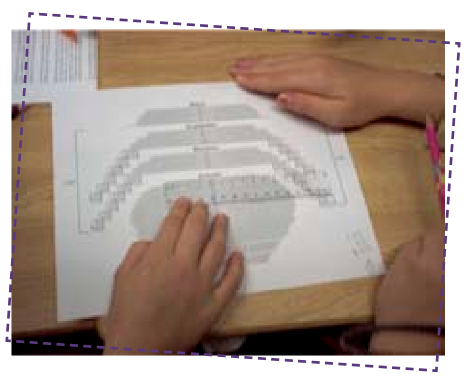
– « Comment pouvez-vous représenter cette situation autrement? »

– « Pouvez-vous résoudre le problème à l'aide d'une autre représentation? »

– « Cette quantité est-elle vraisemblable? »

Les élèves choisiront diverses stratégies afin de résoudre le problème. Voici quelques exemples de stratégies qu'ils pourraient utiliser pour estimer le nombre total de sièges :

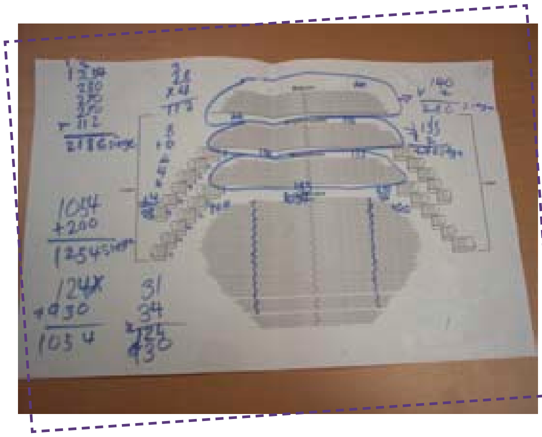
- utiliser la symétrie (p. ex., estimer la quantité de sièges que contient la moitié de la salle, puis doubler ce nombre);
- délimiter des sections qui forment une disposition rectangulaire et estimer le nombre de sièges que chacune contient;
- compter, pour chacune des sections, le nombre moyen de sièges que contient une rangée ainsi que le nombre de rangées et déterminer le produit de ces nombres;
- arrondir les quantités pour simplifier les calculs;
- établir une correspondance entre une mesure linéaire sur le plan et le nombre de sièges (p. ex., 1 cm correspond à 5 sièges).



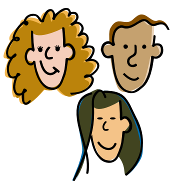
Note : Lorsqu'ils effectuent des calculs pour déterminer s'il y a profit ou non, les élèves manipulent de grands nombres; il est par conséquent important de favoriser l'utilisation d'algorithmes personnels. Rappeler l'importance de vérifier si la réponse est vraisemblable.

Observations possibles	Interventions possibles
Une équipe ne sait pas quoi faire avec les nombres qui figurent dans les cases sur le plan de la salle.	Poser des questions telles que : — « D'après vous, que représentent ces nombres? » — « Comment pouvez-vous utiliser ces nombres pour estimer le nombre de sièges dans la salle? »
Une équipe tente de dénombrer les sièges un par un.	Poser des questions telles que : — « Est-il nécessaire de connaître le nombre exact de sièges dans la salle? » — « Pouvez-vous estimer le nombre de sièges dans une section (ou dans une rangée)? » — « Que pourriez-vous faire maintenant que vous connaissez le nombre approximatif de sièges dans cette section (ou dans cette rangée)? »
Une équipe a de la difficulté à effectuer des calculs à l'aide des algorithmes usuels.	Poser des questions telles que : — « Devez-vous trouver un résultat précis? » — « Pouvez-vous utiliser une autre stratégie pour effectuer vos calculs? »
Une équipe a estimé le nombre de sièges à 2 355 et obtenu une réponse à la suite d'un calcul qui n'est pas vraisemblable (p. ex., 19,75 $ × 2 355 = 90 635 $).	Poser des questions telles que : — « Devez-vous trouver un résultat précis? » — « Quelle stratégie pouvez-vous utiliser pour déterminer l'ordre de grandeur de la réponse? » (*Par exemple, arrondir les nombres et faire un calcul mental rapide avec ces nombres : 20 $ × 2 000 = 40 000 $.*) — « Est-ce que votre réponse est vraisemblable? »

Afin que les élèves se préparent à l'échange mathématique, distribuer aux équipes une grande feuille ainsi que le plan agrandi de la salle. Leur demander de coller ce plan au milieu de la grande feuille et d'y noter leurs calculs. Leur rappeler qu'ils doivent se préparer à expliquer les stratégies d'estimation utilisées et à justifier leur choix à l'aide d'arguments mathématiques clairs et convaincants.



Choisir les équipes qui présenteront lors de l'échange mathématique. Cibler celles qui ont utilisé différentes stratégies d'estimation et de calcul (p. ex., deux équipes qui sont parvenues à une estimation similaire du nombre de sièges dans la salle en utilisant respectivement la symétrie et la disposition rectangulaire). Il peut aussi être utile de choisir une équipe dont la stratégie n'a pas conduit aux résultats escomptés dans la mesure où l'accent est mis sur une analyse constructive des raisons qui font que cette stratégie était moins appropriée à la situation donnée.



APRÈS L'APPRENTISSAGE (OBJECTIVATION/ÉCHANGE MATHÉMATIQUE)

environ
30 minutes

Dans un premier temps, demander à certaines des équipes sélectionnées de présenter à tour de rôle la stratégie utilisée pour estimer le nombre de sièges que la salle peut contenir. Inciter les élèves à fournir des justifications précises en utilisant des arguments mathématiques clairs et convaincants. Par exemple : « Puisque les trois sections du haut, sans les loges, contiennent à peu près le même nombre de sièges, nous avons estimé le nombre de sièges dans une section et l'avons multiplié par trois. »

Lors des discussions, il est important de faire ressortir les différentes stratégies d'estimation utilisées et de les comparer en posant des questions telles que :

– « Pourquoi votre stratégie d'estimation fonctionne-t-elle? »
– « Est-ce que cette stratégie fonctionnerait avec le plan d'une autre salle? »
– « Est-ce que d'autres équipes ont utilisé cette stratégie? »
– « Quelles autres stratégies permettraient d'obtenir des résultats semblables? »

– « Selon vous, quelle stratégie est la plus efficace? Pourquoi? »

– « Y a-t-il de grandes différences entre les estimations du nombre de sièges obtenus par les différentes équipes? » (Faire ressortir que malgré la diversité des stratégies utilisées, plusieurs équipes ont obtenu des estimations très semblables et aussi valables les unes que les autres.)

Demander ensuite aux membres des équipes sélectionnées de révéler le nombre de sièges qu'ils ont noté sur un bout de papier lorsqu'ils ont vu le plan pour la première fois. Afin d'inciter tous les élèves à réfléchir à la différence entre la vraisemblance d'une quantité obtenue en devinant et la vraisemblance d'une quantité obtenue en estimant, poser des questions telles que :

– « Lorsque vous avez vu le plan pour la première fois, quel nombre avez-vous écrit sur votre bout de papier? Ce nombre était-il une estimation? » (*Ce n'était pas une estimation, car le temps alloué ne permettait pas d'utiliser une stratégie d'estimation appropriée*.)

– « Une quantité obtenue en estimant est-elle plus vraisemblable qu'une quantité obtenue en devinant? Pourquoi? » (*Oui, une quantité obtenue en estimant est généralement plus vraisemblable parce qu'elle n'est pas le fruit du hasard; elle est fondée sur un calcul rapide, mais réfléchi*.)

Dans un deuxième temps, demander aux autres équipes sélectionnées de présenter les calculs qu'ils ont effectués pour déterminer si la troupe fera un profit ou un déficit. Mettre l'accent sur les différentes stratégies de calcul utilisées ainsi que sur la vérification de la vraisemblance des réponses. Faire ressortir l'importance d'arrondir les nombres pour faciliter les calculs. Poser des questions telles que :

– « Comment avez-vous déterminé si la troupe fera un profit ou un déficit? »

– « Pourquoi les équipes ont-elles obtenu des réponses différentes? Est-ce acceptable? »

– « Comment savez-vous que votre réponse est vraisemblable? »

– « La troupe fera-t-elle vraisemblablement plus ou moins de profit (ou de déficit) que le montant que vous avez déterminé? »

– « Qu'est-ce qui justifie l'utilisation d'arrondissements? »

Tout au long de l'échange, inviter les autres élèves à réagir à chacune des présentations et à faire part de leurs observations. Au besoin, leur poser des questions telles que :

– « Comment l'arrondissement et l'estimation facilitent-ils les calculs? »

– « Dans quel contexte peut-on estimer? »

– « Dans quel contexte peut-on arrondir? »

– « Qu'est-ce que vous pourriez écrire à ce sujet dans un journal de mathématiques (collectif ou personnel)? »

S'assurer que les élèves comprennent qu'il est acceptable d'estimer et d'arrondir dans des contextes où l'on recherche une réponse approximative et non une réponse exacte.

Pour leur permettre de consolider les stratégies d'estimation, emmener les élèves dans un édifice de leur communauté pouvant accueillir un grand nombre de personnes (p. ex., aréna, salle de théâtre, église) et les inviter à y estimer le nombre de sièges. Il est également possible de faire cet exercice à partir d'une visite virtuelle, sur Internet, d'une salle de théâtre ou d'une salle de spectacle.

ADAPTATIONS

L'activité peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• demander aux élèves d'estimer le nombre de sièges dans seulement une partie de la salle (p. ex., l'orchestre); • demander aux élèves d'estimer le nombre de sièges sans déterminer si la troupe fera un profit ou un déficit.	• remettre le plan d'une autre salle (p. ex., plan de la salle de l'opéra de Sydney en Australie disponible à l'adresse http://www.sydneyoperahouse.com/sections/about_the_house/venues/pdfs/seating_plan_concert_hall.pdf) et demander aux élèves de comparer la capacité de cette salle avec celle que la troupe de théâtre veut louer; • demander aux élèves de calculer le profit ou le déficit en tenant compte du fait que le prix des billets varie d'une section à l'autre (p. ex., prix des billets au balcon : 15,25 $; dans la mezzanine : 18,50 $).

SUIVI À LA MAISON

À la maison, les élèves peuvent :

- soit concevoir le plan d'une salle de spectacles sur du papier quadrillé et déterminer le nombre exact de sièges qu'elle contient;
- soit imprimer le plan d'une salle de spectacles obtenu à partir d'une recherche dans Internet et noter le nombre de sièges qu'elle contient.

De retour à l'école, les élèves échangent leur plan. Ils estiment d'abord, à partir du plan reçu, le nombre de sièges dans la salle. Ensuite, ils comparent leur estimation avec le nombre réel afin de déterminer si elle était appropriée.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 1

La file d'attente

Demander aux élèves d'estimer et de décrire la longueur d'une file de 100 élèves de 5^e année debout l'un derrière l'autre dans un endroit donné (p. ex., le long d'un corridor de l'école, le long d'un mur du gymnase). Une fois qu'un certain nombre de réponses ont été données, discuter avec les élèves de stratégies qui pourraient être utilisées pour vérifier la vraisemblance des estimations sans utiliser un instrument de mesure tel que la règle ou le ruban à mesurer. Par exemple, les élèves pourraient suggérer de placer 10 élèves en file dans l'endroit en question et d'utiliser la longueur de cette file comme repère pour estimer jusqu'où irait une file de 100 élèves.

Une fois que les élèves se seront fait une représentation mentale de la longueur d'une file de 100 élèves, leur demander d'utiliser cette image pour décrire la file de 100 élèves placée dans un autre endroit donné de l'école. Leur demander ensuite de décrire la distance que parcourrait une file composée de tous les élèves de l'école (p. ex., la file ferait environ deux fois la longueur de l'école).

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 2

L'appel des nombres

Photocopier l'annexe 5.3 (*Appel des nombres*) et découper la série de 30 cartes qui s'y trouve. Distribuer toutes les cartes aux élèves. Selon le nombre d'élèves dans la classe, il est possible que certains élèves reçoivent deux cartes. Choisir un ou une élève au hasard et lui demander de lire la question sur sa carte (*Qui a le nombre qui contient…*). L'élève qui a en main la carte sur laquelle figure la réponse à la question posée doit répondre (*J'ai…*), puis lire à son tour la question sur sa carte. Poursuivre ainsi le jeu jusqu'à ce que l'on revienne à la première question.

Note : D'autres séries de cartes peuvent être créées par l'enseignant ou l'enseignante ainsi que par les élèves dans le but d'exploiter un concept mathématique quelconque. Voici deux exemples de cartes créées pour chacun des quatre concepts suivants : valeur de position, décomposition, arrondissement et multiplication.

Valeur de position	Décomposition	Arrondissement	Multiplication
J'ai 3,56. Qui a le nombre contenant le chiffre 8 à la position des centièmes?	**J'ai 1 234.** Qui a le nombre égal à 10 000 + 3 000 + 500 + 3?	**J'ai 3 200.** Qui a le nombre 12 452 arrondi au millier près?	**J'ai 36.** Qui a le produit de 9 et 9?
J'ai 7,28. Qui a le nombre contenant le chiffre 5 à la position des dixièmes?	**J'ai 13 503.** Qui a le nombre égal à 1 200 + 34?	**J'ai 12 000.** Qui a le nombre 3 152 arrondi à la centaine près?	**J'ai 81.** Qui a le produit de 9 et 4?

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 3

Une autre perspective

Distribuer aux élèves une photo sur laquelle il y a une grande quantité d'objets, d'animaux ou de personnes (p. ex., photo d'une volée d'oiseaux, d'un champ de plants de maïs, d'abeilles autour d'une ruche, d'une foule) et leur demander d'estimer cette quantité. Les photos peuvent être obtenues, entre autres, sur Internet (p. ex., site d'un festival floral ou agricole, site de photographies de foules). Puisque les photos offrent une perspective en trois dimensions, les objets en avant-plan apparaissent plus gros que ceux qui figurent à l'arrière-plan. Les élèves vont donc probablement avoir recours à des stratégies d'estimation différentes de celles utilisées dans la situation d'apprentissage. Les inciter à décrire et à justifier leur choix de stratégie.

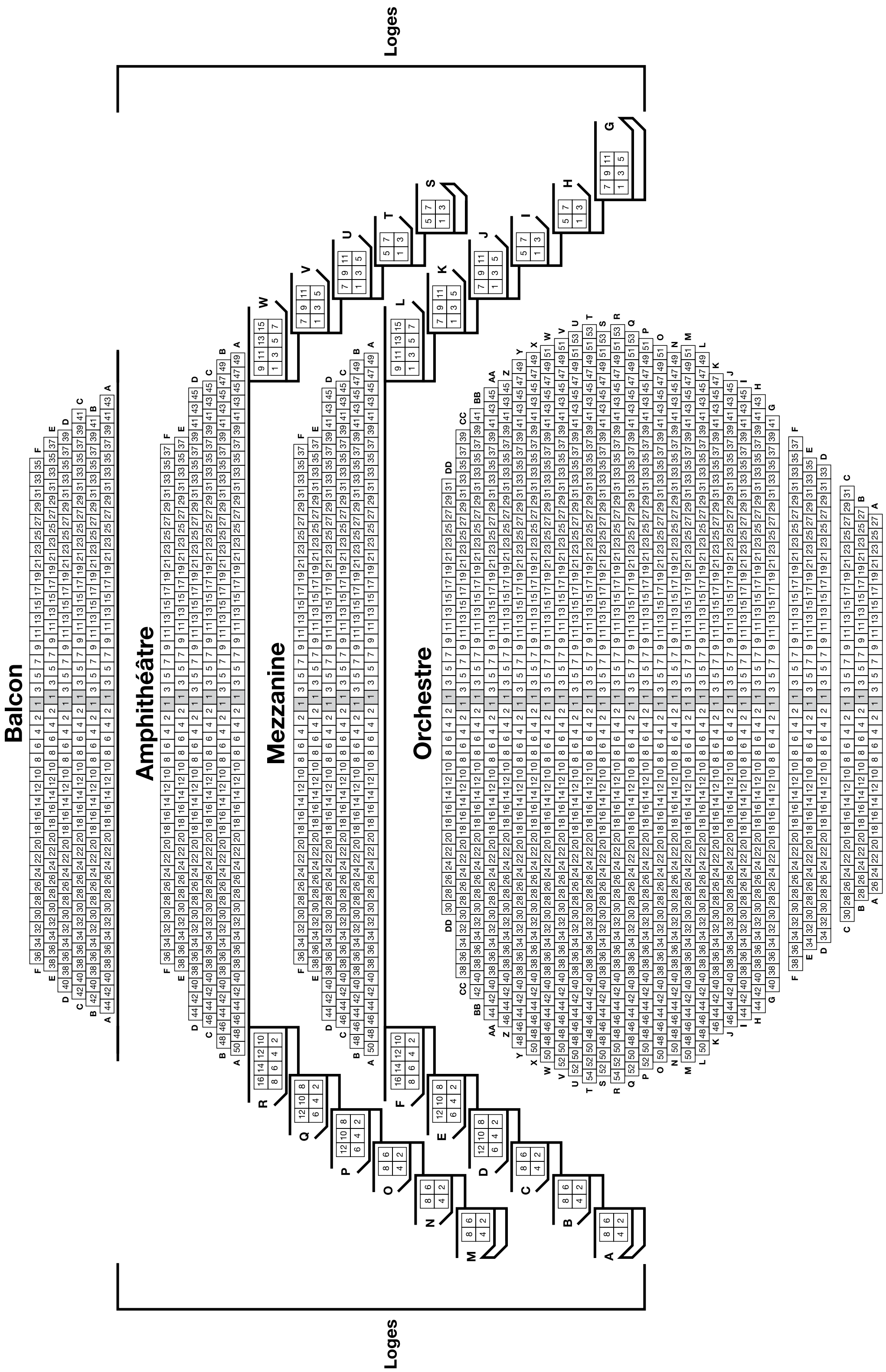
ANNEXE 5.1

Salle de théâtre

La troupe de théâtre souhaite louer la salle que je viens de vous montrer pour présenter sa pièce. Elle prévoit un budget de 22 230 $ pour l'ensemble des dépenses reliées à cette présentation (p. ex., location de la salle, éclairage, son, programme). Si le directeur de la troupe retient la suggestion de fixer le prix d'un billet à 19,75 $ et si tous les billets sont vendus, est-ce que la troupe fera un profit? Si oui, quel sera-t-il environ? Sinon, quel sera le déficit?

ANNEXE 5.2

Plan de la salle



ANNEXE 5.3

Appel des nombres

J'ai 63 899. Qui a le nombre qui contient exactement 24 dizaines?	**J'ai 286.** Qui a le nombre qui contient exactement 27 centaines?	**J'ai 8 292.** Qui a le nombre qui contient exactement 10 dizaines?	**J'ai 2 834.** Qui a le nombre qui contient exactement 24 centaines?
J'ai 243. Qui a le nombre qui contient exactement 10 unités de mille?	**J'ai 2 743.** Qui a le nombre qui contient exactement 63 centaines?	**J'ai 101.** Qui a le nombre qui contient exactement 48 centaines?	**J'ai 2 462.** Qui a le nombre qui contient exactement 82 dizaines?
J'ai 10 338. Qui a le nombre qui contient exactement 36 centaines?	**J'ai 6 328.** Qui a le nombre qui contient exactement 48 dizaines?	**J'ai 4 814.** Qui a le nombre qui contient exactement 36 unités de mille?	**J'ai 821.** Qui a le nombre qui contient exactement 60 unités de mille?
J'ai 3 673. Qui a le nombre qui contient exactement 27 dizaines?	**J'ai 484.** Qui a le nombre qui contient exactement 24 unités de mille?	**J'ai 36 202.** Qui a le nombre qui contient exactement 63 dizaines?	**J'ai 60 177.** Qui a le nombre qui contient exactement 10 centaines?
J'ai 276. Qui a le nombre qui contient exactement 48 unités de mille?	**J'ai 24 112.** Qui a le nombre qui contient exactement 82 unités de mille?	**J'ai 636.** Qui a le nombre qui contient exactement 25 unités de mille?	**J'ai 1 025.** Qui a le nombre qui contient exactement 60 dizaines?
J'ai 48 323. Qui a le nombre qui contient exactement 25 dizaines?	**J'ai 82 913.** Qui a le nombre qui contient exactement 25 centaines?	**J'ai 25 750.** Qui a le nombre qui contient exactement 36 dizaines?	**J'ai 608.** Qui a le nombre qui contient exactement 28 unités de mille?
J'ai 251. Qui a le nombre qui contient exactement 60 centaines?	**J'ai 2 502.** Qui a le nombre qui contient exactement 27 unités de mille?	**J'ai 368.** Qui a le nombre qui contient exactement 28 centaines?	**J'ai 28 536.** Qui a le nombre qui contient exactement 63 unités de mille?
J'ai 6 042. Qui a le nombre qui contient exactement 28 dizaines?	**J'ai 27 490.** Qui a le nombre qui contient exactement 82 centaines?		

Situation d'apprentissage, 6e année

Cible mathématique

GRANDE IDÉE : SENS DES OPÉRATIONS

SOMMAIRE

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves manipulent les nombres naturels en créant un jeu de fléchettes. La propriété de distributivité de la multiplication facilitera la conception du jeu et le calcul mental nécessaire à son déroulement.

Matériel

- transparents des annexes 6.2 et 6.5
- rétroprojecteur
- annexes 6.3 et 6.4 (1 copie par élève)
- annexes 6.6 et 6.7 (1 copie par équipe)

INTENTION PÉDAGOGIQUE

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à appliquer la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition;
- à développer des stratégies de calcul mental;
- à développer des stratégies de résolution de problèmes.

ATTENTE ET CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Attente

L'élève doit pouvoir résoudre des problèmes reliés aux quatre opérations étudiées en utilisant diverses stratégies ou des algorithmes personnels.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

– utiliser la propriété de distributivité comme technique de calcul [p. ex., $5 \times 13 = 5 \times (10 + 3) = (5 \times 10) + (5 \times 3) = 50 + 15 = 65$];

– expliquer les stratégies utilisées ainsi que la démarche effectuée pour résoudre divers problèmes comportant des nombres naturels, des nombres décimaux ou des fractions.

Durée approximative de la situation d'apprentissage : **140 minutes**

CONTEXTE

Au cycle primaire, les élèves apprennent à décomposer des nombres naturels et explorent certaines des propriétés des opérations, notamment, la commutativité de l'addition et de la multiplication. En 4e année, ils voient la propriété d'associativité de l'addition et de la multiplication, et la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. En 5e année, ils utilisent la propriété de distributivité pour estimer et vérifier le produit de deux nombres. En 6e année, la propriété de distributivité est utilisée comme stratégie de calcul mental.

PRÉALABLES

La présente situation d'apprentissage permet aux élèves de recourir à leurs connaissances des opérations pour résoudre mentalement des équations.

La propriété de distributivité est décrite aux pages 104-105.

Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent :

- connaître diverses stratégies d'addition, de soustraction et de multiplication;
- comprendre le concept de multiplication ainsi que la propriété de distributivité;
- comprendre qu'un nombre peut être décomposé de différentes façons.

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Commutativité, distributivité, décomposer.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE FACULTATIVE

environ
30 minutes

Si nécessaire, revoir la propriété de distributivité de la multiplication à l'aide de l'annexe 6.8 (*Distributivité de la multiplication*). Les séries d'opérations apparentées présentées misent sur l'application de cette propriété.

AVANT L'APPRENTISSAGE (MISE EN TRAIN)

environ
60 minutes

Dans la mise en train, les élèves apprennent à jouer à un jeu de fléchettes modifié. Le jeu en question est expliqué à l'annexe 6.1 (*Description du jeu de fléchettes*). Au début, l'accent est mis sur la relation d'égalité entre les points générés par une fléchette et la somme des points obtenus par deux autres fléchettes. Par la suite, en jouant, en analysant le jeu et en discutant, l'importance de la propriété de distributivité comme stratégie de jeu sera mise en évidence.

Présenter la situation suivante :

> Dans le cadre d'une campagne de financement, une école organise une foire mathématique. Chaque classe doit concevoir un jeu qui fait appel à des connaissances ou à des habiletés mathématiques. Les élèves d'une classe de 6^{e} année ont préparé un jeu de fléchettes et ils aimeraient que les élèves d'une autre classe de 6^{e} année l'essaient avant la foire.

Projeter ou reproduire au tableau la cible du jeu (annexe 6.2) et la décrire (voir annexe 6.1). Préciser aux élèves que ce jeu est différent du jeu de fléchettes traditionnel. Expliquer les deux versions du jeu à l'aide des deux exemples ci-après pour éviter de présenter les situations que les élèves auront à résoudre en annexes 6.3 et 6.4.

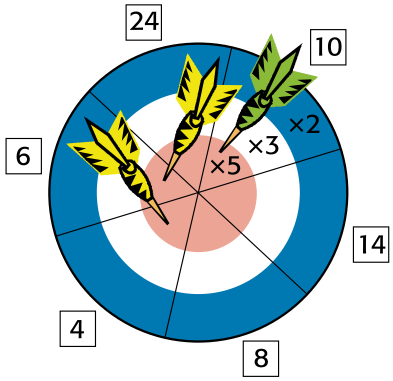
Version 1

Placer une fléchette dans le secteur 6 de l'anneau (×5) et une deuxième dans le secteur 4 de l'anneau (×5). Demander aux élèves :

- de suggérer une façon de représenter les calculs à effectuer afin de déterminer la somme des points obtenus par les deux fléchettes;
- de déterminer l'emplacement possible d'une troisième fléchette pour que le nombre de points générés par cette fléchette soit égal à la somme des points obtenus par les deux autres fléchettes.

Écrire les phrases mathématiques qui correspondent aux divers calculs.

Exemple



Points F1 + Points F2 = Total
(6 points × 5) + (4 points × 5) = 50 points

Pour obtenir le même nombre de points, soit 50 points, la troisième fléchette doit être placée dans le secteur 10 de l'anneau (×5).

Points F3 = Total
(10 points × 5) = 50 points

La phrase mathématique qui correspond à cet exemple est :
(6 points × 5) + (4 points × 5) = (10 points × 5).

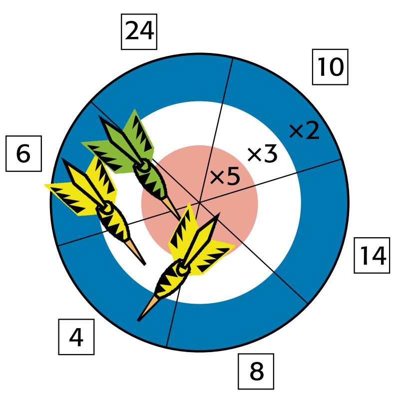
Version 2

Placer une fléchette dans le secteur 4 de l'anneau (×5). Demander aux élèves :

- de suggérer une façon de représenter le calcul à effectuer afin de déterminer le total des points générés par cette fléchette;
- de déterminer l'emplacement possible de deux autres fléchettes pour que la somme des points obtenus par ces deux fléchettes soit égale aux points générés par la première fléchette.

Écrire les phrases mathématiques qui correspondent aux divers calculs.

Exemple



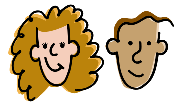
Points F1 = Total
(4 points × 5) = 20 points

Pour obtenir le même nombre de points, soit 20 points, les deux fléchettes doivent être placées dans le secteur 4, une dans l'anneau (×3) et l'autre dans l'anneau (×2).

Points F2 + Points F3 = Total
(4 points × 3) + (4 points × 2) = 20 points

La phrase mathématique qui correspond à cet exemple est :
(4 points × 5) = (4 points × 3) + (4 points × 2).

S’assurer que les élèves comprennent bien le jeu.



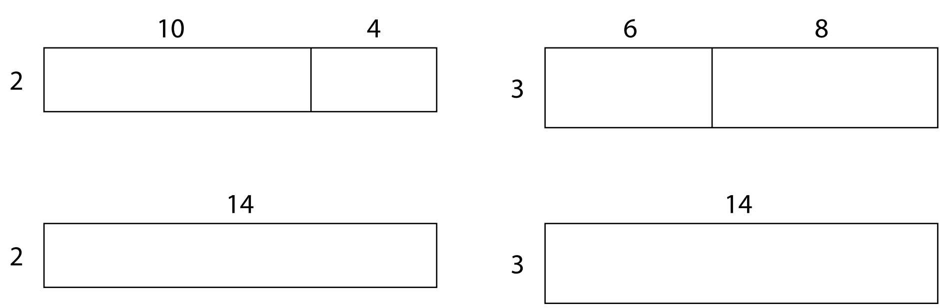
équipes de 2

Grouper les élèves par deux et distribuer une copie des annexes 6.3 et 6.4 à chaque équipe. Discuter avec eux du travail à effectuer. S’assurer qu’ils comprennent bien ce qui est demandé. Allouer suffisamment de temps pour leur permettre d’effectuer les tâches.

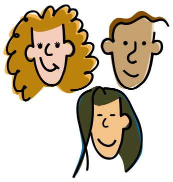
Note : Ces tâches permettent de vérifier la compréhension des élèves du jeu et de faire ressortir l’utilité de la propriété de distributivité de la multiplication sur l’addition. Il est possible, particulièrement à la situation 4, que certains élèves déterminent une combinaison qui ne fait pas appel à cette propriété, par exemple : 24 points × 5 = (15 points × 5) + (15 points × 3) = 120 points. Cette combinaison est toutefois valable puisque le respect de la propriété de distributivité ne fait pas partie des règles du jeu.

Circuler, observer et, si nécessaire, intervenir pour aider les élèves à compléter la section B de l’annexe 6.3. Attirer leur attention sur l’emplacement des deux fléchettes; elles correspondent à deux façons de décomposer 14 par l’addition, soit 10 et 4, et 6 et 8. Demander, au besoin, aux élèves de représenter les opérations à l’aide de dispositions rectangulaires.

Exemple



Pour la situation 4 de l'annexe 6.4, les élèves doivent ajouter les points manquants dans trois des secteurs de la cible; pour ce faire, ils doivent tenir compte du nombre de points générés par la fléchette placée dans le secteur 24 de l'anneau (x 5).



En groupe classe, revenir sur les situations. Écrire au tableau différentes combinaisons et leurs phrases mathématiques correspondantes afin de faire ressortir l'utilité de la décomposition ou de la composition d'un nombre et de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exemple pour la situation 2

Combinaison : Points F1 + Points F2 = Points F3

Phrase mathématique : $(8 \text{ points} \times 3) + (6 \text{ points} \times 3) = 14 \text{ points} \times 3$

Composition d'un nombre : $(8 \text{ points} + 6 \text{ points}) \times 3 = 14 \text{ points} \times 3$

Distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$(8 \text{ points} \times 3) + (6 \text{ points} \times 3) = (8 \text{ points} + 6 \text{ points}) \times 3$$

Utilité : la composition du nombre 14 (8 + 6) permet de trouver le secteur dans lequel placer la troisième fléchette. La distributivité permet d'effectuer le calcul plus facilement.

Faire remarquer que la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition peut aussi s'effectuer sur le deuxième facteur du produit au lieu du premier. Par exemple, dans la situation 3, il est possible de décomposer le deuxième facteur comme suit :

$$24 \text{ points} \times 5 = 24 \text{ points} \times (3 + 2)$$

$$24 \text{ points} \times (3 + 2) = (24 \text{ points} \times 3) + (24 \text{ points} \times 2)$$

Cette caractéristique de la propriété de distributivité permet d'obtenir plus de possibilités de combinaisons de fléchettes.

Écrire au tableau quelques nombres choisis par les élèves comme points manquants dans trois secteurs de la situation 4. À partir des phrases mathématiques formulées, faire ressortir la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exemple

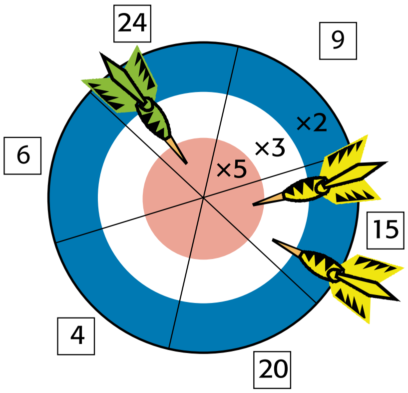
(24 points × 5) = (20 points × 5) + (4 points × 5)

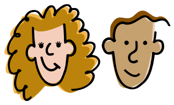
(20 points × 5) + (4 points × 5) = (20 points + 4 points) × 5

Afin de consolider le concept de distributivité, présenter une combinaison acceptable pour la situation 4, qui permet d'établir une relation d'égalité entre les points générés par une fléchette et la somme des points obtenus par deux autres fléchettes, **mais qui ne respecte pas** la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. Les élèves doivent saisir le sens de la distributivité puisque dans le jeu qu'ils créeront ultérieurement, le respect de cette propriété fera partie des règles du jeu.

Exemple

F1	=	F2	+	F3
24 points × 5	=	(15 points × 5)	+	(15 points × 3)
120 points	=	75 points	+	45 points
120 points	=	120 points		





équipes de 2

environ
60 minutes

PENDANT L'APPRENTISSAGE (EXPLORATION)

Présenter la situation suivante :

La cible du jeu de fléchettes avec laquelle nous avons joué précédemment contient 6 secteurs. Maintenant, vous devez créer une cible qui contient 8 secteurs. De plus, une seconde règle s'ajoute à la première : une combinaison ne sera acceptée que si elle respecte la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

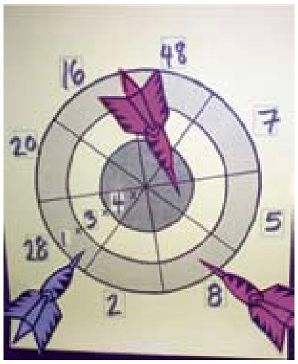
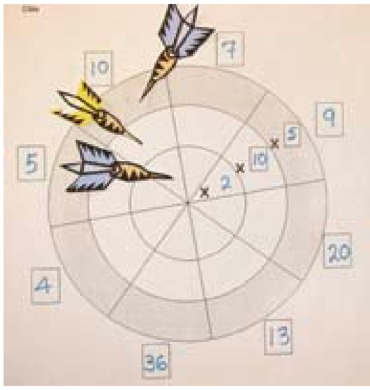
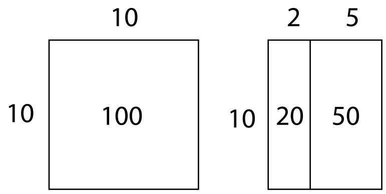
Projeter l'annexe 6.5 (*Création d'une cible*) et expliquer aux élèves la tâche à effectuer.

Grouper les élèves par deux. Distribuer à chaque équipe une copie des annexes 6.6 (*Cible*) et 6.7 (*Fléchettes*). Leur suggérer de découper et d'utiliser les fléchettes pour visualiser plus facilement les combinaisons possibles.

Dire aux élèves de discuter et de créer leur cible en utilisant une variété de stratégies. Par exemple, afin de déterminer les nombres à inscrire dans leur cible, ils peuvent :

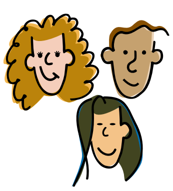
- procéder par essais et erreurs;
- effectuer divers calculs afin d'établir des relations d'égalité entre les points générés par une fléchette et la somme des points obtenus par deux autres fléchettes;
- décomposer des nombres afin de s'assurer que la distributivité est respectée.

Allouer suffisamment de temps pour permettre aux élèves de créer leur cible. Circuler et intervenir au besoin. Porter une attention particulière aux stratégies qu'utilisent les élèves pour déterminer les nombres et les combinaisons possibles.

Observations possibles	Interventions possibles
Les élèves ne savent pas quels nombres choisir pour compléter la cible.	Leur poser les questions suivantes : – « Quels nombres figuraient dans la cible du premier jeu? Qu'avaient-ils en commun? » – « De quelle façon pouvez-vous décomposer un des nombres inscrits sur la cible? »
Certains élèves forment des combinaisons qui ne respectent pas la propriété de distributivité. Par exemple : (28 × 1) = (8 × 1) + (5 × 4).  	Leur poser les questions suivantes : – « Quelles règles votre jeu doit-il respecter? » (*La relation d'égalité entre les points générés par une fléchette et la somme des points obtenus par deux autres fléchettes, et la distributivité de la multiplication sur l'addition*.) – « Est-ce que toutes vos combinaisons respectent la propriété de distributivité? » – « Est-ce qu'un des deux nombres a été décomposé à l'aide de l'addition? » – « Dans les exemples au tableau, où se retrouvent la décomposition et la distributivité? »
Lors du choix des effets multiplicateurs, quelques équipes confondent la décomposition d'un nombre sous forme de somme avec celle d'un nombre sous forme de produit.  Par exemple, ils choisissent les nombres 2, 5 et 10 comme effets multiplicateurs et affirment que la combinaison des trois fléchettes ci-dessus est acceptable, soit : 10 × 10 = (10 × 2) + (10 × 5).	Leur demander par exemple : – « Pourriez-vous vérifier si (10 × 10) = (10 × 2) + (10 × 5)? Pourquoi la phrase mathématique est-elle fausse? » Leur dire de dessiner une disposition rectangulaire qui illustre cette phrase mathématique et leur poser la question suivante : – « Quels nombres peuvent remplacer le 2 et le 5 pour rendre cette phrase mathématique vraie? »  *Note* : Pour respecter la propriété de distributivité de la multiplication **sur l'addition**, le nombre 10 doit être décomposé à l'aide d'une somme (p. ex., 1 + 9; 2 + 8; 3 + 7; 4 + 6) et non d'un produit (p. ex., 2 × 5).

Observations possibles	Interventions possibles
Les élèves ont complété leur cible, mais ils ne parviennent pas à écrire les combinaisons.  	Leur poser la question suivante : – « Lorsque vous avez choisi vos nombres, à quelles combinaisons pensiez-vous? » Leur dire ensuite de placer les fléchettes sur les nombres choisis et d'inscrire, au fur et à mesure, toutes les combinaisons possibles, en suivant la structure des phrases mathématiques de l'activité précédente.

Lorsque les équipes ont terminé la tâche, leur demander de noter, sur une grande feuille, les combinaisons découlant des nombres qu'ils ont choisis. Spécifier aux élèves que les nombres doivent être lisibles à distance et que le contenu de cette grande feuille doit être clair et précis afin que les autres élèves comprennent bien leur raisonnement pendant l'échange mathématique.



environ
20 minutes

APRÈS L'APPRENTISSAGE (OBJECTIVATION/ÉCHANGE MATHÉMATIQUE)

Demander à quelques équipes de présenter leur cible et d'expliquer leur démarche en formulant des arguments clairs, basés sur des termes de causalité ou de conséquence logique, tels que :

- Lorsque j'ai choisi les nombres x et y, je savais que je devais placer les fléchettes dans l'anneau (×2) parce que la première fléchette est placée dans cet anneau.
- J'ai d'abord inscrit 12 et 8 autour de notre cible. J'ai ensuite déterminé que le troisième nombre serait 20 puisque 12 + 8 = 20.

- Puisque la somme de deux des effets multiplicateurs que nous avons choisis (1 et 2) correspond au troisième effet multiplicateur (3), nous obtenons automatiquement 8 combinaisons possibles, et ce, peu importe les nombres choisis pour les secteurs.

Inviter les autres élèves à réagir à chacune des présentations en faisant part de leurs observations ou en posant des questions. Faciliter le déroulement de l'échange mathématique en posant au besoin des questions telles que :

– « Est-ce que quelqu'un peut expliquer pourquoi la somme des points obtenus par les deux fléchettes données est égale au nombre de points générés par la troisième fléchette? »

– « Lorsque vous cherchiez des combinaisons possibles, y en a-t-il qui étaient plus faciles à trouver? Lesquelles? Pourquoi? » [Il est possible qu'ils mentionnent que les combinaisons reliées à la décomposition selon la valeur de position (p. ex., $12 = 10 + 2$) ou celles reliées aux doubles (p. ex., $12 = 6 + 6$) étaient plus évidentes pour eux.]

– « Quels nombres, parmi ceux qui figurent autour de la cible, ont été placés en premier? Comment avez-vous ensuite choisi les autres? »

– « Avez-vous dû changer un ou des nombres qui ne donnaient aucune combinaison? Si oui, lequel ou lesquels? Qu'est-ce qui vous a permis de remarquer que ce ou ces nombres n'étaient pas utiles? »

– « Y a-t-il des combinaisons qui ont été oubliées? Si oui, lesquelles? »

– « Quelle version du jeu (une ou deux fléchettes) vous a permis de trouver plus facilement vos combinaisons? »

– « Combien de combinaisons gagnantes avez-vous trouvées? »

Cet échange mathématique a pour but de faire remarquer aux élèves que la propriété de distributivité de la multiplication est une méthode de calcul mental très efficace. Suggérer ensuite aux élèves d’expliquer comment cette stratégie peut les aider à manipuler des faits numériques plus difficiles [p. ex., 15 × 4 = (15 × 2) + (15 × 2) = 60] ou à effectuer la multiplication d’un nombre à trois chiffres par un nombre à deux chiffres [p. ex., 172 × 12 = (172 × 10) + (172 × 2) ou (100 × 12) + (70 × 12) + (2 × 12)]. Si nécessaire, démontrer le lien entre la distributivité de la multiplication et l’algorithme usuel de la multiplication.

$$\begin{array}{r} 172 \\ \times\ 12 \\ \hline 344 \\ +\ 1\,720 \\ \hline 2\,064 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 172 \\ \times\ 2 \\ \hline 344 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 172 \\ \times\ 10 \\ \hline 1\,720 \end{array}$$

Note : Au moment qui vous semblera opportun, permettre aux équipes d’échanger leur jeu de fléchettes. Ainsi, en jouant, les élèves appliquent et approfondissent la propriété de distributivité comme stratégie de calcul mental.

ADAPTATIONS

L'activité peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

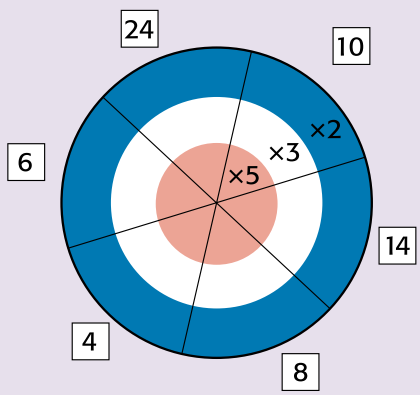
Pour faciliter la tâche

- fournir aux élèves quelques nombres repères qui leur permettront d'identifier une première combinaison;
- leur permettre de compléter la cible avec 6 nombres au lieu de 8;
- leur suggérer 3 nombres pour les effets multiplicateurs afin qu'ils se concentrent sur la décomposition d'un seul des termes de la multiplication.

Pour enrichir la tâche

- suggérer aux élèves de trouver des nombres permettant au moins 15 combinaisons;
- leur demander de créer une cible en fonction du nombre de secteurs et d'anneaux de leur choix;
- leur suggérer de créer une cible dont la règle du jeu est de déterminer une relation d'égalité entre les points générés par une fléchette et la **différence** entre les points obtenus par deux autres fléchettes. (Le jeu est alors axé sur **la propriété de distributivité de la multiplication sur la soustraction**.)

Exemples



Points F1 – Points F2 = Points F3
(10 points × 5) – (6 points × 5) = (4 points × 5)

Points F1 = Points F2 – Points F3
(8 points × 3) = (8 points × 5) – (8 points × 2)

SUIVI À LA MAISON

Demander aux élèves d'apporter à la maison la cible qu'ils ont conçue pour jouer au jeu de fléchettes. Leur préciser la marche à suivre, soit :

1. expliquer les règles du jeu à un membre de leur famille;
2. placer une ou deux fléchettes sur la cible selon la version choisie;
3. demander à la personne de placer la ou les fléchettes correspondantes selon les règles du jeu;
4. vérifier la solution;
5. expliquer l'utilisation de la propriété de distributivité.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 1

Cartes en folie

Écrire au tableau 6 chiffres choisis au hasard. À côté, écrire un nombre à trois chiffres qui sera le nombre cible.

Exemple

$\boxed{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{9}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{2}$

Nombre cible
876

Grouper les élèves par deux. Demander aux équipes de former, à partir des 6 chiffres donnés, 2 nombres dont le produit se rapproche le plus possible du nombre cible (nombre à trois chiffres). Il ne s'agit pas de viser une réponse exacte, mais d'estimer un résultat à l'aide de stratégies de calcul mental.

Exemples

$\boxed{9}\,\boxed{6} \times \boxed{8}$

$\boxed{8}\,\boxed{6} \times \boxed{9}$

$\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{2} \times \boxed{6}$

$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{4} \times \boxed{8}$

Nombre cible
876

Suggérer aux équipes, pendant l'activité, d'expliquer et de comparer les résultats obtenus.

Il pourrait être intéressant de discuter de l'effet de l'arrondissement sur les opérations et des effets des opérations; par exemple, l'arrondissement de 96 à 100 (96 × 8) permet de reconnaître que le résultat est très près, mais inférieur à 800.

Note : Il pourrait être intéressant de modifier ce jeu en ajoutant des chiffres (p. ex., donner au départ 8 chiffres ou donner un nombre cible à quatre chiffres) ou en recourant à différentes opérations.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 2

Le temps des commandes!

Demander aux élèves de préparer la commande d'articles scolaires pour les futurs élèves de 6^{e} année. Pour ce faire, ils doivent déterminer le nombre de crayons, de gommes à effacer et de règles à commander, sachant qu'il y a 8 crayons par paquet, 15 gommes à effacer par paquet et 9 règles par paquet.

Pour accomplir cette tâche, les élèves doivent estimer le nombre d'élèves qu'il y aura l'année prochaine en 6^{e} année ainsi que le nombre de crayons, de gommes à effacer et de règles que chacun devrait recevoir.

Note : Dans cette activité, les élèves doivent tenir compte du reste (pour de plus amples explications à ce sujet, voir p. 87). Il est important de ne pas préciser le nombre de futurs élèves de 6^{e} année ni le nombre d'articles que chacun et chacune devrait recevoir. L'estimation de chacune de ces quantités fait partie de la démarche de résolution du problème. Évidemment, les réponses varieront en fonction des estimations retenues.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 3

Que des trois!

L'activité suivante expose les élèves à l'utilisation de parenthèses pour préciser l'ordre des opérations dans une phrase mathématique. L'activité est conçue pour des élèves qui n'ont pas été préalablement exposés à la priorité des opérations. Si les élèves connaissent déjà la priorité des opérations ou savent comment utiliser les parenthèses, l'activité pourrait être menée différemment.

Pour de plus amples renseignements, voir *Priorité des opérations* (p. 108-111).

En groupe classe, dire aux élèves qu'il est possible de représenter le nombre 0 par une phrase mathématique en utilisant seulement le chiffre 3 et une ou plusieurs des opérations arithmétiques. Leur donner un exemple en écrivant au tableau $0 = 3 - 3$.

Leur présenter ensuite la phrase mathématique $3 \times 3 - 3 \times 3$ et leur montrer que si on effectue les opérations dans l'ordre qu'elles apparaissent, on obtient 18 :

$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 9 - 3 \times 3$$
$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 6 \times 3$$
$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 18$$

Par contre, si on effectue d'abord les deux multiplications, on obtient 0 :

$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 9 - 9$$
$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 0$$

Il est aussi possible d'obtenir 0 en effectuant d'abord la soustraction :

$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 3 \times 0 \times 3$$
$$3 \times 3 - 3 \times 3 = 0$$

Leur expliquer que par convention, on peut utiliser des parenthèses pour donner la priorité à l'une ou l'autre des opérations. Par exemple, si on veut donner la priorité aux deux multiplications, on peut écrire $(3 \times 3) - (3 \times 3)$. Par contre, si on veut donner la priorité à la soustraction, on peut écrire $3 \times (3 - 3) \times 3$.

Afin de s'assurer que les élèves ont bien compris, leur demander de représenter le nombre 1 par des phrases mathématiques en utilisant seulement le chiffre 3 et une ou plusieurs opérations. Préciser qu'ils doivent au besoin utiliser les parenthèses pour donner la priorité à l'une ou l'autre des opérations. Demander à quelques élèves d'écrire une phrase au tableau et demander aux autres d'en vérifier l'exactitude.

Voici quelques exemples de réponses possibles :

$1 = 3 \div 3$ ou $\frac{3}{3}$

$1 = 3 - (3 \div 3) - (3 \div 3)$

$1 = \frac{(3 + 3)}{(3 + 3)}$

Grouper les élèves par deux et leur demander de présenter les nombres de 2 à 10 par différentes phrases mathématiques en utilisant le chiffre 3, les quatre opérations et des parenthèses. Une fois la tâche accomplie, demander à quelques élèves d'écrire, à tour de rôle, leurs phrases mathématiques au tableau et les regrouper selon le nombre en question. Animer un échange mathématique et inviter les autres élèves à observer les phrases mathématiques et à en vérifier l'exactitude.

Note : Il est possible que certains élèves utilisent des parenthèses à l'intérieur des parenthèses. Dans de telles situations, il faut mentionner que la priorité est donnée d'abord aux parenthèses situées à l'intérieur des autres. Par exemple :

$$3 - ((3 + 3) \div 3) = 3 - (6 \div 3)$$
$$3 - ((3 + 3) \div 3) = 3 - 2$$
$$3 - ((3 + 3) \div 3) = 1$$

Exemples de réponses possibles

$2 = (3 + 3) \div 3$ ou $(3 \div 3) + (3 \div 3)$

$3 = (3 \times 3) - (3 + 3)$ ou $(3 + 3) - 3$

$4 = 3 + (3 \div 3)$ ou $(3 + 3) - ((3 + 3) \div 3)$

$5 = 3 + 3 - (3 \div 3)$ ou $(3 \times 3) - 3 - \frac{3}{3}$

$6 = 3 + 3$ ou $(3 \times 3) - 3$

$7 = (3 \times 3) - \frac{3 + 3}{3}$ ou $(3 + 3) + (3 \div 3)$

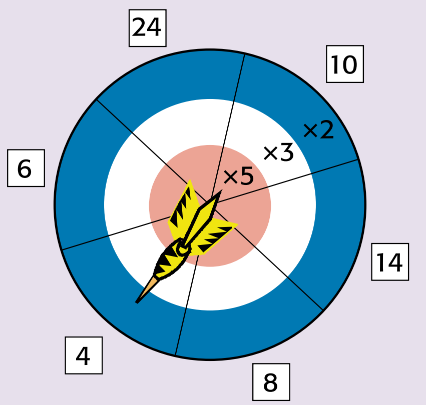
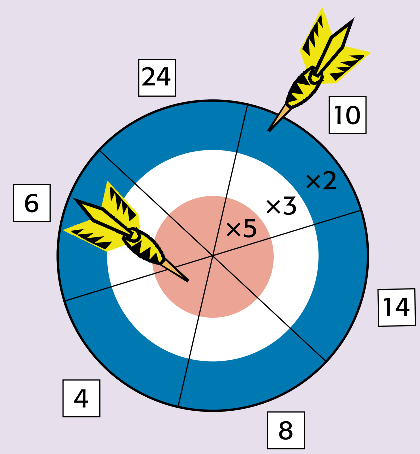
$8 = 3 + 3 + 3 - (3 \div 3)$ ou $3 + 3 + (3 \div 3) + (3 \div 3)$

$9 = 3 + 3 + 3$ ou 3×3

$10 = 3 + 3 + 3 + (3 \div 3)$ ou $(3 \times 3) + (3 \div 3)$

ANNEXE 6.1

Description du jeu de fléchettes

<table>
<tr><th colspan="2">Description de la cible</th></tr>
<tr><td colspan="2">La cible comprend :
• 6 secteurs (4, 6, 8, 10,14 et 24), chacun correspondant à un nombre de points;
• 3 anneaux de couleur, chacun ayant un effet multiplicateur (×2, ×3 ou ×5) sur les points.
Le calcul des points s’effectue comme suit :</td></tr>
<tr><td>Exemple 1 : Une fléchette

</td><td>Exemple 2 : Deux fléchettes

</td></tr>
<tr><td>La fléchette se trouve dans le secteur 4 de l’anneau (×2). Le résultat est donc :
4 points × 2 = 8 points.</td><td>Une fléchette se trouve dans le secteur 4 de l’anneau (×5), l’autre, dans le secteur 10 de l’anneau (×2). Le résultat est donc :
(4 points × 5) + (10 points × 2) = 40 points.</td></tr>
</table>

Le but du jeu est de déterminer des combinaisons de fléchettes sur la cible qui génèrent le même nombre de points. Voici deux versions de ce jeu.

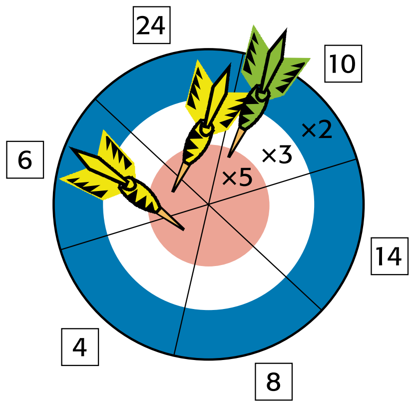
ANNEXE 6.1 (suite)

Version 1 : Deux fléchettes (F1 et F2) sont placées sur la cible.

Règle du jeu

Il s'agit de déterminer à quel endroit sur la cible on doit placer une troisième fléchette pour que le nombre de points générés par cette fléchette soit égal à la somme des points obtenus par les deux autres fléchettes.

Exemple



Points F1 + Points F2 = Total

(6 points × 5) + (4 points × 5) = 50 points

Pour obtenir le même nombre de points, soit 50 points, la troisième fléchette doit être placée dans le secteur 10 de l'anneau (×5).

Points F3 = Total

(10 points × 5) = 50 points

La phrase mathématique qui correspond à cet exemple est :

(6 points × 5) + (4 points × 5) = (10 points × 5).

La première phrase mathématique ci-dessous représente la composition d'un nombre et, la seconde, la distributivité de la multiplication sur l'addition.

(6 points + 4 points) × 5 = (10 points × 5)

(6 points × 5) + (4 points × 5) = (6 points + 4 points) × 5

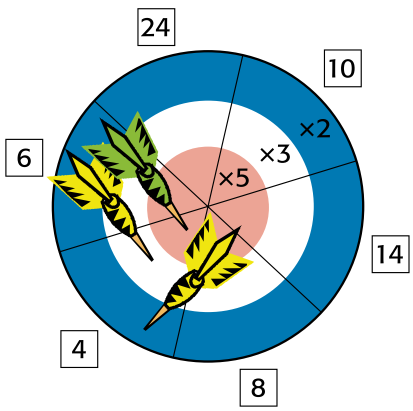
ANNEXE 6.1 (suite)

Version 2 : Une fléchette (F1) est placée sur la cible.

Règle du jeu

Il s’agit de déterminer à quels endroits sur la cible on doit placer deux autres fléchettes pour que la somme des points obtenus soit égale aux points générés par la première fléchette.

Exemple



Points F1 = Total

(4 points × 5) = 20 points

Pour obtenir le même nombre de points, soit 20 points, les deux fléchettes doivent être placées dans le secteur 4, une dans l’anneau (×3) et l’autre dans l’anneau (×2).

Points F2 + Points F3 = Total

(4 points × 3) + (4 points × 2) = 20 points

La phrase mathématique qui correspond à cet exemple est :

(4 points × 5) = (4 points × 3) + (4 points × 2).

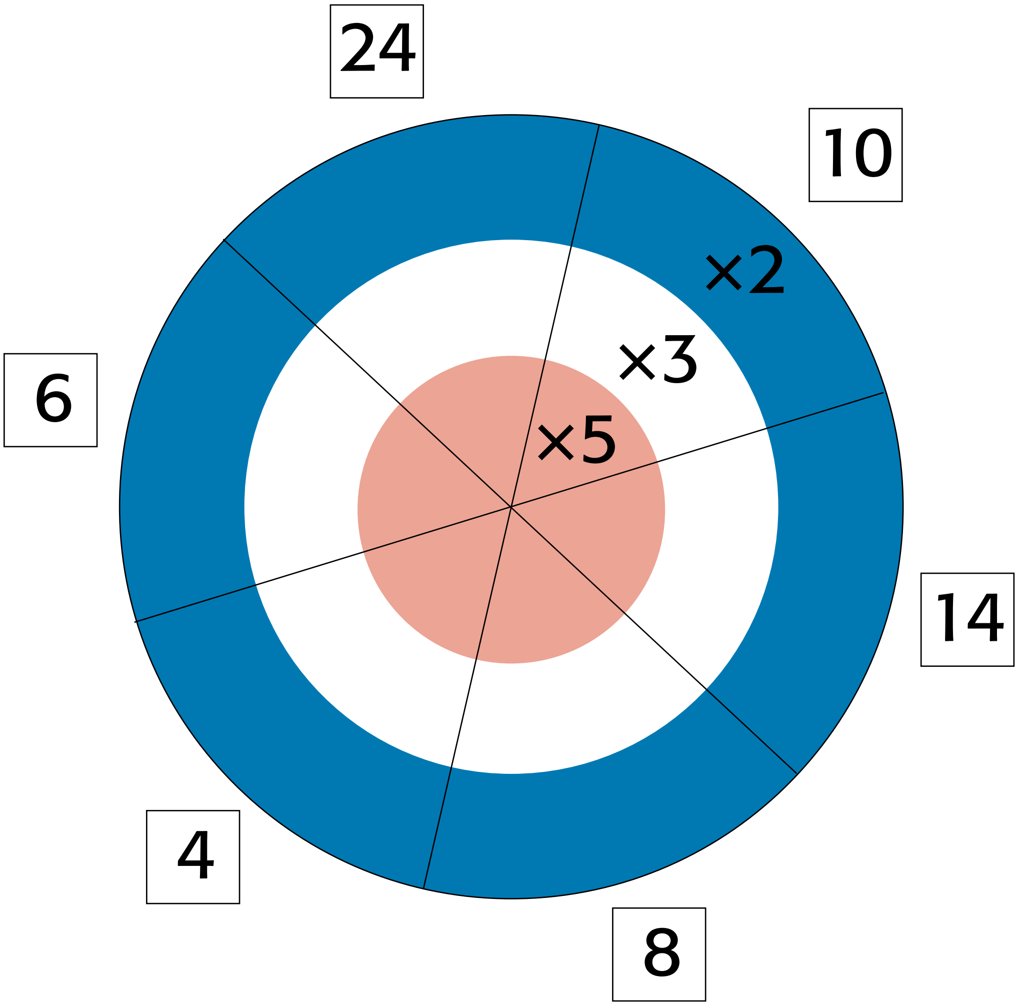
La première phrase mathématique ci-dessous représente la décomposition d’un nombre et, la seconde, la distributivité de la multiplication sur l’addition.

(4 points × 5) = 4 points × (3 + 2)

4 points × (3 + 2) = (4 points × 3) + (4 points × 2)

ANNEXE 6.2

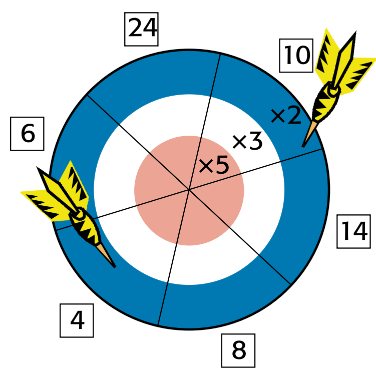
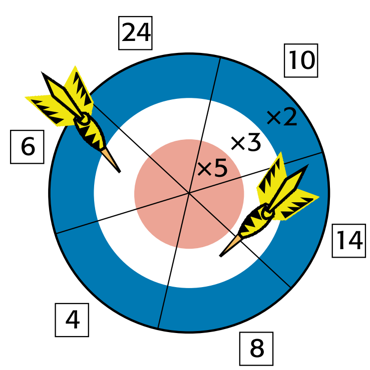
Cible du jeu



ANNEXE 6.3

Jeu de fléchettes (version 1)

A - Pour chacune des situations suivantes, indiquez à quel endroit une troisième fléchette doit être placée sur la cible pour que le nombre de points générés par cette fléchette soit égal à la somme des points obtenus par les deux fléchettes illustrées. Expliquez votre choix et écrivez la phrase mathématique correspondant à cette situation.

Situation 1 	Explication : Phrase mathématique :
Situation 2 	Explication : Phrase mathématique :

B - Inscrivez vos réponses aux questions suivantes dans l'encadré ci-dessous.

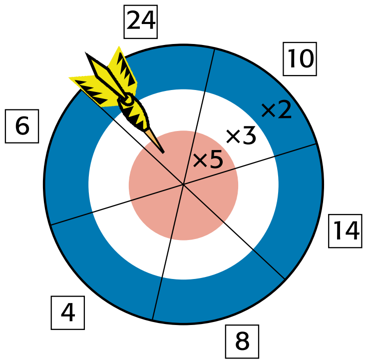
Dans chacune des deux phrases mathématiques, qu'y a-t-il de semblable et de différent de chaque côté du symbole de l'égalité?

Pourquoi la troisième fléchette est-elle située dans le même secteur dans les deux situations?

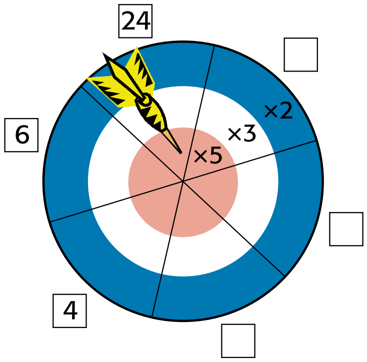
ANNEXE 6.4

Jeu de fléchettes (version 2)

Pour la situation 3, indiquez à quels endroits sur la cible doivent être placées deux autres fléchettes pour que la somme des points obtenus soit égale aux points générés par la fléchette illustrée. Expliquez votre choix et écrivez la phrase mathématique correspondant à cette situation.

Situation 3	Explication :
	Phrase mathématique :

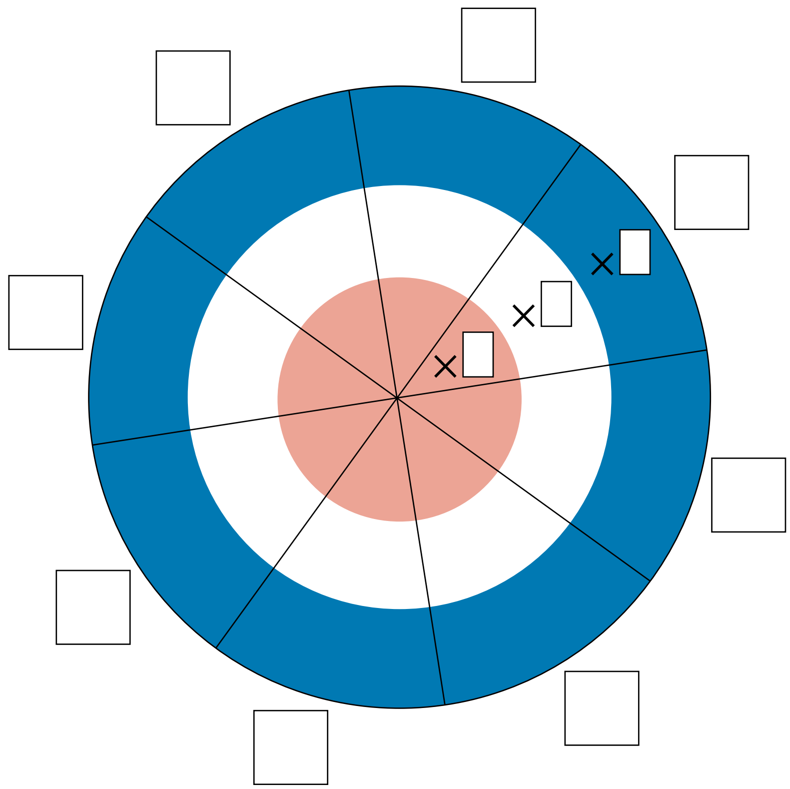
Pour la situation 4, ajoutez d'abord les points manquants dans trois des secteurs de la cible. Ces points doivent être différents de ceux de la situation 3. Ensuite, indiquez à quels endroits sur la cible doivent être placées deux autres fléchettes pour que la somme des points obtenus soit égale aux points générés par la fléchette illustrée. Expliquez votre choix et écrivez la phrase mathématique correspondant à cette situation.

Situation 4	Explication :
	Phrase mathématique :

ANNEXE 6.5

Création d'une cible

Tâche



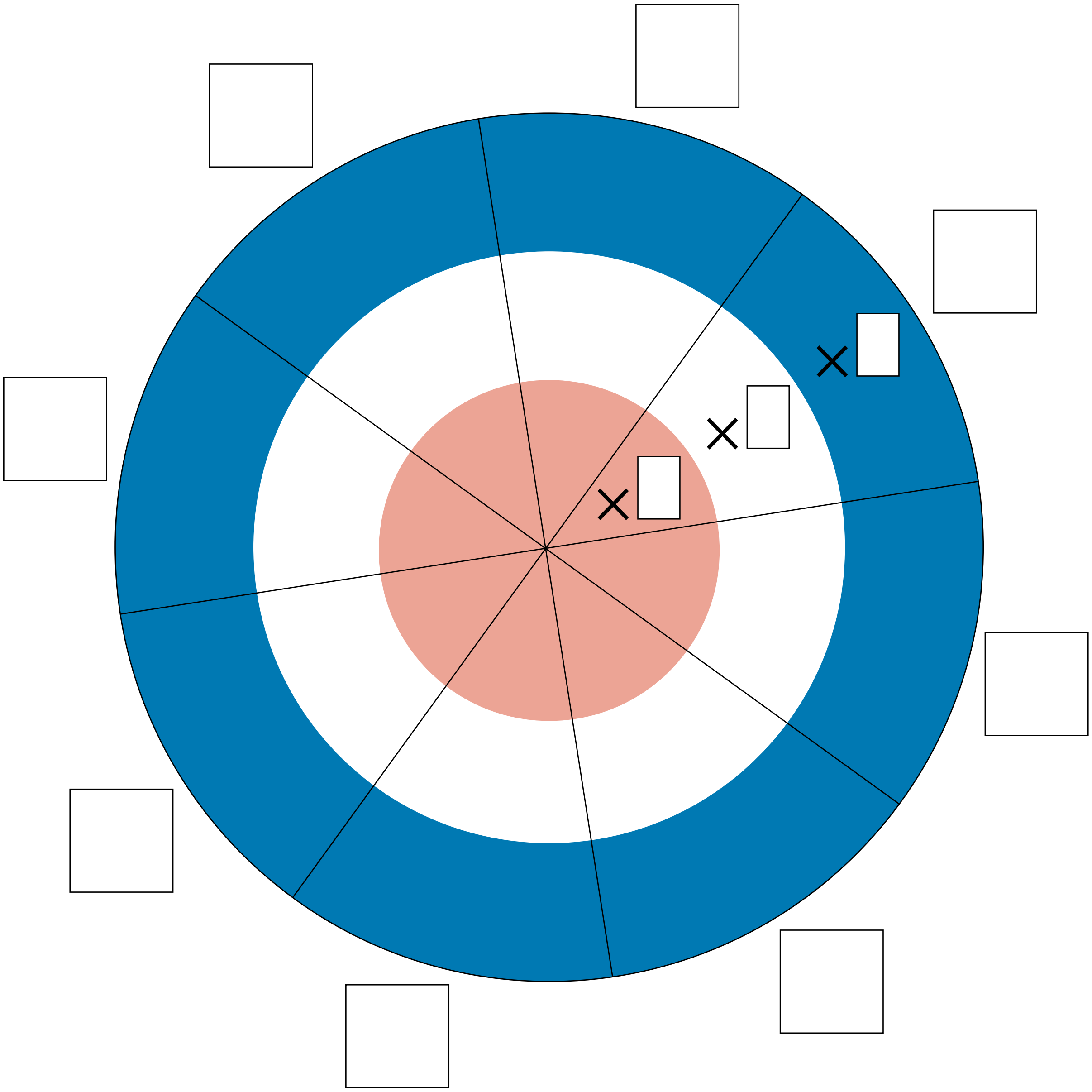
Complétez la cible en écrivant, dans les 8 cases vides et dans les 3 anneaux à effet multiplicateur, des nombres qui :

- n'excèdent pas 50;
- permettent de déterminer au moins 6 combinaisons respectant la propriété de distributivité.

Inscrivez sur une feuille toutes les combinaisons possibles (en vue de l'échange mathématique).

ANNEXE 6.6

Cible



ANNEXE 6.7

Fléchettes

ANNEXE 6.8

Pour plus de détails, voir *Séries d'opérations apparentées* (p. 112-115).

Distributivité de la multiplication

Écrire au tableau chacune des séries d'opérations apparentées suivantes, une à la fois, et demander aux élèves d'effectuer les opérations qu'elle contient.

Série 1	Série 2	Série 3	Série 4
3 × 6	2 × 13	4 × 2	5 × 5
3 × 40	22 × 10	4 × 50	5 × 30
3 × 46	22 × 3	4 × 25	5 × 100
	20 × 13	**4 × 77**	**5 × 95**
	22 × 13		

Une fois une série complétée, faire ressortir les diverses stratégies de calcul mental en posant des questions telles que :

– « Comment avez-vous résolu la dernière opération? »

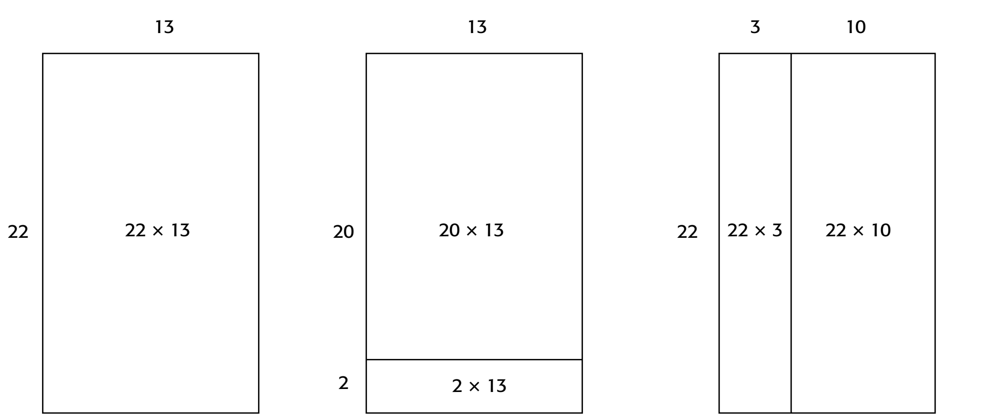
– « Pour résoudre la dernière opération, avez-vous utilisé certains éléments des opérations précédentes? »

– « Avez-vous résolu les opérations dans l'ordre? »

Si nécessaire, avant d'effectuer la même démarche avec la série suivante, présenter d'autres exemples d'opérations apparentées similaires.

Si les élèves ont de la difficulté à voir et à mettre en application la distributivité de la multiplication pour résoudre la dernière opération de chaque série, les y amener en représentant ces opérations sous forme de dispositions rectangulaires.

Exemple



22 × 13 | (20 + 2) × 13 = (20 × 13) + (2 × 13) | 22 × (3 + 10) = (22 × 3) + (22 × 10)

ANNEXE 6.8 (suite)

Constatations sur chacune des séries

Série 1

Cette série permet de revoir la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition à sa plus simple expression. Il s'agit de reconnaître que pour obtenir le produit de 3×46, il est possible d'effectuer une opération sur une somme de termes et d'obtenir le même résultat que si l'opération avait été effectuée sur chaque terme, c'est-à-dire :

$3 \times 46 = 3 \times (40 + 6)$

$3 \times 46 = (3 \times 40) + (3 \times 6)$

Série 2

Cette série permet de constater que la décomposition reliée à la distributivité peut s'effectuer aussi bien sur le second terme que sur le premier, soit :

$22 \times 13 = (20 \times 13) + (2 \times 13)$ ou

$22 \times 13 = (22 \times 3) + (22 \times 10)$

Série 3

Cette série permet de constater que la décomposition d'un nombre pour appliquer la distributivité peut se faire en plus de deux parties. Par exemple :

$4 \times 77 = 4 \times (50 + 25 + 2)$

$4 \times 77 = (4 \times 50) + (4 \times 25) + (4 \times 2)$

Série 4

Cette série permet de constater que l'on peut résoudre la dernière opération à l'aide de la distributivité de la multiplication sur la soustraction. Par exemple :

$5 \times 95 = 5 \times (100 - 5)$

$5 \times 95 = (5 \times 100) - (5 \times 5)$

Elle permet aussi de constater que l'on peut résoudre cette opération à l'aide de la distributivité de la multiplication sur l'addition et d'autres propriétés. Par exemple :

$5 \times 95 = 3 \times (5 \times 30) + (5 \times 5)$

RÉFÉRENCES

BAROODY, Arthur J., et Ronald T. Coslick. 1998. *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*, Mahwah (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, p. 3-8 à 3-16.

Bofwigou (4e à la 6e année). 2007. Méga TFO, série 2, émission nº 692399, réalisée par TFO, Toronto.

Bofwigou (3e à la 5e année). 2007. Méga TFO, série 3, émission nº 730210, réalisée par TFO, Toronto.

CHAMPLAIN, Denis de, Pierre Mathieu, Paul Patenaude et Hélène Tessier. 1996. *Lexique mathématique enseignement secondaire*, 2e éd. revue et corrigée, Beauport (QC), Les Éditions du Triangle d'Or, p. R 13.

CHARLES, Randall I. 2005. « Big Ideas and Understanding as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics », *Journal of Mathematics Education Leadership*, Lakewood (CO), National Council of Supervisors of Mathematics, vol. 8, nº 1, p. 10.

CROTEAU, Marie-Danielle, et Sophie CASSON. 2003. *L'autobus colère*, Montréal, La Courte échelle, 32 p.

DE GROOT, Cornelis, et Timothy WHALEN. Avril 2006. « Longing for Division », *Teaching Children Mathematics*, vol. 12, nº 8, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 412.

DUROCHER, Luc, et Philippe GERMAIN. 2000. *L'école, c'est fou!*, coll. « Le Raton Laveur », Mont-Royal (QC), Modulo Jeunesse, 24 p.

FENNELL, Francis. Septembre 2006. « Representation—Show me the Math! », *NCTM News Bulletin*, vol. 43, nº 2, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 3.

FOSNOT, Catherine Twomey, et Maarten Dolk. 2001. *Young mathematicians at work: Constructing Multiplication and Division*, Portsmouth (NH), Heinemann, p. 29, 47, 74, 80, 97 et 98.

GHAZALI, Munirah. Juillet et août 2000. *A Research Into Children's Understanding Of Multiple Representation Strand Of Number Sense In Penang, Malaysia*, Mémoire présenté au 9e congrès de l'International Congress on Mathematical Education, Tokyo/Makuhari (Japon), p. 2, [En ligne], [www.nku.edu/~sheffield/ghazalipbyd.html] (Consulté le 26 avril 2007).

GOLDIN, Gerald, et Nina SHTEINGOLD. 2001. « Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts », dans Albert A. Cuoco et Frances R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 19.

GUINNESS WORLD RECORDS LTD. 2004. *Guinness World Records 2005 : Édition spéciale 50e anniversaire*, éd. française, Paris, Hachette, p. 22.

HOWDEN, Hilde. Février 1989. « Teaching Number Sense », *Arithmetic Teacher*, vol. 36, nº 6, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 11.

KILPATRICK, Jeremy, Jane SWAFFORD et Bradford FINDELL. 2001. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, Washington (DC), National Academy Press, p. 103.

MA, L. Juin 2004. *Arithmetic as a subject for learning mathematics: Dimensions of its intellectual challenge*, Mémoire présenté au 10e congrès de l'International Congress on Mathematical Education, Copenhague (Danemark).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. 1992. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, 5e éd., Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 9 et 38.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. 2003. *Principles and Standards for School Mathematics*, 3e éd., Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 52.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 1999. *Des choix qui mènent à l'action : Politique régissant le programme d'orientation et de formation au cheminement de carrière dans les écoles élémentaires et secondaires de l'Ontario*, Toronto, le Ministère, p. 8.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2004a. *Enseigner et apprendre les mathématiques : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année*, Toronto, le Ministère, p. 13, 18, 21, 22, 24 et 35.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2004b. *Politique d'aménagement linguistique de l'Ontario pour l'éducation en langue française*, Toronto, le Ministère, 100 p.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005. *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques, Révisé*, Toronto, le Ministère, p. 8, 17 et 19.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, Toronto, le Ministère, 5 fascicules.

RADFORD, Luis, et Serge DEMERS. 2004. *Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*, Toronto, le Ministère, p. 15.

SMALL, Marian. 2005a. *Number and Operations: Background and Strategies*, coll. « PRIME », Toronto, Thomson, p. 136.

SMALL, Marian. 2005b. *Number and Operations: Guide to Using the Developmental Map*, coll. « PRIME », Toronto, Thomson, p. 2.

THOMPSON, Patrick W. 1995. « Notation, convention, and quantity in elementary mathematics », dans J. T. Sowder et B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation of teaching mathematics in the middle grades*, Albany (NY), SUNY Press, p. 220.

VAN DE WALLE, John A., et Karen BOWMAN WATKINS. 2003. « Early Development of Number Sense », dans Robert J. Jensen (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Early Chilhood Mathematics*, 2e éd., Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 146.

VAN DE WALLE, John A., et Sandra FOLK. 2005. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, éd. canadienne, Toronto, Pearson Education Canada, p. 44 et 156.

VAN DE WALLE, John A., et LouAnn H. LOVIN. 2006. *Teaching Student-Centered Mathematics: Grades 5-8*, coll. « The Van de Walle Professional Mathematics Series », vol. 3, Boston (MA), Pearson Education, p. 40.

VÉZINA, Nancy, et coll. 2006. *3e année : Apprentissages essentiels en lien avec le programme-cadre de mathématiques*, Ottawa, CEPEO, CECLFCE et CSDCEO, p. 4.

WESTERN AUSTRALIA. DEPARTMENT OF EDUCATION AND TRAINING. 2005. *First Steps in Mathematics: Number – Understand Operations; Calculate; Reason About Number Patterns*, vol. 2, Salem (MA), STEPS Professional Development & Consulting, p. 6, 7, 66 et 162.

Le ministère de l’Éducation tient à remercier les enseignants, les enseignantes et les élèves qui ont participé à la mise à l’essai des situations d’apprentissage.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario
Imprimé sur du papier recyclé
08-021
ISBN 978-1-4249-6708-7 (fasc. 1)
ISBN 978-1-4249-6707-0 (série)