Guide d'enseignement efficace des mathématiques

de la maternelle à la 3e année

$4 + 8 = \blacktriangle + 9$

Modélisation et algèbre

Fascicule 2

Situations d'égalité

2008

appuyer chaque élève

Ontario

Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année
Modélisation et algèbre

Fascicule 2 : Situations d'égalité

Le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année – Modélisation et algèbre* est réparti en deux fascicules : *Régularités et relations* et *Situations d'égalité*. Ce second fascicule, *Situations d'égalité*, comprend une introduction, une description détaillée du développement de la pensée algébrique et de la grande idée de situations d'égalité, le cheminement de l'élève, une situation d'apprentissage pour le cycle préparatoire ainsi qu'une situation d'apprentissage pour chaque année d'études au cycle primaire.

Guide

d'enseignement efficace des mathématiques

de la maternelle à la 3e année

Modélisation et algèbre

Fascicule 2

Situations d'égalité

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE 3

INTRODUCTION 5

PENSÉE ALGÉBRIQUE 6

Processus fondamentaux 8
Habiletés mathématiques 12
Habileté à résoudre une situation-problème de façon algébrique 12
Habileté à raisonner de façon algébrique 13
Habileté à communiquer de façon algébrique 14
Composantes du milieu d'apprentissage 16
Compréhension des régularités et des relations 16
Représentation de situations-problèmes en utilisant des symboles 16
Utilisation de modèles mathématiques pour représenter des relations entre des quantités 19
Analyse du changement 22
Concepts algébriques regroupés selon les grandes idées 23
Rôle de l'enseignant ou de l'enseignante dans le développement de la pensée algébrique 23

GRANDES IDÉES EN MODÉLISATION ET ALGÈBRE 27

Aperçu 27

GRANDE IDÉE 2 : SITUATIONS D'ÉGALITÉ 28

Aperçu 28
Énoncé 1 29
Vocabulaire lié aux situations d'égalité 31
Relations d'égalité 33
Sens du symbole de l'égalité 36
Habiletés liées aux situations d'égalité 39
Énoncé 2 49
Vocabulaire lié aux situations d'égalité comprenant des symboles 49
Symboles dans la vie courante 51
Symboles en mathématiques 52
Sens du symbole en algèbre 52
Sens de l'inconnue et de la variable 57
Cheminement de l'élève 62
Tableau de progression : Situations d'égalité 63

ANNEXE A – MODÈLES EN ALGÈBRE 64

Droites numériques ... 65
Cadres à dix cases ... 71
Dispositions rectangulaires ... 73
Balances ... 78
Machines mystères ... 80
Tables de valeurs ... 83

ANNEXE B – ACTIVITÉS LIÉES AUX SITUATIONS D'ÉGALITÉ EN ALGÈBRE ET EN NUMÉRATION 87

Exploration de propriétés ... 90
- Explorer la propriété de commutativité ... 90
- Explorer le rôle du nombre 0 dans l'addition ... 93
- Explorer le rôle du nombre 0 dans la soustraction ... 95
- Explorer le rôle du nombre 1 dans la multiplication ... 96
- Explorer la propriété d'associativité ... 97

Utilisation de stratégies ... 101
- Ajouter un nombre mystère ... 101
- Décomposer les nombres selon les valeurs de position ... 104
- Annuler des termes ou des expressions égales ... 105
- Comparer des termes ... 107

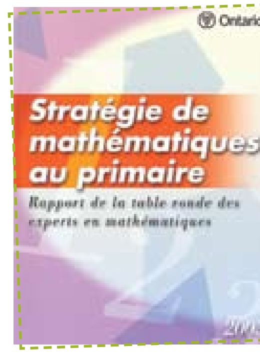
SITUATIONS D'APPRENTISSAGE 110

Aperçu ... 110
Situation d'apprentissage, Maternelle/Jardin d'enfants ... 113
Situation d'apprentissage, 1re année ... 129
Situation d'apprentissage, 2e année ... 153
Situation d'apprentissage, 3e année ... 171

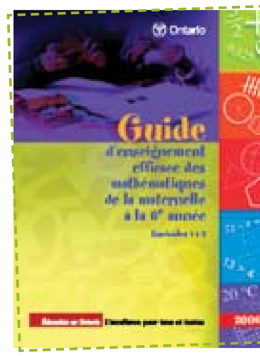
ANNEXE GÉNÉRALE 185

RÉFÉRENCES 187

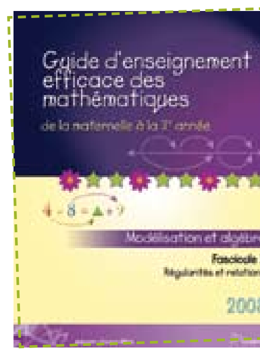
PRÉFACE



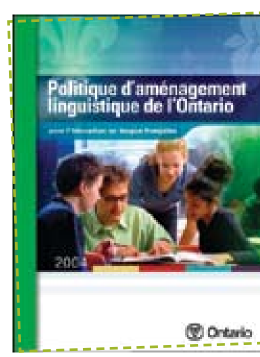
Le document intitulé *Stratégie de mathématiques au primaire : Rapport de la table ronde des experts en mathématiques* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2003) souligne l'importance de l'enseignement efficace comme élément fondamental de l'acquisition des connaissances et des habiletés en mathématiques, et en définit les principales composantes. Pour appuyer la mise en œuvre des recommandations présentées dans ce rapport, le ministère de l'Éducation de l'Ontario a entrepris l'élaboration d'une série de guides pédagogiques composée d'un guide principal et de guides d'accompagnement.



Le **guide principal**, publié en cinq fascicules et intitulé *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a), propose des stratégies précises pour l'élaboration d'un programme de mathématiques efficace et la création d'une communauté d'apprenants et d'apprenantes chez qui le raisonnement mathématique est développé et valorisé. Les stratégies portent essentiellement sur les grandes idées inhérentes aux attentes du programme-cadre de mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b), sur la résolution de problèmes comme principal contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication comme moyen de développement et d'expression de la pensée mathématique. Ce guide contient également des stratégies d'évaluation, de gestion de classe et de communication avec les parents[1].



Les **guides d'accompagnement**, rédigés par domaine en tenant compte des attentes et des contenus d'apprentissage du programme-cadre de mathématiques, suggèrent des applications pratiques des principes et des fondements présentés dans le guide principal. Ils sont conçus pour aider l'enseignant ou l'enseignante à s'approprier la pédagogie propre à chaque domaine mathématique afin d'améliorer le rendement des élèves en mathématiques.



Le guide principal et les guides d'accompagnement ont été élaborés en conformité avec la *Politique d'aménagement linguistique de l'Ontario pour l'éducation en langue française* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004) pour soutenir la réussite scolaire des élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition par chaque élève de compétences en communication orale.

1. Dans le présent document, *parents* désigne père, mère, tuteur et tutrice.

INTRODUCTION

> *Dans ce nouveau millénaire, l'algèbre n'est plus une discipline qui s'attarde à la manipulation de symboles. L'algèbre devient un mode de pensée, une façon de voir et d'exprimer des relations.*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2000, p. 26)

L'algèbre, c'est le domaine mathématique qui est né du besoin de comprendre et d'organiser le monde réel, par exemple le mouvement des étoiles, ce qu'est la lumière, la forme de la Terre. Les mathématiciens et les mathématiciennes ont tenté de répondre à ces questions par l'observation et par l'invention de nouvelles techniques de calcul.

Au cours de la dernière décennie, des éducateurs en mathématiques de plus en plus nombreux proposent de commencer l'étude de l'algèbre dès le primaire. Ils précisent qu'il ne s'agit pas d'un enseignement précoce de l'algèbre du secondaire, ni d'une « préalgèbre » […]. Il s'agit plutôt d'amener les élèves à développer la pensée algébrique sans nécessairement utiliser le langage littéral de l'algèbre.

(Squalli, 2002, p. 4)

Plusieurs auteurs (Driscoll, 1999; Squalli, 2002) soulèvent l'importance d'établir des liens entre l'arithmétique et l'algèbre. L'arithmétique est généralement perçue comme un travail de calcul misant sur l'efficacité à trouver la bonne réponse. Par contre, le travail en algèbre vise à mieux comprendre la numération en permettant aux élèves d'analyser les relations entre les nombres. C'est pourquoi il est primordial de développer l'habileté analytique de la pensée (raisonnement) à l'élémentaire en jetant les bases de la pensée algébrique. Prenons, par exemple, la phrase mathématique **2 + 3 = 3 + 2** pour laquelle les élèves n'ont pas à trouver une réponse. En arithmétique, les élèves pourraient effectuer l'addition de chaque côté du symbole de l'égalité pour confirmer que la phrase est vraie. En algèbre, l'objectif est plutôt de constater que lorsque les nombres sont inversés de l'autre côté du symbole de l'égalité dans une addition, le résultat ne change pas.

La modélisation, c'est un fondement de l'étude de l'algèbre; c'est un moyen plus concret pour amener les élèves à observer à la fois les changements et l'ordre dans le monde qui les entoure. Dans le fascicule 1 du présent guide, l'accent est mis sur la modélisation de suites non numériques et de suites numériques alors que dans le fascicule 2, l'accent est mis sur la modélisation de situations d'égalité.

PENSÉE ALGÉBRIQUE

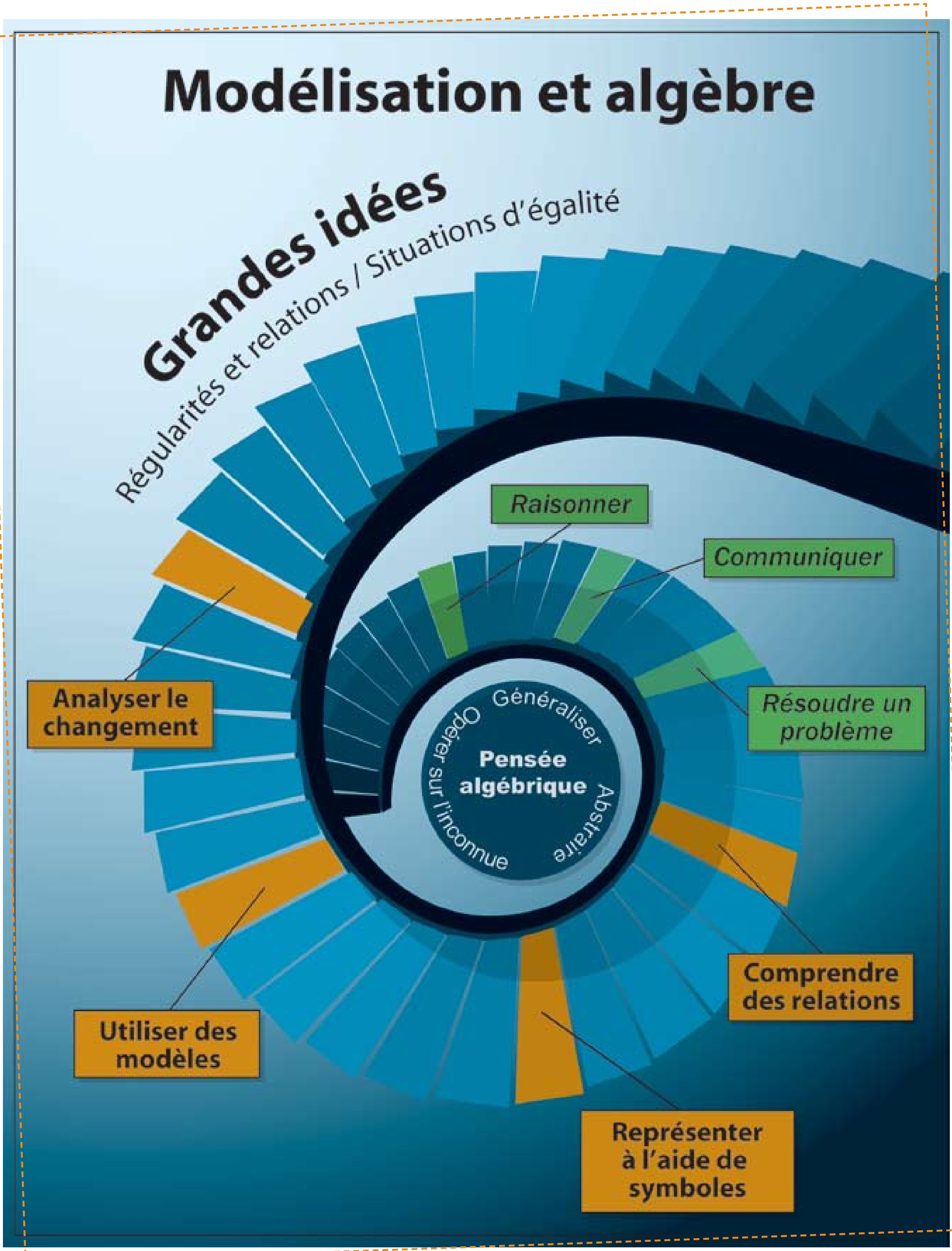
Dans la recherche d'une définition de ce qu'est la pensée algébrique, plusieurs auteurs priorisent une perspective que chacun juge essentielle en algèbre. En voici trois exemples qui reflètent trois perspectives différentes :

- *L'algèbre est quelquefois définie comme la généralisation de l'arithmétique ou comme un langage pour généraliser l'arithmétique. Mais l'algèbre c'est plus qu'un ensemble de règles pour manipuler des symboles, c'est une manière de penser* (Vance, 1998, p. 282, traduction libre).
- *L'algèbre est un langage. Ce langage comprend entre autres : les relations, les inconnues et les variables, et la généralisation des régularités. Chaque fois qu'une de ces idées est discutée, que ce soit à la maternelle ou à un autre niveau, c'est une occasion de travailler le langage de l'algèbre* (Usiskin, 1997, p. 346, traduction libre).
- *L'algèbre peut être un outil puissant pour résoudre des problèmes. Elle permet d'accéder à des solutions beaucoup plus facilement. […] Elle peut devenir un outil indispensable pour représenter et résoudre des situations complexes du monde qui nous entoure* (Baroody et Coslick, 1998, p. 16-3, traduction libre).

Le développement de la pensée algébrique nécessite l'intervention de plusieurs facteurs interagissant entre eux, soit :

- les processus fondamentaux pour accéder à des niveaux d'abstraction supérieurs (abstraire, généraliser et opérer sur l'inconnue);
- des habiletés mathématiques développées selon une perspective algébrique (résoudre un problème, raisonner et communiquer);
- les composantes du milieu d'apprentissage (comprendre des relations, représenter à l'aide de symboles, utiliser des modèles et analyser le changement);
- les concepts algébriques regroupés selon les grandes idées (régularités et relations, et situations d'égalité).

L'affiche à la page suivante illustre l'interaction entre ces facteurs.


Modélisation et algèbre
Grandes idées
Régularités et relations / Situations d'égalité
Raisonner
Communiquer
Résoudre un problème
Analyser le changement
Comprendre des relations
Utiliser des modèles
Représenter à l'aide de symboles
Généraliser
Opérer sur l'inconnue
Abstraire
Pensée algébrique

Processus fondamentaux

Dans une classe de mathématiques visant à développer la pensée algébrique chez les élèves, l'objectif traditionnel de l'enseignement, apprendre à calculer, n'est pas omis; il est largement dépassé. Développer la pensée algébrique est un cheminement complexe qui mise sur trois processus fondamentaux : abstraire, généraliser et opérer sur l'inconnue.

Abstraire : C'est se détacher de l'aspect sensoriel des choses pour raisonner à un niveau plus général (Raynal et Rieunier, 2003, p. 13, adaptation), c'est se représenter mentalement une situation concrète. Piaget considère l'abstraction comme l'un des processus majeurs qui permet la construction des savoirs. Pour sa part, Roegiers (2000, p. 77) explique que l'appropriation d'un concept généralise la réalité (p. ex., une régularité qui n'existe pas dans la réalité, mais qui s'observe dans une suite non numérique). Le concept se situe donc sur un autre plan que la réalité. C'est là le domaine de l'abstraction.

Généraliser : C'est tirer des conclusions valables, vraies dans tous les cas à partir de l'observation et de l'analyse de quelques exemples (Squalli, 2002, p. 9, adaptation).

La généralisation est au cœur de l'activité mathématique. Généraliser […] *est particulièrement important, car chez l'homme, il est à la base de l'acquisition des concepts et des possibilités d'abstraction* (Raynal et Rieunier, 2003, p. 156).

Une **conjecture** est l'expression d'une idée perçue comme étant vraie dans toute situation semblable.

Dans le cadre de situations d'égalité, les élèves peuvent formuler plus aisément une généralisation lorsque celle-ci se situe à la suite d'un processus de proposition et de vérification d'une conjecture.

Lorsque les élèves constatent un phénomène récursif en explorant diverses situations d'égalité, ils sont en mesure de proposer une conjecture. Par exemple, ils pourraient dire que si on additionne le nombre 0 à un nombre quelconque, la quantité initiale ne change pas.

Les élèves doivent ensuite vérifier si leur conjecture est valable dans d'autres situations semblables. Ainsi, dans la situation de l'exemple précédent, ils pourraient la vérifier avec divers nombres ainsi qu'avec du matériel concret.

Lorsqu'une conjecture semble s'appliquer à toutes les situations semblables, ils formulent une généralisation en mots ou à l'aide de symboles.

Proposer une conjecture.
↓
Vérifier une conjecture.
↓
Formuler une généralisation

Exemple

$\square + 0 = \square$

Aux cycles primaire et moyen, les conjectures sont généralement exprimées en mots par les élèves. Elles peuvent aussi être représentées par du matériel concret ou semi-concret afin d'illustrer le plus clairement possible leur raisonnement mathématique.

L'enseignant ou l'enseignante doit exposer les élèves à diverses situations-problèmes qui les incitent à exercer l'habileté à proposer et à vérifier une conjecture. Par exemple, il ou elle leur présente la phrase mathématique **50 + 6 – 6 = 50**, puis leur propose la conjecture suivante : « Lorsqu'on additionne et soustrait le même nombre dans une phrase mathématique, c'est identique à ajouter ou à soustraire zéro. » L'enseignant ou l'enseignante invite ensuite les élèves à discuter entre eux de cette conjecture et à déterminer si elle est toujours vraie.

Les élèves vérifient cette conjecture avec d'autres phrases mathématiques. Ils ne sont peut-être pas persuadés qu'elle s'applique à n'importe quelle phrase mathématique ou à tous les nombres, notamment aux grands nombres. Au cours des échanges, ils peuvent proposer leurs propres conjectures comme illustré ci-après.

Élève 1 :
« La phrase mathématique 100 + 5 – 5 = 100 est vraie parce que **si on soustrait un nombre de lui-même, c'est comme si on ne l'avait jamais ajouté.** Alors, la phrase devient 100 = 100. »

Élève 2 :
« Je crois que la phrase mathématique est vraie puisque **soustraire un nombre de lui-même équivaut à l'additionner d'un zéro**. La quantité de départ ne change pas. Donc, la phrase deviendrait 100 + 0 = 100. »

Après une vérification de diverses phrases mathématiques, les élèves peuvent conclure que la conjecture est vraie et formuler une généralisation.

Exemple

$\square + \lozenge - \lozenge = \square$

L'annexe B du présent fascicule (p. 87-108) présente une liste de conjectures en algèbre qui sont à la portée des élèves du cycle primaire, ainsi que des activités pour explorer certaines propriétés des nombres et des opérations qui se prêtent bien à la formulation d'une conjecture et d'une généralisation.

Comme le vocabulaire des élèves aux cycles préparatoire et primaire n'est pas encore très développé et très précis, les premières conjectures doivent habituellement être reformulées ou clarifiées. L'idéal est donc de pratiquer la formulation d'une conjecture en groupe classe comme le démontre l'exemple ci-après. Lors des échanges, les élèves peuvent souligner les limites de la conjecture proposée par un pair et contribuer à la formulation d'une conjecture commune plus claire et plus pertinente. Il importe cependant que l'enseignant ou l'enseignante établisse un climat d'apprentissage dans lequel les élèves perçoivent les questions des autres comme des interactions positives susceptibles d'alimenter l'échange.

Exemple

Une enseignante présente la phrase mathématique **564 + 0 = 564** et demande aux élèves si elle est vraie ou fausse.

– Élève : « Elle est vraie. »

– Enseignante : « Comment peux-tu l'affirmer? »

– Élève : « Lorsqu'un zéro est ajouté à un nombre, il n'ajoute rien en réalité, on obtient donc le nombre de départ. »

L'enseignante présente d'autres phrases mathématiques semblables. Après plusieurs échanges de ce type, elle demande alors aux élèves de formuler une conjecture.

– Élève : « Tous les nombres additionnés d'un zéro restent les mêmes. »

– Autre élève présente un contre-exemple : « Non, puisque **100 + 300 = 400**. Les nombres 100 et 300 sont composés de zéros. Additionnés, ils ne restent pas les mêmes. »

Après d’autres échanges, un élève formule une autre conjecture :

– Élève : « Lorsque tu joins un zéro à un autre nombre, tu obtiens l’autre nombre. »

– Autre élève : « C’est faux. »

– Enseignante : « Alors, tu fais référence au nombre qui est juste à côté d’un zéro? »

– Élève : « Non, additionné à un autre nombre. »

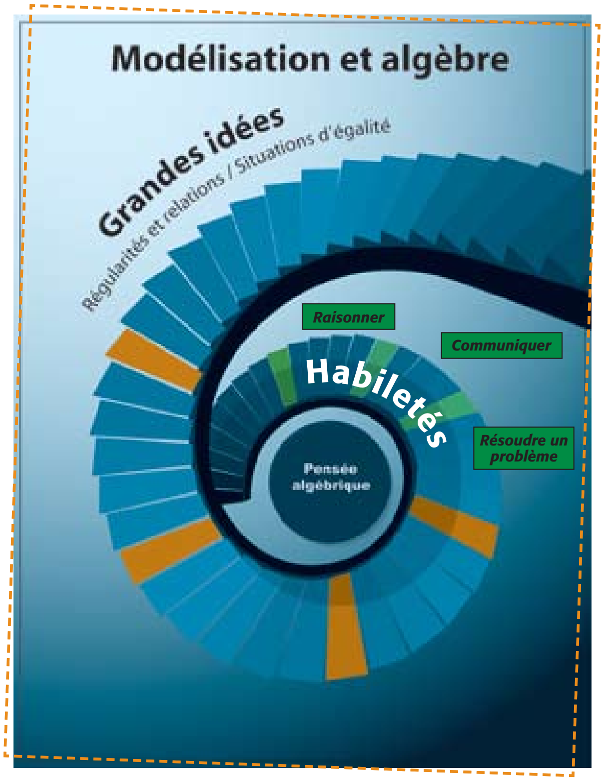
Après maints échanges, la formulation suivante est retenue : « Zéro, additionné à un autre nombre, est égal à ce nombre. » Lorsque les élèves constatent que cette conjecture s’applique à tous les nombres, ils peuvent généraliser.

Opérer sur l’inconnue : C’est raisonner de manière analytique, c’est réfléchir sur les opérations, les généralisations et non sur les objets (Squalli et Theis, 2005, adaptation). Selon plusieurs chercheurs, c’est ce qui distingue l’arithmétique de l’algèbre (Driscoll, 1999; Squalli, 2002).

L’inconnue est généralement représentée par des lettres. Toutefois, dans bien des situations, elle peut être représentée par un symbole ou du matériel concret, ou elle peut être exprimée oralement.

L’algèbre commence avec la prise de conscience des opérations, opérations dans le sens large du mot, c’est-à-dire une série d’actes intellectuels supposant réflexion et combinaison de moyens en vue d’obtenir un résultat ou de résoudre un problème. Elle est […] *présentée comme une « arithmétique généralisée », comme un outil de résolution de problèmes plus puissant que l’arithmétique* (Squalli et Theis, 2005, p. 5).

Habiletés mathématiques



En modélisation et algèbre, les processus de pensée des élèves évolueront dans la mesure où les habiletés à résoudre une situation-problème, à raisonner et à communiquer seront développées selon une perspective algébrique.

Habileté à résoudre une situation-problème de façon algébrique

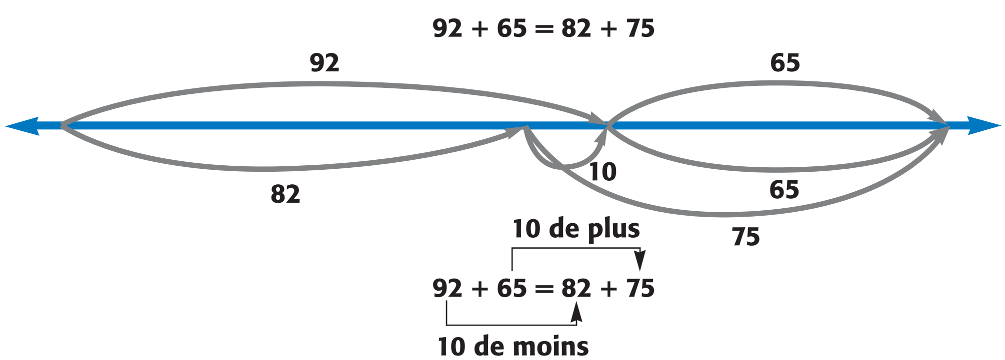
Un des buts de la résolution d'une situation-problème en algèbre est de s'approprier des outils intellectuels pour raisonner (p. ex., rechercher des régularités, établir des relations, utiliser différentes représentations). Résoudre une situation-problème sous l'angle de l'algèbre implique de connaître des modèles pour tenter une solution. Au cycle primaire, les élèves en possèdent peu. L'enseignant ou l'enseignante doit en présenter et les utiliser de façon explicite pour aider les élèves à se les approprier. Les modèles peuvent sembler être davantage de nature numérique, mais leur utilisation sous une perspective algébrique permettra de développer la pensée algébrique. Par exemple, l'enseignant ou l'enseignante initie les élèves à l'utilisation d'une droite numérique ouverte ou double pour les amener à réfléchir au calcul et non à faire le calcul. L'important ce n'est pas de calculer, par exemple, la somme **92 + 65** ou **82 + 75**, mais de bien saisir la relation d'égalité, soit **92 + 65 = 82 + 75**.

Situation-problème

Dans ce document, une situation-problème désigne un problème qui :

- est ouvert;
- est d'envergure;
- se travaille en équipe;
- est mis en contexte;
- est un défi pour tous et toutes;
- permet d'utiliser différentes stratégies.

Exemple



Note : Les conventions pour représenter des relations entre des quantités sur une droite numérique ouverte double ainsi qu'avec d'autres modèles mathématiques sont présentées de façon détaillée à l'annexe A (p. 64-86).

Peu à peu, les élèves s'approprient des modèles, les intègrent dans leur banque de stratégies et y ont recours spontanément pour résoudre un problème. Une situation-problème qui est contextualisée et qui présente un défi suscite l'intérêt et motive les élèves à élaborer une solution. Elle implique un processus qui exige anticipations, retours en arrière et objectivation, ce qui favorise le développement de la pensée algébrique.

Habileté à raisonner de façon algébrique

Cette habileté fondamentale permet aux élèves d'organiser leur pensée. « En mathématique, organiser signifie effectuer des activités mentales telles qu'abstraire, coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer » (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001, p. 128). Le raisonnement algébrique vise à observer et à agir de façon différente par rapport à ce que l'on fait en arithmétique, et à utiliser un ensemble de processus de pensée analytique comme généraliser, opérer sur des inconnues et exprimer des relations.

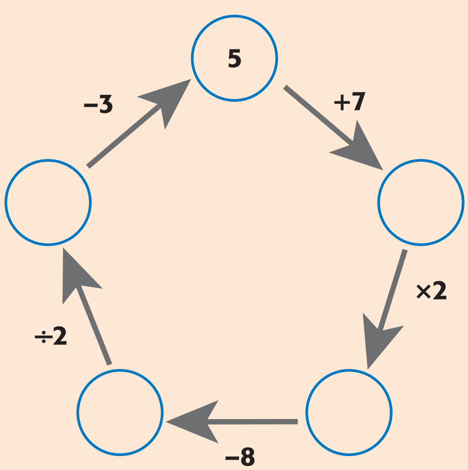
Le tableau ci-après présente la principale distinction entre raisonner de façon arithmétique et raisonner de façon algébrique.

<table>
<tr><th>Raisonnement arithmétique</th><th>Raisonnement algébrique</th></tr>
<tr><td>L'élève opère sur des données connues (le nombre de départ et les opérations).

Connu ⟶ **Inconnue**

L'élève effectue les opérations.

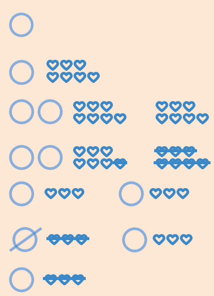
Par exemple :

</td><td>L'élève opère sur l'inconnue (le choix du nombre de départ) comme si elle était connue.

Inconnue ⟶ **Connu**

L'élève observe ou démontre l'opération à effectuer sur l'inconnue.

Par exemple :

Pense à un nombre entre 1 et 9
Ajoute 7
Double la somme
Soustrais 8
Sépare en deux parts égales
Enlève une part
Soustrais 3

Réponse : le nombre de départ

Note : L'inconnue peut être tout nombre ou tout symbole choisi (p. ex., ○).</td></tr>
</table>

Lorsque les élèves **raisonnent algébriquement**, ils analysent les nombres, les symboles, les quantités, les opérations et ensuite, ils généralisent.

La démarche intellectuelle qu'exige le raisonnement algébrique ne se fait pas de façon simple et naturelle. L'enseignant ou l'enseignante doit amener les élèves à effectuer cette démarche :

- en les aidant à rendre leur démarche explicite;
- en les incitant à travailler à rebours, c'est-à-dire à inverser le processus, à partir de la réponse pour se rendre au point de départ;
- en les incitant à trouver des régularités et à organiser l'information pour représenter la situation d'une autre façon et en arriver à une généralisation;
- en leur faisant observer les relations entre les nombres ou les opérations;
- en leur permettant d'objectiver leur démarche.

Afin d'apprendre aux élèves à objectiver leur démarche, l'enseignant ou l'enseignante doit poser des questions qui mettent l'accent sur des concepts algébriques et qui les amènent à réfléchir.

En voici quelques exemples :

– « Est-ce que ça fonctionne si je fais la même chose avec d'autres nombres? »

– « Qu'est-ce qui change? »

– « Qu'est-ce qui ne change pas? »

– « Est-ce que l'information recueillie me permet de prédire le résultat? »

– « Est-ce que la situation d'égalité est vraie dans tous les cas? »

– « Est-ce que je suis toujours les mêmes étapes? Quelles sont-elles? »

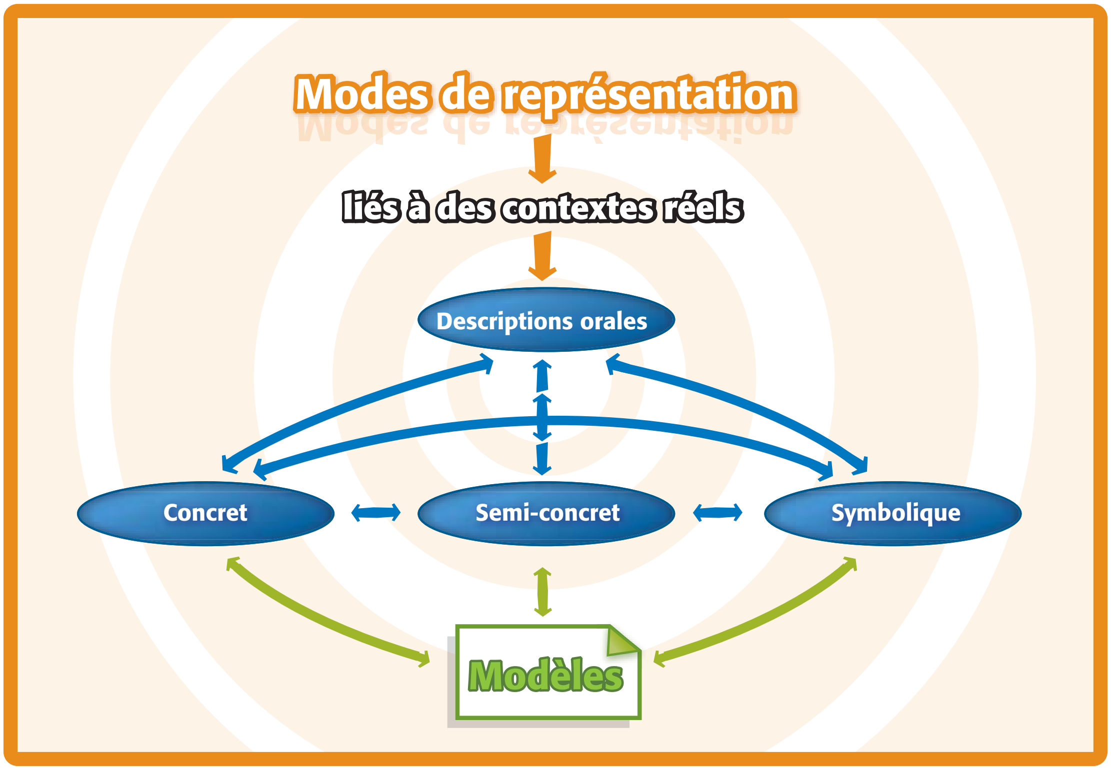
L'échange mathématique est le moment privilégié pour actualiser les arguments mathématiques.

Habileté à communiquer de façon algébrique

L'habileté à communiquer de façon algébrique, oralement et par écrit, se développe par l'échange. Lorsque les élèves discutent de leur compréhension d'une situation ou d'un concept, ils le font à l'aide de deux éléments distincts, soit les modes de représentation et l'utilisation d'arguments mathématiques.

Une étape mathématique significative dans le développement de la pensée algébrique est de comprendre qu'une situation d'égalité peut être représentée à l'aide de différents modèles.

Modes de représentation : Pour communiquer efficacement, les élèves peuvent utiliser différents modes de représentation. Les relations mathématiques peuvent être représentées à l'aide de **matériel concret** ou **semi-concret**, de **symboles** ou de **descriptions orales**. Lorsque les élèves représentent une situation algébrique à l'aide d'un ou de deux modes de représentation, ils utilisent une variété de modèles tels que des tableaux, des grilles de nombres ou des droites numériques (voir *Annexe A – Modèles en algèbre*, p. 64-86). Ces modèles les aident à organiser, à enregistrer et à communiquer leur réflexion lorsqu'ils explorent des situations d'égalité. La représentation d'une situation-problème à l'aide de modèles concrets, semi-concrets ou symboliques, de pair avec une description orale, facilite l'observation de relations et contribue au développement de la pensée algébrique. Les différentes représentations permettent aux élèves de s'approprier les concepts algébriques.



Utilisation d'arguments mathématiques : Pour communiquer efficacement, les élèves doivent aussi parvenir à justifier leur raisonnement à l'aide d'arguments mathématiques en utilisant un vocabulaire de relations causales (p. ex., *si… donc*, *parce que*, *puisque*). *La maîtrise de l'argumentation mathématique est un processus très long dans le développement conceptuel de l'élève*. (Radford et Demers, 2004, p. 32)

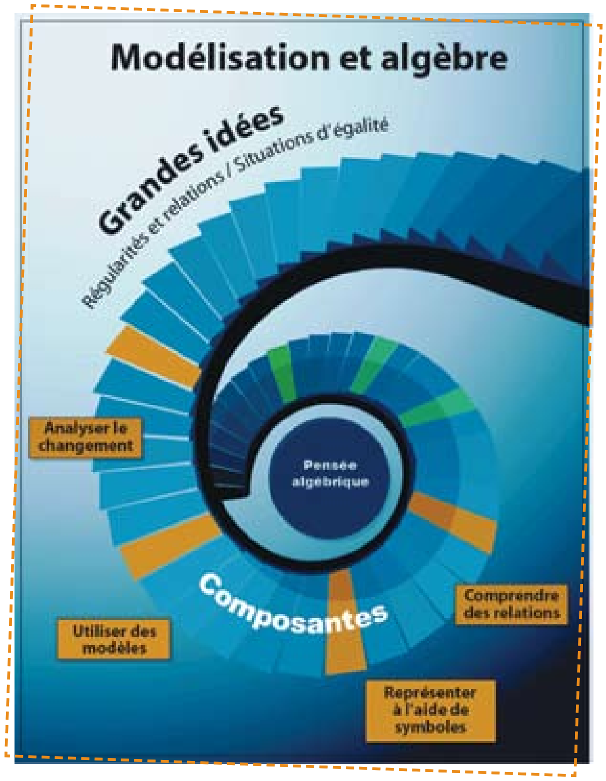
Argument mathématique :

Justification orale ou écrite d'un raisonnement dans le but de démontrer ou de réfuter une idée mathématique.

L'échange mathématique est le moment privilégié pour actualiser les représentations et les arguments mathématiques et ainsi favoriser le développement de la pensée algébrique. Pour plus d'informations au sujet de l'échange mathématique, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 3 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 44-46). Lorsque les élèves s'approprient un problème en algèbre, ils proposent des conjectures, présentent leurs pistes de solution, confrontent leurs idées ou justifient leurs résultats à l'aide de différentes représentations.

Composantes du milieu d'apprentissage

Un milieu d'apprentissage exerce une grande influence sur le développement de la pensée algébrique des élèves. Pour établir un milieu propice, il faut prendre en compte les quatre composantes suivantes : la compréhension des régularités et des relations, la représentation de situations-problèmes en utilisant des symboles, l'utilisation de modèles mathématiques pour représenter des relations entre des quantités ainsi que l'analyse du changement. Chacune de ces composantes est abordée ci-après.



Compréhension des régularités et des relations

Reconnaître des régularités est une habileté importante en résolution de problèmes; cette habileté permet l'appropriation d'autres concepts et la formulation de conjectures menant à des généralisations. Le concept de régularité a été traité de façon détaillée comme première grande idée dans le fascicule 1 du présent guide. Pour s'approprier les concepts de régularités et de relations liés à la deuxième grande idée, *Situations d'égalité*, les élèves observent et analysent à l'aide de modèles les nombres dans une phrase mathématique ou dans une équation.

Représentation de situations-problèmes en utilisant des symboles

Représenter et analyser des situations-problèmes est une composante fondamentale de la pensée algébrique. Pour réussir en algèbre, il faut être capable d'utiliser des représentations symboliques de situations réelles ou contextualisées. Les situations réelles représentées au départ à l'aide de matériel concret ou semi-concret seront graduellement représentées par des symboles. Afin de construire une base solide pour bien comprendre les concepts en algèbre, il est important de faire cheminer les élèves de façon progressive vers une représentation symbolique plus formelle. L'utilisation de symboles facilite l'atteinte d'un niveau d'abstraction plus élevé, tout particulièrement lorsqu'on veut représenter des nombres dans des situations d'égalité.

Les symboles, surtout ceux retrouvés dans les équations, sont une façon d'exprimer des généralisations qui expliquent des relations et des régularités.

(Van de Walle et Folk, 2005, p. 401, traduction libre)

En numération, les élèves doivent développer le sens du nombre. Ce concept fondamental peut être décrit comme suit :

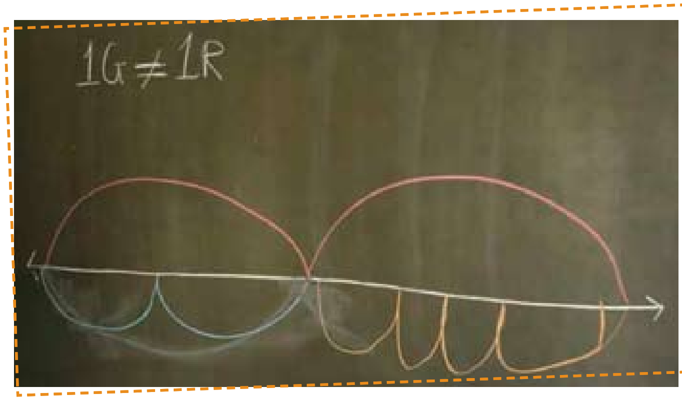
- une habileté intuitive à manipuler des nombres sans avoir recours aux algorithmes;
- une compréhension des nombres et des opérations fondamentales.

Le sens du symbole, c'est l'habileté :

- à comprendre la valeur des symboles;
- à savoir en faire un usage judicieux et pertinent;
- à représenter un contexte par des symboles.

En algèbre, les élèves doivent développer le sens du symbole. Certains chercheurs établissent un parallèle entre le sens du nombre et le sens du symbole. Entre autres, Arcavi (1994) conçoit le sens du symbole comme une appréciation spontanée et juste ou une compréhension instinctive du symbole. Il précise que le sens du symbole se manifeste par les actions suivantes :

- démontrer des relations, des généralisations et même des justifications qui, autrement, seraient difficiles à saisir;
- choisir une représentation symbolique possible afin de représenter et de résoudre une situation-problème;
- déterminer si la situation nécessite une représentation symbolique ou une autre représentation;
- manipuler les symboles, les lire et visualiser les résultats et les régularités possibles.



Dès le cycle primaire, les élèves démontrent leur compréhension des propriétés des opérations mathématiques telles que la commutativité de l'addition avec des objets ou des nombres spécifiques. Ils utilisent du matériel concret, des dessins, des mots ou des symboles pour représenter des idées mathématiques et des relations, entre autres la relation d'égalité. Lorsqu'on encourage les élèves à décrire et à représenter des quantités de différentes façons, ils améliorent leur habileté à utiliser des symboles pour communiquer leurs idées.

Représentation concrète d'une situation d'égalité

Représentation symbolique de cette situation d'égalité (phrase mathématique)

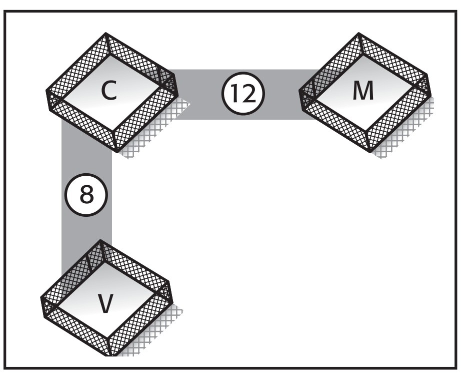
Par la suite, les élèves prennent conscience de la signification des symboles (p. ex., carrés, cercles, lettres) pour exprimer des inconnues et des variables. Ils apprennent aussi à les utiliser pour exprimer des relations en écrivant des équations.

$$\boxed{10 = \square + \bigcirc + \bigcirc + \triangle}$$

La présentation de situations-problèmes authentiques favorise la compréhension des concepts d'inconnue et de variables tout en contribuant à démystifier l'emploi de symboles.

Exemple

Un fermier a trois enclos : un enclos pour les chevaux, un pour les vaches et un pour les moutons. Les trois enclos sont reliés par des chemins comme illustré ci-dessous. Les nombres inscrits indiquent le nombre total d'animaux dans deux enclos reliés par un chemin. Combien d'animaux peut-il y avoir dans chaque enclos?



(Inspiré de William R. Speer, David T. Hayes et Daniel J. Brahier, « Addition Using Algebra Networks », *Teaching Children Mathematics*, 1997, p. 305 et 306.)

Avec des petits animaux en plastique, les élèves déterminent les quantités possibles d'animaux dans chaque pâturage. Par exemple, un ou une élève peut placer 4 vaches (4v), 4 chevaux (4c) et 8 moutons (8m) dans les pâturages respectifs. Par la suite pour justifier son raisonnement, il ou elle écrit une phrase mathématique correspondant à sa représentation.

Exemple

4 c + 4 v = 8 animaux

4 c + 8 m = 12 animaux

L'utilisation du matériel de manipulation permet de voir concrètement les relations possibles entre les variables. Au cycle primaire, cette stratégie mise sur la compréhension plutôt que sur l'utilisation abstraite de symboles. Elle développe le raisonnement et la pensée algébrique.

L'habileté à manipuler des symboles permet aux élèves d'analyser une situation-problème, de choisir une représentation appropriée, de sélectionner une stratégie efficace pour la résoudre et d'évaluer si leur solution est plausible.

Utilisation de modèles mathématiques pour représenter des relations entre des quantités

> *L'utilisation de modèles pour organiser, enregistrer et communiquer des idées mathématiques facilite les représentations. À l'aide du matériel de manipulation, de diagrammes, de dessins et de symboles, les modèles servent à « faire voir les mathématiques. » Le recours à ces modèles aide aussi à s'approprier les idées mathématiques et à les comprendre.*
>
> (Fennell, 2006, p. 3, traduction libre)

Les modèles mathématiques permettent d'étudier des relations. Au fil du temps, les mathématiciens et les mathématiciennes ont créé, utilisé et généralisé certaines idées, stratégies et représentations pour faciliter l'appropriation de concepts. Par l'usage, certaines représentations sont devenues des modèles reconnus, par exemple la droite numérique et le cadre à dix cases. Il est important que les élèves utilisent des modèles mathématiques dans une variété d'activités pour comprendre des relations entre les quantités.

Une **relation** mathématique est un lien qui existe dans un contexte particulier entre des objets, des idées ou des nombres.

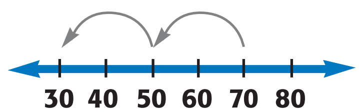
Devant une situation-problème à résoudre, plusieurs représentations sont possibles; certains élèves utilisent leur corps, du matériel de manipulation ou des dessins et d'autres représentent les données plus schématiquement. La façon de s'approprier les données et de les organiser reflète le niveau de développement de la pensée algébrique. Les modèles explorés au cycle primaire et au cycle moyen seront différents selon le niveau d'abstraction des élèves. La résolution d'un problème peut donner lieu à l'utilisation de divers modèles. Dans ce document, le mot modèle désigne les différentes représentations concrètes, semi-concrètes et symboliques du problème, mais il désigne aussi la façon dont chaque élève utilise des symboles personnels pour modéliser son raisonnement.

Dans le tableau ci-dessous, les modèles à explorer aux cycles préparatoire et primaire sont présentés. Pour chacun des modèles, on retrouve à l'annexe A (p. 64-86) :

- une description détaillée du modèle;
- une démarche d'introduction au modèle;
- des exemples de situations-problèmes mettant en parallèle l'emploi du modèle en numération et en algèbre.

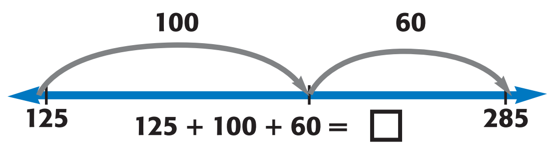
Modèles à explorer aux cycles préparatoire et primaire

Droite numérique



$70 - 20 - 20 = \square$

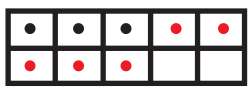
Droite numérique



$125 + 100 + 60 = \square$

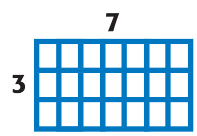
Droite numérique ouverte

Cadre à dix cases



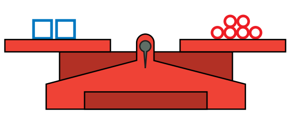
$3 + 5 = 8$

Disposition rectangulaire

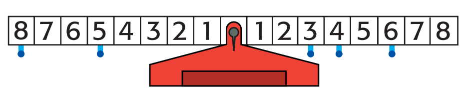


$3 \times 7 = 21$

Balances



Balance à plateaux



Balance mathématique

Machine mystère

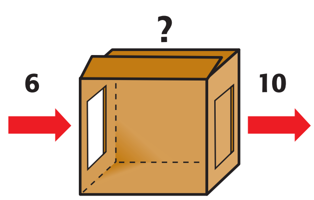


Table de valeurs

Rang	Terme
1	3
2	6
3	9

+ 3

+ 3

L'enseignant ou l'enseignante devrait utiliser une variété de modèles et initier les élèves à les utiliser afin de les aider à raisonner. En représentant une situation-problème, les élèves analysent les relations à l'aide de modèles, tirent des conclusions et les expliquent oralement. Les modèles sont des outils qui aident les élèves à formaliser leur pensée algébrique.

Les modèles sont avant tout des représentations permettant d'explorer des changements, d'illustrer des relations et de proposer des conjectures dans divers contextes, et ce, dans le but de s'approprier les concepts. Fosnot et Dolk (2001, p. 77) les décrivent comme des cartes mentales utilisées par des mathématiciens et des mathématiciennes pour organiser et résoudre des situations-problèmes et pour explorer des relations.

De la même façon qu'ils le font pour les symboles, les élèves recourent aux modèles pour donner un sens aux relations entre les nombres et les opérations. Les modèles, en permettant d'analyser les situations-problèmes de façon plus abstraite, en facilitent la compréhension. Et au cœur même de ces modèles, les élèves ont accès au sens du nombre, au concept de relations entre les nombres et ultimement, au développement des processus fondamentaux.

Selon Fosnot et Dolk (2001), les modèles, à l'instar des grandes idées et des stratégies, ne peuvent être transmis par automatisme; les élèves doivent les construire eux-mêmes pour se les approprier. Il importe donc de leur soumettre des situations-problèmes favorables à la modélisation, de sorte qu'ils créent leurs propres symboles et modèles pour représenter les situations, au lieu de leur proposer systématiquement les algorithmes usuels ou les stratégies apprises.

Ainsi, au cours de leur cheminement scolaire, les élèves devraient en arriver à concevoir comme une **stratégie** le **modèle** qu'ils utilisaient d'abord comme un **outil**; par ce transfert, les relations mathématiques courantes et familières serviront d'appui à des situations moins courantes, présentées dans des contextes nouveaux (à titre d'exemple, voir la situation d'apprentissage de 2e année, p. 153-170). Cette habileté à transférer une connaissance à de nouveaux contextes se retrouve dans la grille d'évaluation du rendement du programme-cadre de mathématiques, sous la compétence « Mise en application ».

Exemples de questions pour inciter les élèves à réfléchir

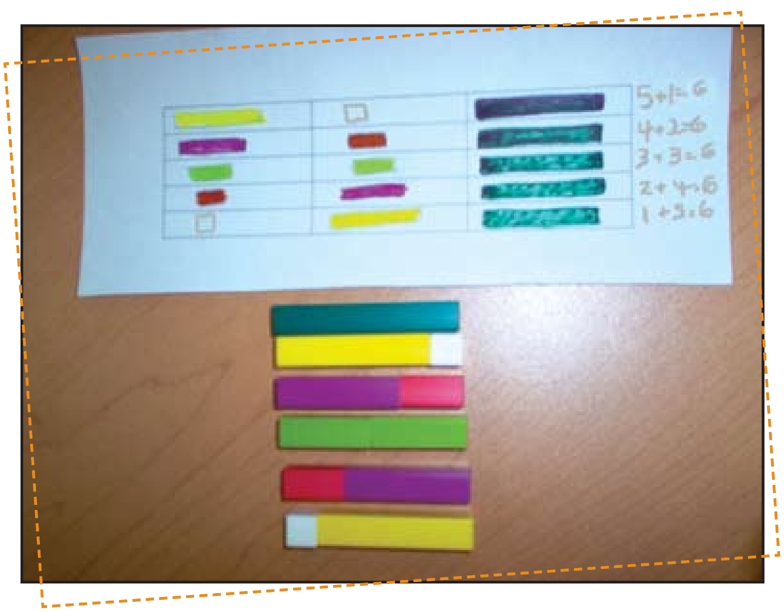
- « Comment sais-tu que c'est la solution? »
- « Pourquoi ta façon de procéder (modèle) fonctionne-t-elle? »
- « Est-ce que ton modèle fonctionne pour d'autres nombres? Justifie ta réponse. »
- « Comment peux-tu représenter cette situation autrement? »

Plusieurs activités d'algèbre peuvent être perçues comme des activités de numération; en fait, c'est surtout l'orientation algébrique donnée par l'enseignant ou l'enseignante qui permettra aux élèves d'accéder au monde de l'algèbre.

Analyse du changement

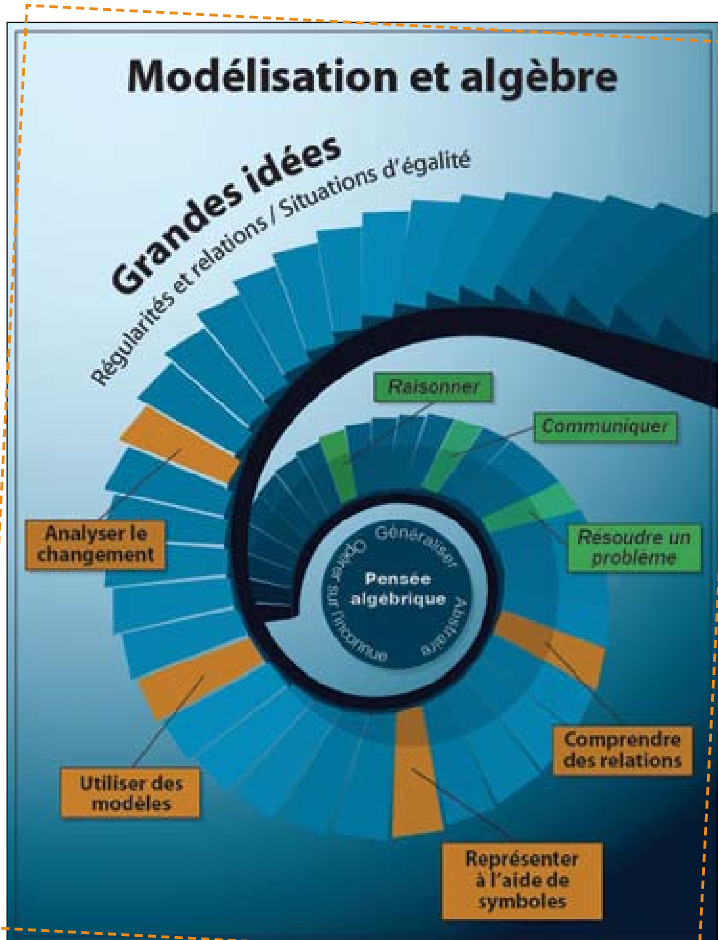
Les élèves vivent dans un monde en changement. Comprendre que le changement fait partie de la vie et que la majorité des choses changent avec le temps (p. ex., chaque année pendant la période de croissance, la taille croît, le poids augmente, les pieds allongent) est une dernière composante du développement de la pensée algébrique. Les changements observés peuvent être décrits de façon *qualitative* (p. ex., je suis *plus grand que* l'an dernier, mes cheveux sont *plus longs,* le seau s'est rempli d'eau *rapidement* pendant l'orage*,* il fait *plus froid que* ce matin) et de façon *quantitative* (p. ex., j'ai grandi de *2 cm cette année*, le seau d'eau s'est rempli de *50 ml en 30 minutes*, la température a chuté de *6 °C en 3 heures*). Aux cycles préparatoire et primaire, les élèves abordent les changements dans les situations d'égalité.

Pour maintenir l'égalité dans une situation donnée, les élèves doivent comprendre et démontrer comment le changement d'une variable influe sur le changement de l'autre variable. Par exemple, dans une situation d'exploration où les élèves doivent trouver toutes les combinaisons possibles de deux réglettes qui, placées bout à bout, ont la même longueur que la réglette repère, ils se rendent compte rapidement que le changement d'une réglette nécessite le changement d'une autre réglette. Lorsqu'ils comprennent cette relation, les réglettes ne sont plus changées au hasard, mais sont choisies de façon plus systématique, ce qui démontre l'émergence de la pensée algébrique. Comprendre ainsi que la plupart des choses subissent des changements, que ces changements peuvent être décrits mathématiquement et que certains d'entre eux peuvent être prédits, est une composante importante du développement de la pensée algébrique.



Concepts algébriques regroupés selon les grandes idées

Le regroupement des divers concepts algébriques selon les grandes idées constitue un facteur important dans le développement de la pensée algébrique. Les concepts algébriques que l'on retrouve dans les attentes et les contenus du programme-cadre sont traités dans la section intitulée *Grandes idées en modélisation et algèbre* (p. 27). Les concepts reliés à la grande idée *Situations d'égalité* sont développés de façon détaillée dans le présent fascicule alors que ceux reliés à la grande idée *Régularités et relations* sont présentés dans le fascicule 1.



Rôle de l'enseignant ou de l'enseignante dans le développement de la pensée algébrique

L'enseignant ou l'enseignante demeure le pivot de l'actualisation du développement de la pensée algébrique en salle de classe au cycle primaire. Son rôle ne se définit pas uniquement dans le choix des tâches, mais bien dans ses interventions qui visent à encourager les élèves à dépasser le raisonnement arithmétique et à accéder à un mode de pensée symbolique. Faire des mathématiques prend ainsi tout son sens.

Certains auteurs (p. ex., Blanton et Kaput, 2003, p. 70-77) croient que l'enseignant ou l'enseignante doit se munir « d'yeux et d'oreilles algébriques » afin d'identifier et de maximiser dans les activités mathématiques les liens avec les concepts algébriques et de saisir des occasions pour développer la pensée algébrique des élèves. Pour ce faire, il ou elle peut :

Développer et renforcer une littératie des symboles : L'enseignant ou l'enseignante doit initier et soutenir les élèves dans le développement d'une littératie des symboles. Trop souvent, l'application de plusieurs des symboles mathématiques se fait par automatisme, ces symboles étant perçus par certains élèves simplement comme une commande d'exécution d'une opération mathématique. Ces élèves éprouvent alors des difficultés à résoudre un problème correctement et à expliquer ce que représente la phrase mathématique qu'ils ont écrite, faute de compréhension des symboles qui la composent. Le travail de l'enseignant ou de l'enseignante consiste à mettre en place les stratégies qui permettent aux élèves :

- de lire les symboles et de réfléchir à ce qu'ils représentent avant d'agir;
- de comprendre la juste signification des symboles mathématiques (p. ex., le signe = représente une relation entre les expressions numériques de chaque côté du signe et n'est pas précurseur de la réponse);
- de reconnaître et d'utiliser les symboles comme outils de communication pour interpréter une phrase mathématique et pour exprimer son raisonnement.

Poser des questions : L'enseignant ou l'enseignante doit mettre l'accent sur la compréhension des concepts mathématiques et algébriques. L'important est de développer l'habileté à raisonner, à résoudre une situation-problème, à généraliser et non uniquement l'habileté à exécuter des opérations. Les élèves seront davantage motivés à s'engager s'ils peuvent s'identifier à la situation-problème. L'enseignant ou l'enseignante utilise un problème existant et lui donne par un questionnement approprié une perspective algébrique, ce qui favorise la recherche de relations, de régularités et de généralisations.

Exemples de questions à poser lors de l'exploration de situations-problèmes ou lors d'un échange mathématique :

– « Quelle est l'inconnue dans cette situation? »

– « Quelles sont les quantités qui changent? »

– « Quelles relations y a-t-il entre les quantités inconnues dans cette situation? »

– « Si une quantité représentée par la variable *n* augmente, qu'arrive-t-il à l'autre variable *a*? »

– « Comment peut-on représenter cette relation avec des mots, des objets, des dessins, des symboles? »

– « Est-ce que cette situation est possible avec d'autres nombres, d'autres opérations? »

– « Comment peut-on vérifier l'égalité? Trouve deux façons différentes. »

– « En observant les nombres sans calculer, peut-on déterminer la valeur de l'inconnue? Explique ta réponse. »

– « Comment sait-on que l'égalité est vraie? »

– « Peut-on appliquer cette conjecture à d'autres nombres? »

Créer un milieu d'apprentissage « algébrique » : Un milieu d'apprentissage « algébrique », c'est un environnement où l'on mise sur le développement de la pensée analytique. L'enseignant ou l'enseignante cerne de façon consciente des moments où le raisonnement fait partie intégrante de son enseignement. Argumenter, abstraire et généraliser devient pratique courante lors des leçons quotidiennes en mathématiques et même dans les autres matières, et non un enrichissement occasionnel.

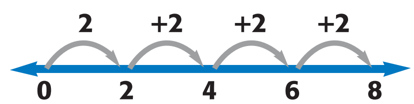
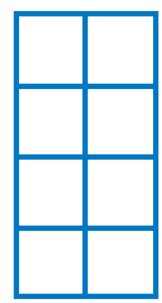
Créer un milieu d'apprentissage « algébrique », c'est donner la chance aux élèves de découvrir le monde qui les entoure avec des yeux et des oreilles « algébriques », c'est-à-dire d'être capables de généraliser de façon explicite.

Recourir à divers types de représentations : Puisque les élèves seront appelés à mathématiser des situations de plus en plus complexes, l'enseignant ou l'enseignante doit utiliser divers types de représentations pour faciliter le passage du concret à l'abstrait. Les représentations appliquées à plusieurs contextes favorisent l'analyse et initient les élèves à un niveau d'abstraction qui prépare à la formulation de conjectures et de généralisations. Le dialogue, l'échange mathématique sur les données du problème représentées différemment ainsi que les questions de l'enseignant ou de l'enseignante suscitent la réflexion chez les élèves.

Mathématiser

Habileté à traduire sa compréhension d'un concept, d'une situation par un modèle mathématique. Mathématiser c'est symboliser, représenter, formuler, illustrer.

Dans une démarche d'appropriation de concept, les premières représentations des élèves sont concrètes; ils modèlent les situations par des actions. Par la suite, les élèves peuvent utiliser du matériel concret ou des illustrations pour modeler les situations. Une dernière étape est l'utilisation d'un modèle plus abstrait, plus mathématique qui devient un outil pour les aider à penser. Fosnot et Dolk (2001, p. 79-81) décrivent ainsi le cheminement **de l'utilisation de représentations**.

Représentation d'une situation avec des gestes	Représentation d'une situation avec des cubes ou des dessins	Représentation d'une situation avec des symboles
Les élèves : • distribuent les biscuits un par un aux autres élèves; • répètent le même geste jusqu'à épuisement des biscuits; • évaluent ensuite si chaque élève a la même quantité.	Les élèves : • utilisent des cubes emboîtables ou des dessins d'assiettes et de biscuits pour représenter la situation-problème; • évaluent ensuite si chaque élève a la même quantité.	Les élèves : • mathématisent la situation en utilisant des symboles et des modèles pour résoudre la situation-problème; *Exemple 1*  **2 pour Annie** **+ 2 pour Maria** **+ 2 pour Jessie** **+ 2 pour moi** *Exemple 2*  **4 personnes ont chacune 2 biscuits** **$4 \times 2 = 8$** • évaluent ensuite si chaque élève a la même quantité.

GRANDES IDÉES EN MODÉLISATION ET ALGÈBRE

L'un des thèmes les plus importants des mathématiques est l'étude des régularités et des relations. Cette activité exige que les élèves reconnaissent, décrivent et généralisent des régularités dans des phénomènes du monde réel et qu'ils ou elles construisent des modèles mathématiques qui leur permettent de prévoir l'évolution de ces phénomènes. L'exploration des régularités aide les élèves à renforcer leurs compétences en mathématiques et leur permet d'en apprécier les qualités esthétiques.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 10)

Aperçu

Afin d'aider l'enseignant ou l'enseignante à définir et à prioriser les concepts clés et à mettre en œuvre des stratégies qui offrent un enseignement efficace et cohérent, deux grandes idées sont présentées, explorées et développées en modélisation et algèbre. Tout en étant interreliées, ces deux grandes idées revêtent chacune une importance particulière. Elles permettent aux élèves d'explorer les relations dans les suites et de comprendre les relations dans les situations d'égalité.

Grande idée 1 : Régularités et relations (fascicule 1)

L'exploration des régularités permet de comprendre les relations qui existent entre divers objets et les nombres ainsi qu'entre les nombres eux-mêmes.

Énoncé 1

L'exploration des suites *non numériques* permet de reconnaître et de justifier la régularité et les relations qui existent entre les termes qui les composent.

Énoncé 2

L'exploration des suites *numériques* permet de reconnaître et de justifier la régularité et les relations qui existent entre les termes qui les composent.

Grande idée 2 : Situations d'égalité (fascicule 2)

Le concept d'égalité est essentiel pour établir des relations représentées par des objets, des nombres ou des symboles.

Énoncé 1

Le changement d'une représentation concrète ou semi-concrète à une représentation symbolique et vice versa permet de comprendre les relations d'égalité.

Énoncé 2

Les symboles permettent de représenter les relations qui existent entre des ensembles de nombres.

GRANDE IDÉE 2 : SITUATIONS D'ÉGALITÉ

Le processus de généralisation est au cœur du développement de la pensée algébrique. La généralisation et les autres processus fondamentaux sont nécessaires pour élargir les expériences des élèves au-delà des opérations arithmétiques et ainsi leur permettre d'accéder à un niveau d'abstraction qui sera de plus en plus important au cours de leur apprentissage.

(Blanton et Kaput, 2000, traduction libre)

Aperçu

Avant leur arrivée à l'école, les jeunes enfants ont, dans leurs jeux et dans leur quotidien, eu recours à des expressions faisant appel au concept d'égalité (p. ex., il a *plus, moins* ou le *même nombre* de jouets *que* moi). À l'école, ils font l'apprentissage des nombres et leur associent des quantités. Il est primordial que les élèves explorent et représentent des relations d'égalité de diverses façons avant de les exprimer symboliquement par une phrase mathématique. Une phrase telle que **3 + 4 = 7** perd tout son sens lorsque l'accent est d'abord mis sur les symboles utilisés. Avant d'exécuter des calculs, les élèves doivent explorer les nombres à l'aide de modèles pour appuyer leur raisonnement. Le sens du symbole s'acquiert par l'utilisation de diverses représentations de relations d'égalité et d'inégalité. Le questionnement de l'enseignant ou de l'enseignante, conjugué à la manipulation des symboles et des nombres selon différentes stratégies, permettra aux élèves de proposer des conjectures et par la suite, de généraliser.

Énoncé 1

Le changement d’une représentation concrète ou semi-concrète à une représentation symbolique et vice versa permet de comprendre les relations d’égalité.

L’égalité, un concept algébrique difficile à comprendre, doit être abordée dès les premières années d’études.

(National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 94, traduction libre)

En modélisation et algèbre, les élèves doivent s’approprier le concept d’égalité en même temps que les concepts d’équivalence et d’inégalité afin de bien comprendre l’égalité en tant que relation entre deux quantités.

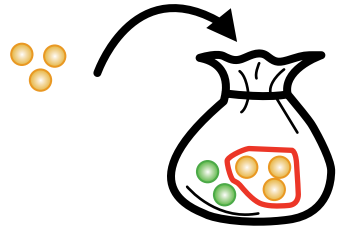
Les élèves doivent d’abord explorer ces trois concepts avec du matériel concret. Dès leur entrée à l’école, les élèves peuvent déjà comparer des quantités et ainsi reconnaître des situations d’équivalence (p. ex., *plus que*, *moins que*, *autant que*, *est égal à*, *n’est pas égal à*). Pour des activités connexes, voir le *Guide d’enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2006a, p. 17-21).

Lorsque les élèves explorent par la suite l’addition et la soustraction avec du matériel concret, ils doivent expliquer le sens de leur choix, qu’il s’agisse d’une situation de *réunion,* d’*ajout* ou de *retrait*.

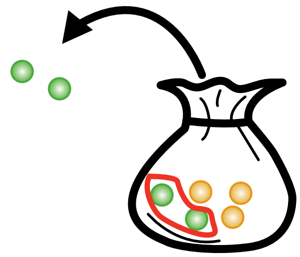
Exemples

Situation de réunion : l’élève réunit le contenu de deux sacs de billes.

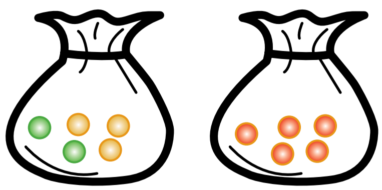
Situation d'ajout : l'élève a des billes dans un sac et en ajoute d'autres dans le sac.



Situation de retrait : l'élève a des billes dans un sac et retire des billes du sac.



Situation de comparaison : l'élève compare le nombre de billes dans son sac avec le nombre de billes dans un autre sac.



Devant une situation d'égalité représentée par des symboles, l'enseignant ou l'enseignante doit amener les élèves à reconnaître la relation qui existe entre les deux expressions numériques de chaque côté du signe =. Par exemple, dans la phrase mathématique **18 = 6 × 3**, le **18** et le **6 × 3** constituent deux représentations du nombre 18 et le signe = est le symbole qui démontre la relation d'égalité entre ces représentations. Bien comprendre cette relation permettra par la suite aux élèves de manipuler plus efficacement les nombres, l'inconnue ou les variables qui figurent dans une équation.

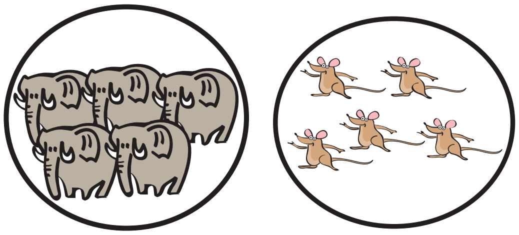
Vocabulaire lié aux situations d’égalité

Le tableau suivant résume les principaux termes liés aux situations d’égalité et des exemples les illustrent.

<table>
<tr><th>Termes</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td> Relation
Énoncé mathématique qui décrit un lien entre divers objets ou variables[2]. Note : Une relation peut être décrite par une équation, un graphique, un tableau ou un diagramme. </td><td> Quelle est la relation entre le coût et le nombre de biscuits? <table><tr><th>Nombre de biscuits</th><th>Coût (¢)</th></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td></tr><tr><td>4</td><td>20</td></tr><tr><td>5</td><td>25</td></tr></table> Le coût en cents est égal au nombre de biscuits multiplié par 5. </td></tr>
<tr><td> Situation d’égalité
Relation entre deux représentations d’un même objet mathématique[3]. Note : Un objet mathématique peut être concret ou abstrait. Le signe = (est égal à) est le symbole, en langage formel, de la relation d’égalité entre les quantités qui figurent de chaque côté du signe. </td><td> Combien as-tu d’animaux? Les animaux sont l’objet mathématique dans cette situation. Description verbale : J’ai 6 animaux de la ferme, 6 animaux de l’étang et 7 animaux de la jungle. Le nombre total d’animaux est égal à 19 parce que les 6 animaux de la ferme, les 6 animaux de l’étang et les 7 animaux de la jungle forment un ensemble de 19 animaux. Description symbolique : La quantité est l’objet mathématique représenté sous deux formes 6 + 6 + 7 et 19. La relation d’égalité est représentée par la phrase mathématique 6 + 6 + 7 = 19. </td></tr>
</table>

2. Ontario, Ministère de l’Éducation, 2005b, *Le curriculum de l’Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques*, Révisé, Toronto, le Ministère, p. 99.

3. Denis de Champlain, Pierre Mathieu et Hélène Tessier, 1999, *Petit lexique mathématique*, Mont-Royal (QC), Modulo Éditeur, p. 97.

Termes	Exemples
Situation d'équivalence Relation qui résulte d'un classement effectué selon un **critère commun** : la quantité. 	Est-ce que les deux ensembles « 5 souris » et « 5 éléphants » sont équivalents? Oui, les deux ensembles sont équivalents, car ils contiennent la même **quantité** d'animaux. Le critère commun qui est la quantité sert à comparer ces deux ensembles. *Note* : Une situation d'équivalence se différencie d'une situation d'égalité lorsqu'on compare des quantités à l'aide de matériel concret (**5 = 5**, la **quantité** de 5 souris est équivalente à la **quantité** de 5 éléphants). Les deux situations ont la même représentation symbolique dans le *langage formel* des mathématiques.
Situation d'inégalité Expression mathématique dans laquelle on compare deux quantités inégales[4]. L'inégalité se traduit par des signes tels que : • « > » qui signifie *plus grand que*; • « < » qui signifie *plus petit que*; • « ≠ » qui signifie *n'est pas égal à*.	 *plus grand que* : **8 > 7**; **5 + 3 > 4 + 3** *plus petit que* : **7 < 8**; **23 – 5 < 20 – 1** *n'est pas égal à* : **7 ≠ 8**; **7 – 5 ≠ 2 + 1**
Expression numérique Expression qui ne contient que des nombres liés entre eux par des opérations. Tous les nombres sont, par définition, des expressions numériques[5].	**3 + 9 – 2** **5 × 4** **10**
Phrase mathématique Expression symbolique qui représente une relation. Une phrase mathématique peut être vraie ou fausse.	Phrase vraie : **7 + 5 = 10 + 2** Phrase fausse : **7 + 5 = 8 + 6** Les phrases mathématiques peuvent représenter une **situation d'égalité** ou **d'équivalence**. **3 × 2 = 3 + 3** **2 – 1 = 1 + 0** **8 = 5 + 3** Les phrases mathématiques peuvent aussi représenter une **situation d'inégalité**. **33 + 40 ≠ 70 + 0** **9 + 1 > 8** **1 × 100 < 2 × 100**

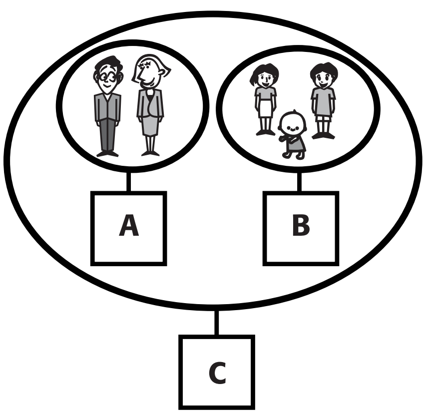
4. *Le nouveau petit Robert*, 2006, Paris, Dictionnaires Le Robert, p. 1353.

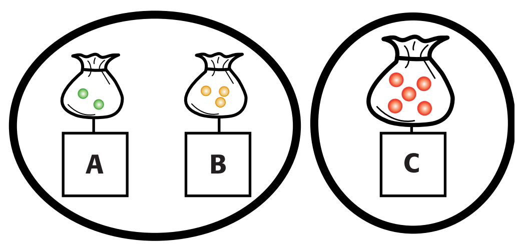
5. Denis de Champlain, Pierre Mathieu, Paul Patenaude et Hélène Tessier, 1996, *Lexique mathématique enseignement secondaire*, Beauport (QC), Les Éditions du Triangle d'Or, p. E 63.

Termes	Exemples
Équation Phrase mathématique dans laquelle on retrouve une inconnue ou des variables ainsi que le signe =.	**20 + 44 = ___ + 20** **___ = 3 + 5** **○ + □ = 5** ***a* + *b* = 10**

Relations d'égalité

Une relation d'égalité représentée symboliquement peut être une situation d'égalité ou une situation d'équivalence; cela dépendra essentiellement de l'explication et de la représentation qu'on en fait. Prenons les deux situations décrites dans le tableau suivant à titre d'exemples.

<table>
<tr><th>Situation d'égalité</th><th>Situation d'équivalence</th></tr>
<tr>
<td>
Une famille est composée de 2 parents (ensemble A) et de 3 enfants (ensemble B). Elle compte donc cinq personnes en tout (ensemble C).


Symboliquement, cette situation serait représentée par la phrase mathématique
2 + 3 = 5, soit A + B = C.
Il s'agit d'une situation d'égalité puisque le nombre 5 (ensemble C) représente la réunion des ensembles A et B. Nous avons donc le même nombre d'éléments, avant et après la réunion. Ce sont les mêmes personnes qui sont regroupées dans un ensemble et les ensembles de départ ne sont plus visibles.
Ainsi, le contexte est un contexte d'inclusion : il s'agit des mêmes éléments.
</td>
<td>
Jean a deux sacs de billes; un contient 2 billes vertes (ensemble A) et l'autre, 3 billes jaunes (ensemble B). En comparant la quantité de ses billes à celle de Thierry (ensemble C), Jean découvre qu'il en possède le même nombre, soit 5 billes.


Symboliquement, cette situation serait également représentée par la phrase mathématique
2 + 3 = 5, soit A + B = C.
Il s'agit d'une situation d'équivalence puisque la quantité est la même, mais les billes sont différentes. En fait, les billes dans le sac de Thierry et les billes dans les sacs de Jean forment des ensembles distincts.
Ainsi, le contexte est un contexte de comparaison de la quantité (billes de chaque garçon); il ne s'agit pas des mêmes éléments.
</td>
</tr>
</table>

Situation d'égalité	Situation d'équivalence
Les élèves constatent que de chaque côté du signe =, les quantités sont égales puisqu'elles représentent les mêmes éléments, soit les 5 personnes. En d'autres termes, les 5 personnes dans l'ensemble C sont les mêmes personnes que celles dans les ensembles A et B. Dans le domaine Numération et sens du nombre, les problèmes de réunion et d'ajout représentés à l'aide de matériel peuvent être travaillés en algèbre comme des problèmes d'égalité. Pour des exemples de problèmes de réunion et d'ajout, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 9).	Les élèves constatent ici que la *quantité* de billes est la même, la quantité étant le critère de comparaison utilisé pour vérifier l'équivalence. Les 2 billes vertes et les 3 billes jaunes (A + B) représentent une quantité égale aux 5 autres billes dans le sac de Thierry (C). Dans le domaine Numération et sens du nombre, les problèmes de comparaison représentés à l'aide de matériel concret peuvent être travaillés en algèbre comme des problèmes d'équivalence. Pour des exemples de problèmes de comparaison, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 10).

En ce qui concerne le langage mathématique formel, les deux situations (la situation d'égalité et la situation d'équivalence), lorsqu'elles sont écrites de façon symbolique (**2 + 3 = 5**), deviennent toutes les deux des relations d'égalité puisqu'elles sont représentées par les mêmes nombres dans une phrase mathématique.

> *Même si les représentations sous forme de comparaison sont en principe plus faciles à relier à une écriture mathématique, les phrases mathématiques représentées la plupart du temps en enseignement sont des situations d'inclusion qui sont plus abstraites. L'enfant doit reconnaître qu'après avoir réuni les ensembles A et B en un ensemble C, ce dernier est égal aux deux ensembles de départ alors qu'il ne les a plus sous les yeux.*
>
> (Theis, 2005, p. 132, adaptation)

Il est primordial pour l'enseignant ou l'enseignante de cerner la différence entre une situation d'égalité et une situation d'équivalence afin d'intervenir adéquatement auprès des élèves. Ce faisant, les élèves comprennent mieux les problèmes d'ajout, de réunion et de comparaison. Plus tard, ils comprendront davantage que les symboles représentent des situations concrètes et seront en mesure de donner un sens aux symboles qu'ils écrivent dans une situation d'égalité.

Pour assurer la compréhension des situations d'égalité et d'équivalence, l'enseignant ou l'enseignante doit favoriser chez les élèves le transfert de représentations concrètes vers des représentations symboliques. Ce transfert se fait à travers de nombreuses activités qui requièrent du temps et qui doivent être bien dirigées.

Exemple d'une situation d'égalité (réunion)

1. Élève :
« Les 6 animaux de la ferme, les 6 animaux de l'étang et les 7 animaux de la jungle égalent ensemble 19 animaux. »

2. Enseignant :
« Écris et explique la phrase mathématique qui représente l'égalité. »

3. Élève :
« $6 + 6 + 7 = 19$;
6 plus 6 plus 7, **c'est égal à** 19, parce que les 6 animaux de la ferme, les 6 animaux de l'étang et les 7 animaux de la jungle égalent ensemble 19 animaux. »

4. Enseignant :
« Que représente le 19 de ta phrase mathématique? »

« Représente-t-il d'autres animaux que les 6 animaux de la ferme, les 6 animaux de l'étang et les 7 animaux de la jungle? »

Exemple d'une situation d'équivalence (comparaison)

1. Enseignante :
« Compare la quantité d'objets contenus dans les deux assiettes. »

2. Élève :
« La quantité est la même dans les deux assiettes, soit 10 objets. »

3. Enseignante :
« Écris et explique la phrase mathématique qui représente cette comparaison. »

4. Élève :
« $4+2+1+3=2+2+2+4$
4 loupes plus 2 toupies plus 1 casse-tête plus 3 lézards, **c'est égal à** 2 casse-tête plus 2 jeux de cartes plus 2 lézards plus 4 loupes, parce qu'il y a la même quantité d'objets (10) dans les deux assiettes. »

5. Enseignante :
« C'est le critère de la quantité qui est utilisé pour comparer les deux ensembles d'objets. »

Lorsqu'il ou elle explique la phrase mathématique dans les deux situations, l'élève dit « est égal à » parce que les expressions de chaque côté du signe = représentent un nombre égal d'éléments. Puisque les deux situations (celle d'égalité et celle d'équivalence) sont écrites symboliquement, l'élève dit « est égal à » dans les deux cas.

Le terme *non-équivalence* est seulement utilisé lorsqu'on parle d'une inégalité démontrée à l'aide de matériel concret.

Le signe = représente la relation entre les expressions et non le symbole qui précède systématiquement la réponse à une opération.

Dans le but d'approfondir le raisonnement algébrique des élèves, les situations d'égalité et d'équivalence doivent être expérimentées parallèlement aux situations d'inégalité ou de non-équivalence.

Exemple

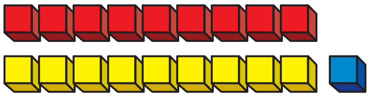
1. Déterminer une situation d'inégalité :

- **0 + 9 ≠ 9 + 1** (*n'est pas égal à* ou *est non équivalent à*).

2. Décrire oralement cette situation :

- zéro plus neuf est plus petit que neuf plus un;
- neuf plus un est plus grand que zéro plus neuf.

3. Démontrer la non-équivalence avec du matériel concret :



4. Représenter symboliquement la situation :

- **0 + 9 < 9 + 1** (*est plus petit que*);
- **9 + 1 > 0 + 9** (*est plus grand que*).

5. Rétablir l'équivalence :

- voir *Habileté à rétablir une situation d'égalité* (p. 44-47).

Sens du symbole de l'égalité

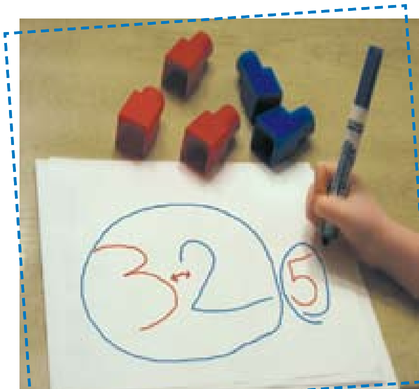
Le symbole de l'égalité est un signe universellement connu, mais souvent mal interprété par de nombreux élèves qui perçoivent le signe = comme le symbole qui précède toujours, dans les phrases mathématiques, la réponse à un calcul de gauche à droite.

Lorsque par la suite ils explorent la représentation symbolique d'une situation d'égalité ou d'équivalence, par exemple l'équation **4 + 3 = □ + 2**, les élèves croient que le nombre **7** doit être inséré dans la case de l'inconnue, puisqu'il représente la réponse à l'opération **4 + 3**, figurant à gauche du signe =. Lorsqu'on leur demande de traiter le nombre **2**, ils l'ajoutent au **7**, comme si la phrase mathématique se poursuivait simplement de gauche à droite : **4 + 3 = 7 + 2**. Ils ne perçoivent pas le signe = comme le symbole de la relation d'égalité ou d'équivalence entre les expressions figurant de part et d'autre de ce signe.

Cette fausse conception provient en partie du fait que les élèves sont essentiellement exposés à des situations d'égalité présentées par de simples phrases mathématiques telles que **4 + 1 = 5**. Pour remédier à cette méprise, l'enseignant ou l'enseignante peut :

Explorer ces structures dans un cadre de réunion, d'ajout ou de retrait (situation d'égalité) ou de comparaison (situation d'équivalence).

- demander aux élèves : « Est-ce que **4 + 1** représente la même quantité que **5**? »;
  Note : Ce type de questionnement favorise une meilleure compréhension des concepts de relation et d'égalité.
- permettre une étape symbolique informelle, dans laquelle les élèves créent leurs propres symboles de l'égalité et les expliquent;



« La flèche entre le 3 et le 2 signifie que je place les blocs ensemble. Les cercles signifient que les 3 blocs rouges et les 2 blocs bleus mis ensemble, c'est égal à 5 blocs en tout ».

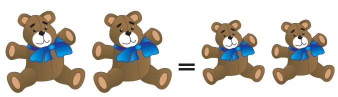
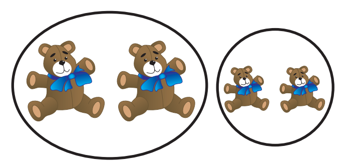
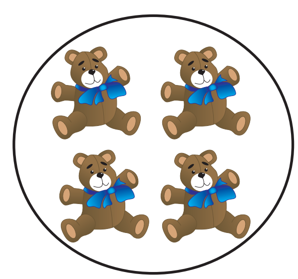
- présenter différents types de phrases mathématiques pour permettre aux élèves d'explorer le concept du signe = en tant que relation. En voici quelques-unes :

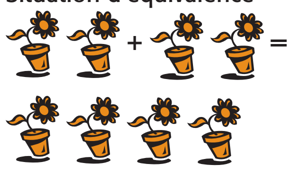
Types de phrases mathématiques	Exemples
Phrases ne présentant qu'un nombre de part et d'autre du signe =.	**5 = 5** **60 = 60**
Phrases incitant au recours à une stratégie, par exemple la stratégie *comparer des termes* (voir *Utilisation de stratégies*, p. 101-108).	**8 – 7 = 9 – 8** **26 + 34 = 27 + 33**
Phrases qui recourent à une propriété, par exemple la propriété de *commutativité* (voir *Exploration de propriétés*, p. 90-100).	**4 × 1 = 1 × 4** **33 + 27 = 27 + 33**
Phrases dont l'une des expressions numériques présente plus de deux termes.	**5 = 2 + 2 + 1** **65 = 30 + 30 + 5**
Phrases dont les opérations diffèrent de chaque côté du signe =.	**29 + 2 = 33 – 2** **6 × 2 = 24 ÷ 2**

Il sera important, plus tard, de spécifier aux élèves que le signe = est une convention établie par les mathématiciens et les mathématiciennes pour décrire une relation. En d'autres termes, les mathématiciens et les mathématiciennes ont assigné un sens à ce symbole, comme les académiciens et les académiciennes l'ont fait avec les noms communs pour désigner divers objets (p. ex., le mot *chaise*). Les élèves saisissent davantage la signification d'un mot en l'observant dans son contexte qu'en mémorisant sa définition; il en est de même pour les conventions mathématiques et le signe = .

Utiliser le signe = pour représenter une relation symboliquement.

Utilisation du signe : Le signe = (est égal à), symbole de l'égalité, est souvent employé à tort entre deux représentations qui ne sont pas égales ou équivalentes. Il faut être conscient que toute modélisation employant le signe = doit aider les élèves à maîtriser le concept d'égalité. Le tableau ci-après donne des exemples de représentations à éviter ainsi que des exemples de celles à favoriser pour développer un concept juste du symbole de l'égalité.

Représentations à éviter	Les raisons	Représentations à favoriser
 Éviter d'introduire le signe = entre deux représentations semi-concrètes qui ne représentent pas le même objet mathématique.	La *quantité* de ces deux ensembles est équivalente. Par contre, les ensembles eux-mêmes *ne sont pas identiques*; pour plus de détails, voir le concept d'invariance numérique dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année : Numération et sens du nombre* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 13).	 **est égal à** Spécifier oralement qu'il y a **autant** de grands oursons **que** de petits oursons ou que deux grands oursons **est une quantité égale à** deux petits oursons. La représentation symbolique serait **2 = 2**.
 **= 4** Éviter d'introduire le signe = entre une représentation semi-concrète et un nombre, car ces deux éléments ne représentent pas les mêmes objets mathématiques.	Il s'agit d'une situation de dénombrement. Les oursons et le nombre 4 *ne sont pas les mêmes objets mathématiques*, bien qu'ils représentent la même *quantité*. Pour cette raison, certains chercheurs disent qu'il faut éviter de recourir conjointement à des symboles et à des illustrations.	Spécifier oralement qu'il y a 4 oursons. La représentation symbolique serait  **4**

Représentations à éviter	Les raisons	Représentations à favoriser
25 + 40 = 65 + 7 = 72 Éviter de recourir au signe = à plus d'une reprise sur une même ligne lorsqu'il n'y a pas égalité entre chacune des expressions.	Cette représentation est à éviter puisque les expressions de part et d'autre du premier signe = ne sont pas en réalité égales. De plus, cette représentation alimente la conception erronée que le signe = introduit une réponse à une opération.	**25 + 40 + 7 = 72** ou **25 + 40 = 65** **65 + 7 = 72** ou **25 + 40 + 7 = 65 + 7 = 72**
Situation d'équivalence  Situation d'égalité  **= 4**	Éviter d'accoler deux types de représentations différentes, par exemple une représentation semi-concrète (fleurs) avec une représentation symbolique (signes +, =). Il est cependant possible que les élèves, d'eux-mêmes, combinent ces représentations; la transition du concret vers le symbolique peut les y mener, surtout au début du cycle primaire. Il serait bon d'inciter ces élèves à remplacer les dessins par les nombres appropriés. En fait, ils représenteront simplement la situation dans une phrase mathématique.	Dans cette situation d'équivalence, énoncer que 2 pots de fleurs et 2 autres pots de fleurs, c'est équivalent à 4 pots de fleurs différents. Dans cette situation d'égalité, énoncer que 2 pots de fleurs réunis à 2 autres pots de fleurs, c'est égal à 4 pots de fleurs en tout. La représentation symbolique, la même dans les deux situations, serait **2 + 2 = 4**.

Il est important d'encourager les élèves à exprimer, de façon explicite, leur propre compréhension du signe =. Ces échanges permettront à l'enseignant ou à l'enseignante de vérifier cette compréhension et aux élèves, d'utiliser des arguments mathématiques, une des assises de la pensée algébrique.

Habiletés liées aux situations d'égalité

Aux cycles préparatoire et primaire, les élèves doivent développer l'habileté à *reconnaître, à expliquer, à créer, à rétablir* et *à maintenir* des situations d'égalité par l'application de stratégies et de modèles spécifiques (voir les annexes A et B, p. 64-108). Ces habiletés doivent être développées à chaque année d'études en utilisant des nombres de plus en plus grands, en conformité avec les exigences du programme-cadre.

Au cycle préparatoire, les situations d'égalité, d'équivalence et d'inégalité sont essentiellement explorées oralement et à l'aide de matériel concret. C'est à partir du cycle primaire que les élèves sont graduellement exposés à la représentation symbolique; toutefois, le recours au matériel concret demeure tout aussi important et doit s'inscrire conjointement avec les représentations plus abstraites.

Une **stratégie** est un « ensemble d'opérations cognitives et d'actions que l'individu met en œuvre pour traiter une information ou une situation en vue d'atteindre un but ».

(Raynal et Rieunier, 2003, p. 347)

Habileté à reconnaître une situation d'égalité

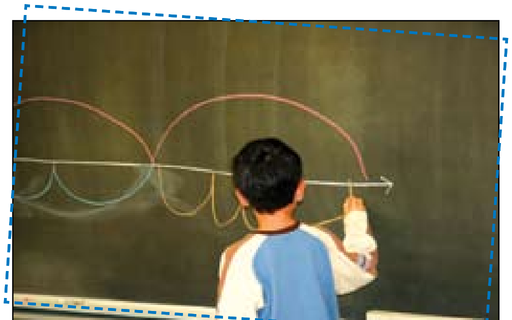
> *L'utilisation efficace du matériel concret favorise l'apprentissage des concepts algébriques quel que soit le niveau des élèves [...]. Puisque cette stratégie fait appel aux sens, entre autres au toucher, à la vue et à l'ouïe, elle leur donne l'occasion de faire la transition entre le concret, le semi-concret, le semi-abstrait et l'abstrait.*
>
> (Conseil des écoles catholiques de langue française du Centre-Est, 2003, p. 6)

Voir les différentes situations d'apprentissage (p. 110-183).

Dans une démarche de résolution de problèmes, le recours au matériel concret et semi-concret, de même qu'aux modèles, permet aux élèves de reconnaître et de représenter des situations d'égalité, d'équivalence et d'inégalité.

Exemples

Cadre à dix cases



Droite numérique ouverte double

Ce n'est d'ailleurs qu'après avoir manipulé divers modèles à plusieurs reprises dans le même but, soit reconnaître une situation d'égalité ou d'inégalité, que les élèves seront prêts à aborder la représentation purement symbolique (la phrase mathématique) de cette situation.

Par ailleurs, pour déterminer la nature de la relation entre les quantités, les élèves doivent comprendre que les éléments qui figurent de chaque côté du signe = sont des données à analyser et non pas seulement des expressions à calculer.

Exemple 1

Explorer la propriété de commutativité permet aux élèves de constater l'égalité de la phrase mathématique **43 + 24 = 24 + 43**. Par ses interventions, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à observer que les mêmes nombres se retrouvent de chaque côté du symbole de l'égalité et que les termes de l'addition sont simplement intervertis.

Exemple 2

La stratégie *annuler des termes ou des expressions égales* permet aux élèves de constater l'égalité d'une phrase mathématique. Annuler des termes consiste à rayer les termes identiques qui figurent de chaque côté du signe =. Le fait de rayer ou d'annuler les termes qui se retrouvent de chaque côté du signe = permet d'établir plus facilement des relations entre les termes qui restent et aide les élèves à développer leur raisonnement algébrique. Par exemple :

$$\cancel{3} + \cancel{4} + ☆ = \cancel{3} + \cancel{4} + 7, \text{ donc } ☆ = 7$$

Cette stratégie est très utile lorsque, au cycle intermédiaire, les égalités deviennent plus abstraites. Par exemple :

$$\cancel{2a} + \cancel{3b} + c = \cancel{2a} + \cancel{2b} + \cancel{b} + 7, \text{ donc } c = 7$$

Cette stratégie permet également aux élèves d'identifier et de justifier une inégalité. Par exemple :

Pour d'autres exemples, voir l'annexe B (p. 87-108).

$$9 + \cancel{4} \neq \cancel{4} + 8$$

1 de plus

Habileté à expliquer une situation d'égalité

> *Les élèves ont besoin de discuter de ce qui est égal/inégal, pareil/différent, plus que/moins que, en équilibre/en déséquilibre. C'est par le dialogue authentique que les élèves construisent la signification du concept d'égalité.*
>
> (Taylor-Cox, 2003, p. 17, traduction libre)

Pour développer leur habileté à expliquer une situation d'égalité, les élèves doivent vivre différentes étapes. Le transfert du concret vers la représentation symbolique s'effectue plus aisément lorsque la relation d'égalité se construit en suivant ces différentes étapes.

1. Explorer à l'aide de matériel concret ou semi-concret

Avec des jouets, un ou une élève démontre la situation suivante : l'ajout de 0 jouet à 10 jouets.

2. Décrire à l'aide de mots et de matériel

« Si j'ajoute 0 jouet à 10 jouets, la quantité ne changera pas puisque je n'ajoute rien.

Elle sera encore égale à 10 jouets. »

3. Représenter à l'aide de symboles

L'élève pourra alors exprimer symboliquement cette égalité en écrivant la phrase mathématique 10 + 0 = 10.

4. Proposer une conjecture

En explorant plusieurs situations semblables, l'élève peut supposer qu'un ajout de 0 ne modifie jamais la quantité.

5. Généraliser pour tous les nombres

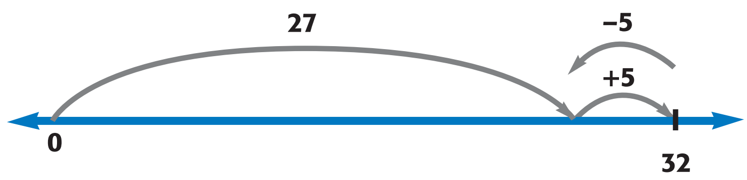
Des questions adéquates lors d'autres situations similaires amènent l'élève à généraliser que l'ajout de 0 à toute quantité ne change pas la quantité.

$\square + \mathbf{0} = \square$

Les élèves développent aussi leur habileté à expliquer une situation d'égalité en ayant recours à des modèles. En effet, l'utilisation de modèles permet aux élèves de communiquer efficacement leur raisonnement.

Exemple

Pour expliquer l'expression **27 + 5 – 5 = 27**, les élèves peuvent utiliser une droite numérique ouverte pour appuyer leur raisonnement : « J'effectue un bond de 27 et j'ajoute un bond de 5. Je refais un bond de 5 dans l'autre direction; je reviens donc à 27. C'est comme si je n'avais jamais ajouté un bond de 5. »

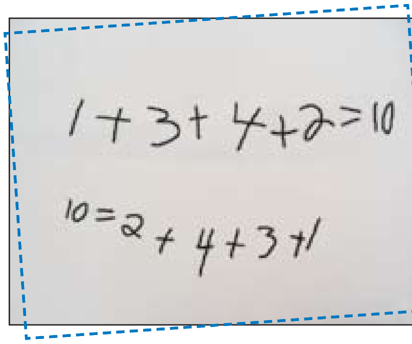


Habileté à créer une situation d'égalité

Pour amener les élèves à créer une situation d'égalité, il est important, au début, de leur présenter une situation d'égalité représentée à l'aide de matériel concret. Leur demander de la représenter à l'aide d'une phrase mathématique, de comparer les différentes phrases proposées par les élèves et de déterminer si elles sont toutes vraies (voir *Situation d'apprentissage*, *1re année*, p. 129-151).

Exemple

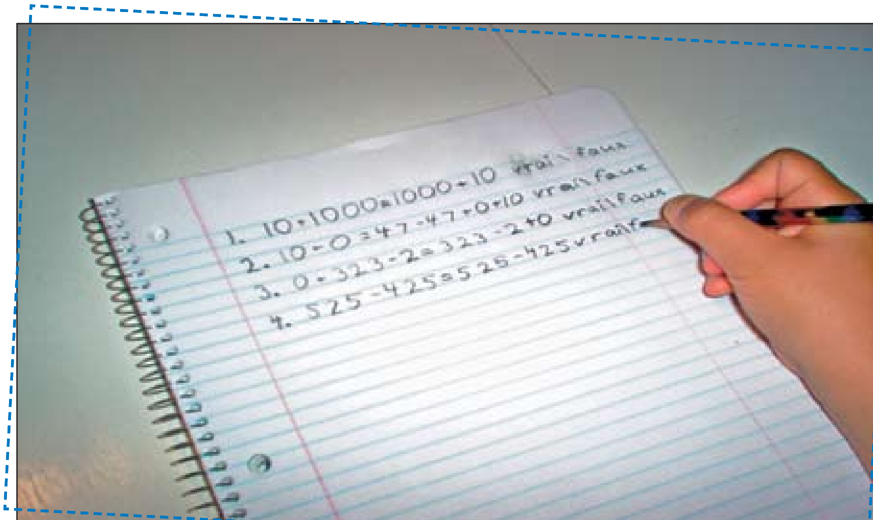
Situation d'égalité représentée avec du matériel concret



Phrases mathématiques pour représenter cette situation d'égalité

Par la suite, les élèves peuvent créer leur propre situation d'égalité. L'enseignant ou l'enseignante leur propose d'écrire des phrases mathématiques, de les représenter avec du matériel concret et d'indiquer s'il s'agit d'une situation d'égalité ou d'une situation d'équivalence.

Les élèves doivent avoir l'occasion de créer des situations d'égalité représentées par des phrases mathématiques composées de grands nombres afin qu'ils utilisent les propriétés des opérations ou des stratégies au lieu de calculer (voir *Annexe B – Activités liées aux situations d'égalité en algèbre et en numération*, p. 87-108).



Habileté à rétablir une situation d'égalité

> *Plusieurs situations authentiques mettent l'accent sur l'inégalité. Nous le savons, les enfants déclarent souvent : « Elle en a plus que moi! J'en ai pas assez, ce n'est pas juste! » Au lieu de s'attarder seulement aux implications sociales de leurs commentaires, envisageons avec eux, cette réalité d'un point de vue mathématique en demandant combien serait nécessaire pour que les quantités soient pareilles ou que la situation soit juste. En concrétisant ainsi le concept d'égalité, nous intégrons la pensée algébrique dans le quotidien de l'enfant.*
>
> (Taylor-Cox, 2003, p. 19, traduction libre)

Pour développer le raisonnement algébrique, il est aussi important, pour les élèves, d'explorer des situations d'inégalité. Ces situations requièrent le recours à des stratégies qui visent à rétablir l'égalité (la rendre vraie) et exigent un niveau de pensée plus élevé (analyse). Rétablir l'égalité d'une situation s'effectue d'abord à l'aide de matériel concret, puis à l'aide de symboles.

Important…

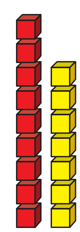
Lorsque les élèves utilisent du matériel concret pour rétablir une situation d'égalité, ils comparent des quantités, donc ils explorent des situations d'équivalence. Ils rétablissent l'égalité entre les quantités.

1. Rétablir une situation d'égalité à l'aide de matériel concret : Les exemples suivants démontrent l'usage de divers types de matériel concret pour rétablir une situation d'égalité. Il est important de toujours présenter les situations dans un contexte signifiant.

Exemple 1

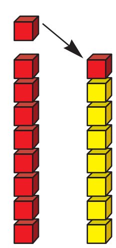
Demander aux élèves d'ériger avec des cubes emboîtables deux tours de couleur et de hauteur différentes et leur demander de décrire l'inégalité. Par exemple :

– « Les tours ne sont pas égales parce que la **tour rouge** est plus grande que la **tour jaune**. Elle compte deux cubes de plus que la tour jaune. La quantité 9 cubes est plus grande que la quantité 7 cubes **($9 > 7$)**, il y a donc inégalité **($9 \neq 7$)**. »



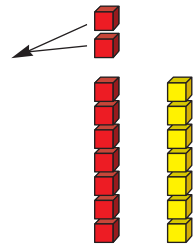
Leur demander ensuite de décrire ce qu'ils peuvent faire pour rétablir l'égalité. Par exemple :

– « Pour rétablir l'égalité, je peux transférer un cube de la tour rouge vers la tour jaune afin qu'elles atteignent la même hauteur. »



Par la suite, les élèves peuvent plus aisément représenter cette situation (rétablir l'égalité) symboliquement : **$9 - 1 = 7 + 1$**.

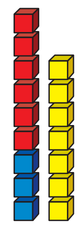
« Pour rétablir l'égalité, je peux également retirer deux cubes de la tour rouge afin qu'elle soit égale à la tour jaune. »



Les élèves peuvent aussi représenter cette situation symboliquement : **9 −2 = 7**.

Exemple 2

Présenter deux tours comme celles illustrées ci-contre et demander aux élèves d'expliquer l'inégalité représentée à savoir que **3 + 6 ≠ 7**.



– « La **tour rouge et bleue** compte deux cubes de plus que la **tour jaune**. Puisque la quantité 3 + 6 cubes est plus grande que la quantité 7 cubes **(3 + 6 > 7)**, il y a donc inégalité. »

Les élèves peuvent rétablir la situation d'égalité en utilisant les mêmes stratégies que dans l'exemple précédent, puis la représenter symboliquement par des phrases mathématiques. Par exemple :

– « J'enlève un cube rouge de la première tour et le place sur la deuxième **(6 – 1 + 3 = 7 + 1)**. »

– « J'enlève un cube bleu de la première tour et le place sur la deuxième **(6 + 3 – 1 = 7 + 1)**. »

– « J'enlève deux cubes rouges de la première tour **(6 – 2 + 3 = 7)**. »

– « J'enlève deux cubes bleus de la première tour **(6 + 3 – 2 = 7)**. »

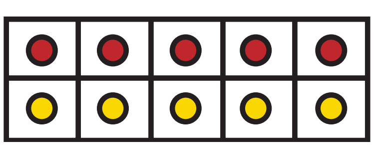
– « J'enlève un cube bleu et un cube rouge de la première tour **(6 – 1 + 3 – 1 = 7)**. »

Exemple 3

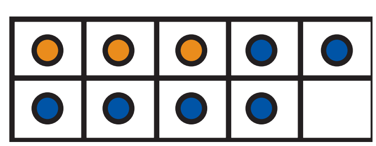
En se servant d'un cadre à dix cases, les élèves doivent reconnaître et expliquer l'inégalité avant de chercher à la rétablir. Présenter aux élèves le problème suivant : « Un jardinier plante des bulbes de tulipes dans deux plates-bandes. Dans la première, il plante 5 bulbes de tulipes rouges et 5 bulbes de tulipes jaunes. Dans l'autre, il plante 3 bulbes de tulipes orange et 6 bulbes de tulipes bleues. »

Représenter d'abord **5 + 5** dans un cadre à dix cases, puis **3 + 6** dans un autre cadre à dix cases. Attirer l'attention des élèves sur l'inégalité (**5 + 5 ≠ 3 + 6**), puis sur la nature de la relation d'inégalité entre les deux cadres (**5 + 5 > 3 + 6**).

5 + 5



3 + 6



Demander aux élèves de démontrer ce que le jardinier pourrait faire s'il voulait avoir une quantité égale de tulipes dans chaque plate-bande.

Stratégie 1 : Les élèves rétablissent l'égalité en enlevant un jeton dans le cadre qui en a le plus. Ils disent, par exemple : « Il pourrait enlever 1 bulbe de tulipe rouge de la plate-bande contenant 10 bulbes de tulipes. »

5 – 1 + 5 = 3 + 6

Stratégie 2 : Les élèves rétablissent l'égalité en ajoutant un jeton au cadre qui en a le moins. Ils disent, par exemple : « Il pourrait ajouter 1 bulbe de tulipe bleue dans la plate-bande contenant 9 bulbes de tulipes. »

5 + 5 = 3 + 6 + 1

Une fois l'égalité rétablie, ils constateront que même s'il n'y a pas la même quantité de chaque couleur de jetons, les deux cadres à dix cases contiennent, en fin de compte, la même quantité de jetons, d'où l'égalité. Par ailleurs, la phrase mathématique leur permettra de confirmer l'égalité des deux expressions numériques.

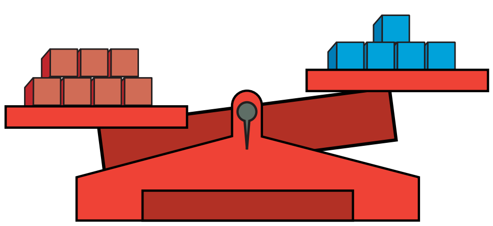
Exemple 4

La balance à plateaux est un autre modèle avec lequel les élèves peuvent rétablir l'égalité concrètement, le but étant d'obtenir l'équilibre des plateaux.

Plusieurs situations sont explorées avec la balance à plateaux dans les guides pédagogiques de 1re à 3e année, *Les mathématiques… un peu, beaucoup, à la folie!, Modélisation et algèbre* (Conseil des écoles catholiques de langue française du Centre-Est et coll., 2003).

Les élèves constatent d'abord l'inégalité. Par exemple :

– « Il y a 7 cubes sur un des plateaux alors qu'il y en a 5 sur l'autre. Le plateau qui en contient davantage est plus bas que l'autre. »



Ils peuvent ensuite faire appel à l'une ou l'autre des stratégies suivantes :

- Les élèves ajoutent des cubes, préférablement de couleur différente, un à un, sur le plateau élevé, jusqu'à ce que les deux plateaux soient en équilibre. Au terme de quoi, ils auront ajouté 2 cubes. Par la suite, ils devraient représenter cette situation symboliquement par **7 = 5 + 1 + 1**.
- Les élèves retirent un à un 2 cubes du plateau qui en contient 7 pour rétablir l'équilibre et représenter ainsi cette situation symboliquement par **7 – 1 – 1 = 5**.

À l'instar de la balance à plateaux, la balance mathématique peut également servir à rétablir une égalité. Dans ce cas, on désignera les quantités par des nombres et non des objets.

2. Rétablir une situation d'égalité à l'aide de symboles : Devant une représentation symbolique (phrase mathématique), les élèves doivent s'exercer à appliquer la stratégie *comparer des termes* (voir p. 107-108) pour rétablir l'égalité. Par des questions, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à rétablir l'égalité en explorant les relations qui lient les termes de part et d'autre du symbole de l'égalité.

Exemple

Présenter aux élèves la phrase mathématique **23 + 14 ≠ 14 + 21**.

Leur demander :

– « Comment pourriez-vous expliquer la relation entre les nombres qui figurent de chaque côté du signe ≠ (n'est pas égal à)? » Un ou une élève pourrait répondre : « On n'a pas la même quantité de chaque côté du symbole. La situation présente une inégalité parce que **23 + 14 > 14 + 21**. »

Puis, poser la question suivante :

– « Que pourriez-vous faire pour rétablir l'égalité? »

Un ou une élève pourrait répondre : « Le nombre 14 figure de chaque côté. Le nombre 23, d'un côté, vaut deux de plus que le nombre 21 de l'autre. Le nombre 21, d'un côté, représente deux de moins que le nombre 23 de l'autre. J'ajoute donc 2 au nombre 21 du côté droit pour qu'il soit égal au nombre 23 du côté gauche ou j'enlève 2 au nombre 23 à gauche pour qu'il soit égal au nombre 21 à droite. »

$$\mathbf{23 + \cancel{14} \neq \cancel{14} + 21}$$

2 de moins

Habileté à maintenir une situation d'égalité

En comparant des quantités à l'aide de matériel concret, les élèves explorent des situations d'équivalence. Afin de les inciter à approfondir leur raisonnement, l'enseignant ou l'enseignante peut leur poser la question suivante dans le cadre d'un problème avec des cubes emboîtables :

– « Si deux tours sont formées de six cubes et que j'en ajoute un à l'une des tours, que ferez-vous pour maintenir l'égalité entre les tours? »

Par l'exploration et la manipulation, les élèves constateront que la même quantité doit nécessairement être ajoutée à l'autre tour pour maintenir l'égalité. La même démarche peut être suivie avec deux cadres à dix cases ou avec la balance à plateaux.

Lorsque par la suite les élèves tentent de maintenir l'égalité d'une situation représentée par une phrase mathématique, il est important de leur demander si un nombre ajouté ou retiré d'un côté du signe = modifie la relation d'égalité entre les deux expressions et si oui, pourquoi. Encore ici, l'exploration (l'ajout ou le retrait de nombres) leur permet de conclure que l'égalité est maintenue :

- si le nombre ajouté ou retiré d'un des deux côtés du signe = est 0;

  19 + 33 + 0 = 35 + 17

- ou si le même nombre est ajouté ou retiré des deux côtés du signe = .

  19 + 33 – 11 = 35 + 17 – 11

Apprendre à maintenir l'égalité est tout aussi important que d'apprendre à la rétablir. C'est par l'exploration concrète et fréquente de ces deux habiletés que les élèves, ultérieurement, manipuleront plus aisément les termes abstraits dans les expressions algébriques.

Pour les élèves, l'acquisition des différentes habiletés liées aux relations d'égalité et, par conséquent d'inégalité, sert d'assise au développement de la pensée algébrique et à l'apprentissage de concepts plus symboliques et plus complexes tels qu'élaborés dans l'énoncé 2.

Énoncé 2

> Les symboles permettent de représenter les relations qui existent entre des ensembles de nombres.

Certains symboles plus abstraits, tels que les inconnues et les variables, sont des termes fréquemment utilisés à partir du cycle moyen, et ce, jusqu'au secondaire. Mais, quel est leur rôle aux cycles préparatoire et primaire? Ce document vise à démystifier les termes **symbole, inconnue, variable** et à démontrer que les enfants, même très jeunes, recourent à certains concepts algébriques de façon spontanée. Cette section tentera donc de répondre clairement, par des exemples, aux questions suivantes :

- « Comment approfondir ces concepts et développer les fondements d'une pensée algébrique? »
- « Comment apprendre aux élèves à voir ou à conceptualiser diverses relations, à généraliser et même à abstraire certaines propriétés des nombres? »

Répondre à ces questions constitue justement le défi et la raison d'être de l'initiation à l'algèbre aux cycles préparatoire et primaire.

Vocabulaire lié aux situations d'égalité comprenant des symboles

Selon Baruk (1995, p. 1162), un symbole est une analogie ou le lien qu'il entretient avec un objet, une personne, une idée, etc. (p. ex., la colombe est un symbole de paix). Dans l'histoire des mathématiques, des notations telles que π , $\frac{1}{4}$, 3^2 ont été désignées comme symboles et se sont imposées par convention ou par usage, souvent après de longs débats d'érudits. Le tableau ci-après résume les principaux termes liés aux symboles. Des exemples illustrent leur utilisation.

Termes	Exemples
Symbole Signe graphique qui représente un nombre, une opération, une relation. *Note* : Les symboles mathématiques sont généralement des notations imposées par l'usage au fil des années[6].	Types de symboles : • les signes d'opération (+, –, ×, ÷) • les unités de mesure (cm, m…) • les signes de relation (=, ≠ , < , >) • les nombres, les inconnues et les variables
Symbole littéral Lettre qui, en vertu d'une convention ou d'une association arbitraire au départ, représente ou correspond à une valeur, à une grandeur ou à une opération qu'elle désigne[7].	Il existe différents usages du symbole littéral : • **les étiquettes :** le p pour pomme dans **2 p + 3 p = 5 p** • **les unités de mesure :** les lettres m et cm dans **1 m = 100 cm** *Note* : Les symboles représentant les étiquettes et les unités de mesure ne sont habituellement pas écrits en caractères italiques. • **les inconnues :** la lettre x dans l'équation $\mathbf{3x + 2 = 8}$ • **les variables :** les lettres *a* et *b* dans l'équation $\mathbf{a + b = 5}$ *Note* : Les symboles littéraux représentant les inconnues et les variables sont habituellement écrits en caractères italiques.
Inconnue Terme dans une équation ou dans une inéquation qui n'est pas connu.	Dans l'équation $\mathbf{x + 5 = 12}$, x est une inconnue. Il faut résoudre l'équation pour constater qu'il n'existe qu'une valeur possible pour x, soit 7 dans le cas présent. Dans l'inéquation $\mathbf{x + 5 > 12}$, x est une inconnue, car elle peut être remplacée par une valeur parmi un ensemble de valeurs.
Variable Terme indéterminé dans une équation ou une inéquation qui peut être remplacé par plusieurs valeurs[8].	Dans l'équation $\mathbf{x + y = 10}$, x et y sont des variables, car on peut leur accorder différentes valeurs pour rendre l'équation vraie. Dans une inéquation à deux variables (p. ex., $\mathbf{x + y > 10}$), on peut aussi accorder différentes valeurs aux variables.
Expression algébrique Ensemble de symboles mathématiques reliés par des signes d'opération.	$\mathbf{3x + 2}$ **□ – 8**

6. Denis de Champlain, Pierre Mathieu, Paul Patenaude et Hélène Tessier, 1996, *Lexique mathématique enseignement secondaire*, Beauport (QC), Les Éditions du Triangle d'Or, p. S 72.

7. Ibid., p. S 73.

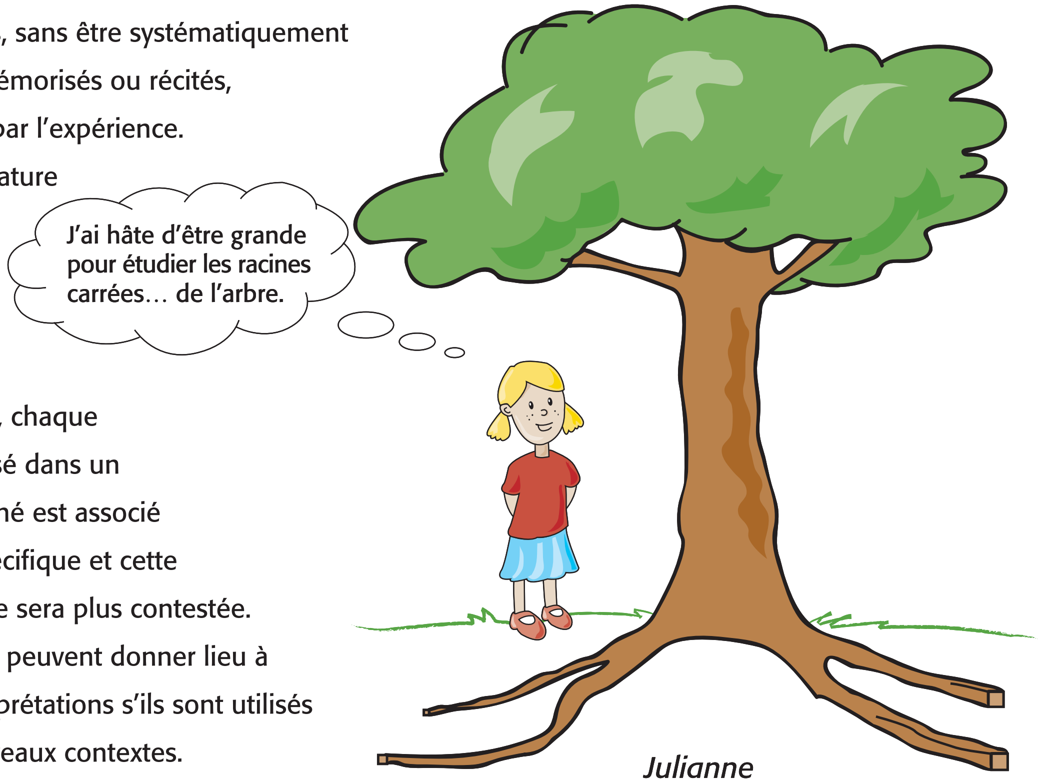
8. Ontario, Ministère de l'Éducation, 2005b, *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques, Révisé*, Toronto, le Ministère, p. 101.

Symboles dans la vie courante

Très jeunes, les enfants évoluent dans un monde où les signes omniprésents communiquent, par leur nature, un message clair ou définissent une fonction précise. Par exemple :

- les feux de signalisation dictent un comportement (le rouge, un arrêt ou une interdiction d'avancer; le vert, l'autorisation d'avancer);
- les personnages sur les portes des salles de toilettes désignent au garçon ou à la fille, la porte à choisir;
- à la garderie, plusieurs symboles indiquent où ranger les jouets, les vêtements, etc.;
- une chanson ou une comptine annonce une activité spécifique (p. ex., le temps de la collation, du repos, du rangement);
- les signes de sécurité de SIMDUT, souvent présentés par les parents, sensibilisent les enfants à la toxicité des produits de nettoyage;
- les panneaux routiers, les logos et les enseignes commerciales deviennent rapidement significatifs pour les enfants.

Ces symboles, sans être systématiquement enseignés, mémorisés ou récités, s'acquièrent par l'expérience. Malgré leur nature arbitraire, ils deviennent rapidement familiers aux enfants. Ainsi, chaque symbole utilisé dans un contexte donné est associé à un sens spécifique et cette association ne sera plus contestée. Par contre, ils peuvent donner lieu à d'autres interprétations s'ils sont utilisés dans de nouveaux contextes.



Symboles en mathématiques

Les symboles mathématiques représentent des concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie l'apprentissage des mathématiques et de l'algèbre. Plusieurs d'entre eux, devenus familiers aux adultes, sont souvent présentés aux élèves de manière prématurée, dans des situations hors contexte ou sans explication au préalable. Il est donc essentiel, pour les expliquer clairement et précisément, de créer des situations dans lesquelles les élèves auront le loisir et le temps de se familiariser avec les symboles et de s'approprier leur sens.

Symboles mathématiques	Exemples
Les symboles désignant des quantités Les chiffres (symboles numériques ou graphiques indo-arabes)	**0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**
Les symboles représentant des opérations fondamentales Les signes qui désignent les quatre opérations en numération	– + × ÷
Les symboles établissant des relations Le signe qui indique une égalité Les signes qui indiquent une inégalité	 = ≠ > <

Sens du symbole en algèbre

> *À mesure qu'ils vivent des expériences variées et significatives, les élèves acquièrent le sens du symbole. Le sens du symbole est un niveau de compréhension mathématique qui englobe le sens du nombre.*
>
> (Picciotto et Wah, 1993, p. 42, traduction libre)

Luis Radford (2001) considère l'apprentissage de l'algèbre comme une appropriation d'une nouvelle manière mathématique de penser et d'agir où s'insèrent la production et l'utilisation de symboles. Ces symboles sont porteurs de sens pour les élèves dans la mesure où ils les explorent dans des activités mathématiques contextualisées.

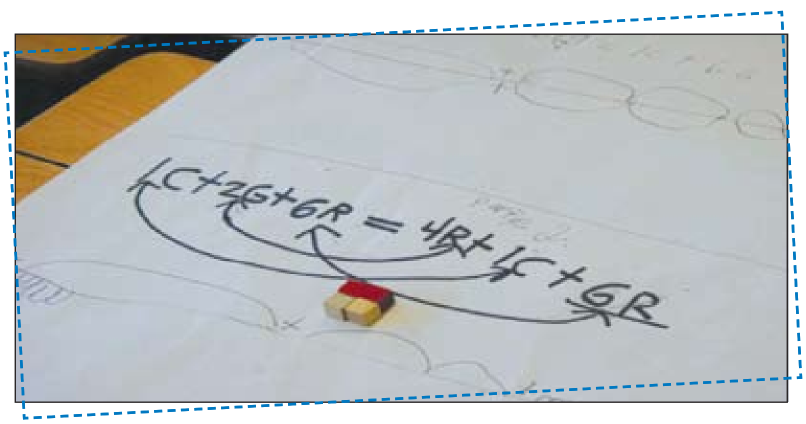
Un des éléments clés du raisonnement algébrique repose sur la capacité à reconnaître et à explorer les relations qui lient diverses quantités. Ces relations, telles que définies dans le premier énoncé, sont représentées par divers symboles que les élèves doivent apprendre à utiliser de façon appropriée.

Au cycle primaire, un tiret, une figure géométrique ou tout autre symbole dans une équation représente, pour les élèves, une quantité inconnue (p. ex., Dans l'équation $\mathbf{3 + \triangle = 5}$, le triangle est un symbole qui représente la quantité 2). L'utilisation adéquate d'une case ou d'un tiret est une première étape vers le symbolisme plus formel de l'algèbre (voir *Situation d'apprentissage, 2e année*, p. 153-170). Les élèves qui en auront une compréhension juste sauront, au cycle moyen, interpréter ou manipuler plus efficacement les symboles littéraux utilisés couramment en algèbre pour représenter l'inconnue ou la variable.

Le sens du symbole joue un rôle important dans le développement de la pensée algébrique. La compréhension des symboles découle de la maturité des élèves et de la diversité des expériences vécues.

Voici quelques points à considérer pour aider les élèves à développer le sens du symbole :

- Présenter les symboles dans des contextes stimulants et réalistes pour que les élèves en saisissent le sens et ultimement, comprennent les concepts qu'ils sous-tendent (p. ex., voir les différentes situations d'apprentissage, p. 110-183).
- Inciter les élèves à déterminer les éléments à représenter dans une situation-problème, à choisir un mode de représentation adéquat et à utiliser des symboles personnels.



Les élèves utilisent la première lettre du nom de chaque animal pour formuler la phrase mathématique; par exemple, C représente le crapaud, G représente la grenouille et R représente la rainette.

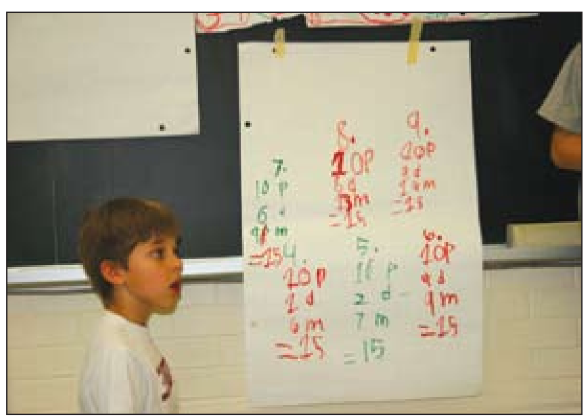
- Encourager les élèves à déterminer à quel moment et de quelle façon ils doivent utiliser des symboles (p. ex., représenter une quantité manquante dans une équation par un carré).
- Proposer des activités qui amènent les élèves à créer des liens entre divers modes de représentation, à discuter de ces liens et à les justifier à l'aide d'arguments mathématiques.
- Encourager les élèves à observer les symboles dans une équation et à analyser leur sens avant de tenter de la résoudre.

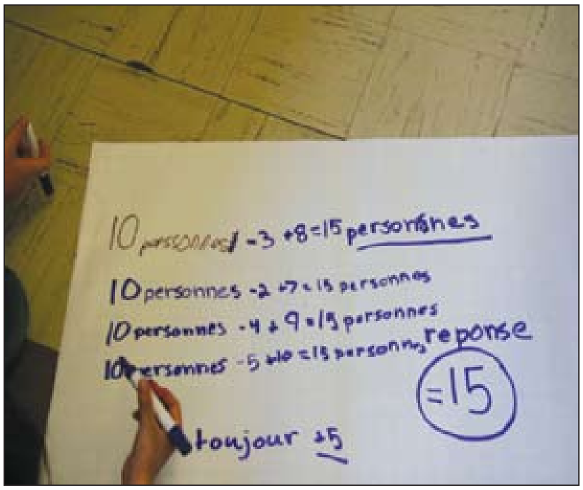
Pour développer le sens du symbole, les élèves doivent :

- décrire des relations à l'aide de divers modes de représentation avant de les explorer symboliquement;
- établir des liens entre les représentations.

L'utilisation efficiente de différents modes de représentation s'inscrit comme un cheminement progressif intégré au domaine Numération et sens du nombre. Son but dépasse de loin le simple recours mécanique aux symboles et aux « trucs » de mémorisation en algèbre. Il consiste plutôt à developper la capacité à percevoir des régularités, à généraliser des relations et à résoudre des problèmes. Voici un exemple d'une situation-problème authentique illustrant un cheminement progressif vers le développement du sens du symbole.

Cheminement pour développer le sens du symbole	Exemples
Exposer la situation et les données.	Un ou une élève pourrait exposer la situation suivante : « Dans l'autobus, il y a 10 passagers après le 1er arrêt et 15 passagers après le 2e arrêt. Combien de passagers sont montés dans l'autobus au 2e arrêt et combien en sont descendus? » (Voir *Situation d'apprentissage, 3e année*, p. 171-183.)
Proposer une conjecture.	« Je crois que le nombre de passagers qui descendent est toujours plus petit que le nombre de passagers qui montent. »

Cheminement pour développer le sens du symbole	Exemples
Représenter la situation-problème à l’aide de matériel concret ou de dessins.	Les élèves utilisent des cubes pour représenter les passagers.  Les élèves représentent les passagers par des dessins. 
Délaisser graduellement les représentations semi-concrètes et utiliser des symboles personnels pour communiquer sa compréhension de la situation.	Dans la photo ci-dessous, l’élève a choisi les symboles suivants comme étiquettes : **p** pour passagers; **d** pour les passagers qui descendent de l’autobus; **m** pour les passagers qui montent dans l’autobus. 

Cheminement pour développer le sens du symbole	Exemples
Utiliser des symboles conventionnels pour représenter la situation-problème par une phrase mathématique.	Dans la photo ci-dessous, l'élève donne un sens à la phrase mathématique **10 – 3 + 8 = 15**.  La différence entre les 8 personnes qui montent et les 3 personnes qui descendent est de 5, ce qui correspond à la différence entre le nombre de passagers après le 2ᵉ arrêt (15) et le nombre de passagers après le 1ᵉʳ arrêt (10).
Généraliser oralement ou à l'aide de symbole.	« La différence entre le nombre de personnes qui montent et le nombre de personnes qui descendent correspondra toujours à la différence entre le nombre de passagers après le 2ᵉ arrêt et le nombre de passagers après le 1ᵉʳ arrêt. »

Pour consolider le sens du symbole, les élèves doivent :

- reconnaître qu'un même symbole utilisé plus d'une fois dans une phrase mathématique représente la même quantité, la même valeur;

  Exemple

  $\triangle + \triangle + \triangle + 1 = 10$

- recourir aux symboles pour communiquer une généralisation;

  Exemple

  $\triangle + \underbrace{\bigcirc + \square} = \underbrace{\triangle + \bigcirc} + \square$

  L'équation représente symboliquement la propriété d'associativité de l'addition.

- explorer les quantités représentées par les symboles en remplaçant ces derniers par différents nombres;

Exemple

Si △ représente	3 × △ représente
1	3
2	6
3	9

- créer différentes expressions algébriques pour décrire une situation donnée.

Exemples

2 × △ + 6 = 10

△ + △ + 6 = 10

Sens de l'inconnue et de la variable

En algèbre, l'utilisation des symboles pour représenter des inconnues ou des variables exige un certain niveau d'abstraction. D'ailleurs, être en mesure de déterminer la valeur d'une quantité inconnue constitue une étape importante du développement de la pensée algébrique.

Les élèves saisiront le sens de l'équation et percevront la relation entre l'inconnue et la quantité qu'elle représente dans la mesure où l'équation est représentative d'une situation-problème significative.

Au cycle primaire, il n'est pas nécessaire d'expliquer formellement la différence entre variable et inconnue. Il suffit d'utiliser les termes *quantité inconnue* ou *nombre manquant* ou *terme manquant*.

Exemple

Il y a 15 moineaux perchés sur un fil téléphonique. Certains d'entre eux s'envolent lorsqu'une automobile passe. Puis, 3 moineaux reviennent se percher sur le fil. Je peux maintenant en dénombrer 10. Combien de moineaux se sont envolés lorsque la voiture est passée?

L'équation ci-dessous est la représentation symbolique de cette situation-problème.

15 – ◊ + 3 = 10

En mathématiques, si l'inconnue représente bien une quantité, une valeur, une entité en soi, il est toutefois important de préciser que l'inconnue est également le nom donné à la valeur qui rend l'équation vraie. Précisons donc que l'inconnue peut être utilisée pour :

- représenter une quantité déterminée;

Exemple

10 = 17 – △

- explorer une situation d'égalité ou d'inégalité;

  Exemple

  $4x > 7$

- représenter une propriété mathématique.

  Exemple

  $\square + 5 = 5 + \square$

Les élèves du cycle primaire doivent analyser les inconnues dans des situations-problèmes et les représenter, graduellement, de façon plus abstraite. Au début, l'inconnue est surtout représentée par des figures géométriques ou des tirets.

Exemples

$7 - \triangle = 3$

$4 + 2 = \_\_\_ + 1$

Elle peut également être représentée dans un tableau.

Exemple

Si △ représente	7 – △ représente
1	6
2	5
3	4

En 1re année, alors que les élèves apprennent à lire, les lettres réfèrent davantage à des sons qu'à des objets ou des quantités.

Dès la 2e année, l'inconnue peut être représentée par une lettre (un symbole littéral) ayant un lien direct avec la situation-problème afin que la lettre ait un sens pour les élèves.

Exemple

$15 - m + 3 = 10$, l'inconnue ***m*** représente le nombre de ***m***oineaux envolés.

Certaines situations font appel à plus d'une quantité inconnue. Dans de tels cas, les symboles qui les représentent sont considérés comme des variables. Selon Baruk (1995, p. 1271), le mot *variable* tire son sens d'un mot latin signifiant « inconstant ». En effet, les variables n'ont pas une valeur constante puisque la valeur d'une variable influe sur la valeur de l'autre.

Exemple

Dans l'équation $n + t = 8$:

- si ***n*** a la valeur **6**, ***t*** a la valeur **2**;
- si ***n*** a la valeur **5**, ***t*** a la valeur **3**, etc.

Lorsque l'on donne une valeur à une variable, on la fixe momentanément. L'autre variable devient alors une inconnue puisqu'elle n'a qu'une valeur possible.

Exemples d’inconnues et de variables

<table>
<tr><th>Inconnue</th><th>Variable</th></tr>
<tr><td>

$n - 15 = 40$

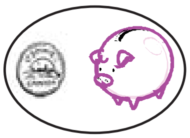
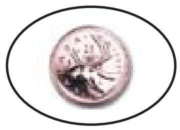
L’inconnue est représentée par le symbole littéral n.

</td><td>

$4 + a = 3 + b$

Les variables sont représentées par les symboles littéraux a et b.

</td></tr>
<tr><td>

 est égal à 

Cette situation d’égalité peut être représentée par la phrase mathématique suivante :

5 ¢ + ☐ = 25 ¢

L’inconnue est représentée par une case.

</td><td>

Ma mère me sert un bol de crème glacée agrémentée de 10 petits fruits, un mélange de bleuets et de fraises. Énumère les différentes combinaisons de fruits qu’elle pourrait me servir.

Le nombre de fraises et le nombre de bleuets sont représentés par des variables. Ces nombres varient selon les combinaisons possibles.

Les élèves écrivent l’équation **☐ + ○ = 10** pour représenter la situation, le carré représentant le nombre de fraises et le cercle représentant le nombre de bleuets.

Fraises [☐]	Bleuets [○]
1	9
2	8
3	7
4	6
…	…

</td></tr>
<tr><td>

Dans la suite 2, 4, 6, __ , l’inconnue est représentée par le tiret.

Les élèves du cycle primaire auront recours à la régularité (+2) pour identifier l’inconnue, à savoir le terme manquant de la suite (8).

</td><td>

Dans un sac, il y a des cubes rouges et des cubes bleus. Il y a 5 cubes en tout. Détermine toutes les répartitions possibles du nombre de cubes de chaque couleur.

Exemples

$4 + 1 = 5$

$2 + 3 = 5$

Le symbole littéral r représente la couleur rouge et b, la couleur bleue. L’équation $r + b = 5$ représente la situation. Les variables sont r et b. Elles peuvent avoir les valeurs suivantes :

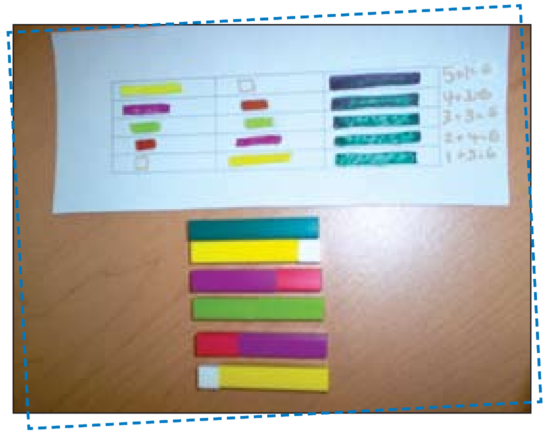
r	b
4	1
3	2
2	3
1	4

</td></tr>
</table>

Pour développer le sens de l'inconnue, les élèves doivent explorer une variété de situations authentiques qui font appel à des données signifiantes et qui favorisent la transition du concret vers l'abstrait. Voici quelques exemples de telles situations.

Exemple 1

À l'aide d'un ensemble de réglettes Cuisenaire, chaque équipe de deux élèves :



- découvre toutes les combinaisons possibles de réglettes pour obtenir une longueur donnée;
- assigne une valeur à chacune des couleurs de réglette (p. ex., la réglette blanche vaut 1, la rouge vaut 2);
- représente les combinaisons par des phrases mathématiques (p. ex., **4 + 2 = 6**);
- remplace chaque phrase mathématique par une équation avec inconnue (p. ex., **1 + ☐ = 6**);
- demande à une autre équipe de résoudre leurs équations en utilisant les réglettes.

Exemple 2

Les élèves font une course à relais dans le parc adjacent à l'école. Au départ, ils ont tous 25 points. Certains objets, situés le long du trajet, nécessitent qu'ils ajoutent ou enlèvent des points à leur total. Combien de points auront-ils à la fin du trajet?

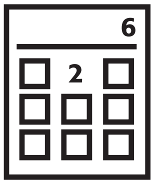
Objets	Symbole littéral	Valeur assignée
arbre	a	ajoute 1
clôture	c	ajoute 10
fontaine	f	ajoute 100
banc	b	enlève 10
écureuil	é	enlève 25

Proposer aux élèves :

- de débuter avec 25 points, de suivre le trajet et de dresser une liste d'objets rencontrés;
- d'écrire une équation en intégrant les symboles littéraux contenus dans la légende **25 + c + f – b + a + a – é – b =** ***m***, où ***m*** est le nombre mystère;
- d'échanger leur équation avec un ou une autre élève et de découvrir le nombre mystère **25 + 10 + 100 – 10 + 1 + 1 – 25 – 10 =** ***m***.

Exemple 3

Dans une machine mystère, lorsque je tape 2 sur le clavier numérique, le nombre 6 apparaît.



Demander aux élèves de déterminer quelle pourrait être l'opération effectuée par la machine mystère (p. ex., + 4 ou × 2) en observant la relation entre les deux nombres (entrée et sortie). Leur demander ensuite de remplir la table de valeurs suivante en utilisant cette opération.

Entrée	Sortie
2	6
3	
4	
5	

Lors d'un échange, inviter les élèves à présenter leur table de valeurs et à l'expliquer.

L’annexe B (p. 87-108) présente des activités liées aux deux énoncés de la grande idée 2. Ces activités, divisées en deux parties, permettent aux élèves d’approfondir le concept d’égalité. Dans la première partie intitulée *Exploration de propriétés*, on retrouve les cinq explorations suivantes :

- explorer la propriété de commutativité;
- explorer le rôle du nombre 0 dans l’addition;
- explorer le rôle du nombre 0 dans la soustraction;
- explorer le rôle du nombre 1 dans la multiplication;
- explorer la propriété d’associativité.

Dans la deuxième partie intitulée *Utilisation de stratégies*, on retrouve les quatre stratégies suivantes :

- ajouter un nombre mystère;
- décomposer les nombres selon les valeurs de position;
- annuler des termes ou des expressions égales;
- comparer des termes.

Cheminement de l’élève

Les élèves poursuivent leur apprentissage en modélisation et algèbre en s’appuyant sur les connaissances acquises au cours des années précédentes et sur l’acquisition d’un nouveau vocabulaire et de nouvelles habiletés.

Le tableau ci-après présente la progression du vocabulaire et des habiletés relatifs à la grande idée de situations d’égalité de la maternelle à la 3e année.

Note : Sous chacune des années d’études sont inscrits seulement le vocabulaire et les habiletés présentés pour la première fois. Toutefois, afin de s’assurer que les élèves en poursuivent l’acquisition et la consolidation tout au long du cycle primaire, l’enseignant ou l’enseignante doit tenir compte de l’ensemble du tableau lors de sa planification.

Tableau de progression : Situations d'égalité

Année d'études	Vocabulaire	Habiletés
Maternelle/Jardin d'enfants	Ensemble Plus que Moins que Est égal à N'est pas égal à Balance à plateaux Équilibre Déséquilibre	Comparer les quantités d'objets dans des ensembles à l'aide de matériel concret.
1re année	Symbole de l'égalité Phrase mathématique Situation d'égalité Situation d'équivalence	Explorer et représenter des situations d'égalité à l'aide de la balance à plateaux. Illustrer une situation d'égalité à l'aide de matériel concret et la traduire à l'aide de nombres et de symboles. Établir le lien entre les représentations concrètes ou symboliques et une situation d'égalité.
2e année	Équation Inconnue	Représenter une équation à l'aide de matériel concret. Déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation. Établir le lien entre les représentations concrète et symbolique d'une équation.
3e année	Faits d'addition Faits de soustraction Variable Propriétés	Représenter une équation à l'aide de dessins et de symboles. Déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation simple en se référant aux faits numériques d'addition et de soustraction.

ANNEXE A – MODÈLES EN ALGÈBRE

L'enseignement de la numération et de l'algèbre sont difficilement dissociables puisque les deux font appel aux nombres et aux opérations fondamentales. En numération, l'enseignant ou l'enseignante met généralement l'accent sur la compréhension des nombres et des opérations pour amener les élèves à les utiliser de façon efficiente. En algèbre par contre, il ou elle met l'accent sur la relation d'égalité entre les quantités dans une situation donnée.

En « algébrisant » la numération, c'est-à-dire en intégrant le développement de la pensée algébrique au développement du sens du nombre et des opérations, l'enseignant ou l'enseignante favorise l'acquisition par les élèves d'une meilleure compréhension des concepts algébriques liés aux situations d'égalité.

Aux cycles préparatoire et primaire, certains modèles mathématiques se prêtent bien à un enseignement intégré de la numération et de l'algèbre parce qu'ils permettent de représenter aussi bien un raisonnement arithmétique qu'un raisonnement algébrique. Il importe toutefois que l'enseignant ou l'enseignante modèle leur utilisation dans chacun des deux domaines.

Dans cette annexe, les modèles suivants sont décrits en détail :

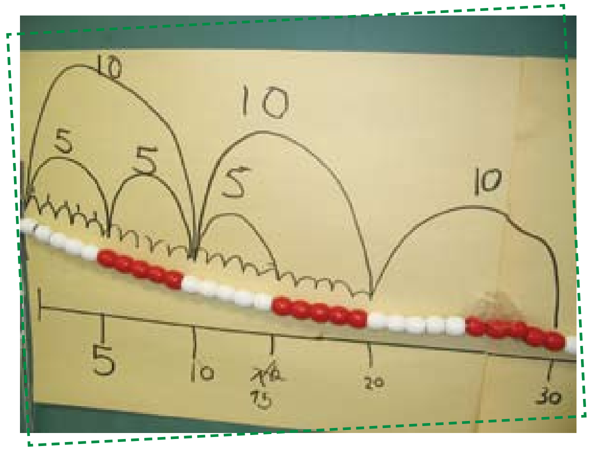
- droites numériques;
- cadres à dix cases;
- dispositions rectangulaires;
- balances;
- machines mystères;
- tables de valeurs.

De plus, on propose pour chacun :

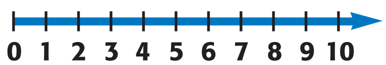
- une démarche pour initier les élèves à son utilisation;
- des exemples de situations-problèmes en numération et en algèbre.

Droites numériques

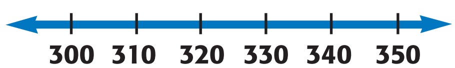
La droite numérique est un modèle présenté assez tôt en numération. Les élèves l'utilisent surtout pour placer les nombres en ordre de grandeur et pour représenter des faits numériques d'addition, de soustraction et de multiplication. Une droite numérique concrète peut-être utilisée pour initier les élèves à la représentation semi-concrète de la droite numérique.



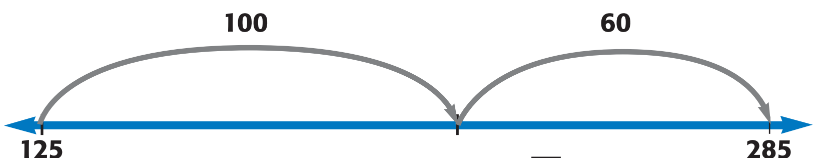
Une fois que les élèves comprennent bien ce modèle, il leur est facile de passer à la droite numérique ouverte. Contrairement à la droite numérique courante, la droite numérique ouverte n'est pas graduée. Elle permet de représenter les quantités présentées dans la situation-problème par des sauts ou des bonds.



Droite numérique



Droite numérique

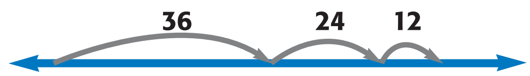
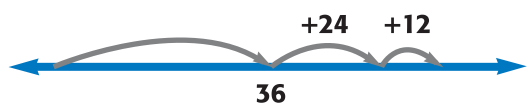
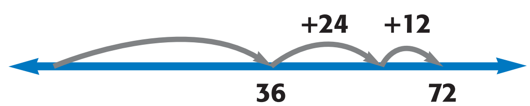
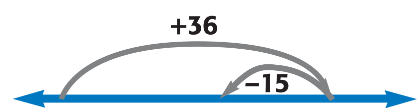


125 + 100 + 60 = □

Droite numérique ouverte

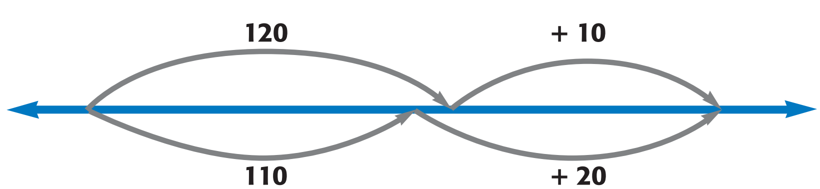
L'enseignant ou l'enseignante doit permettre une utilisation flexible de la droite numérique ouverte tout en exigeant que les traces laissées soient claires et complètes. Tous les éléments placés par les élèves sur la droite numérique ouverte démontrent leur compréhension de la situation-problème.

Même si peu de conventions régissent l'utilisation de ce modèle, il importe que l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à laisser des traces de leur raisonnement. Voici des exemples de telles traces.

Traces	Exemples
Une flèche à chaque bout de la droite pour indiquer que l'on considère seulement une portion de la droite.	
Des flèches au bout de chaque bond pour décrire la direction du bond et l'opération effectuée.	
Des nombres pour représenter l'étendue des bonds.	
Des signes d'opération et des nombres au-dessus des bonds pour représenter l'étendue des bonds et l'opération effectuée.	
Le nombre d'arrivée d'un bond ou des bonds ou le nombre d'arrivée du dernier bond pour représenter le résultat de l'opération effectuée.	
Des flèches dans différentes directions pour représenter l'ajout ou le retrait.	

Toutes ces traces facilitent l'interprétation de la situation-problème représentée sur la droite numérique ouverte. L'échange mathématique est un temps propice pour comparer les différentes représentations à l'aide des droites numériques ouvertes et pour analyser quelles traces permettent une meilleure compréhension.

Lorsque, sur la droite numérique ouverte, deux expressions numériques sont reportées en haut et en bas de la droite, on la nomme alors *droite numérique ouverte double*. Tout comme la droite numérique ouverte, les traces laissées par les élèves peuvent varier selon la situation-problème représentée.

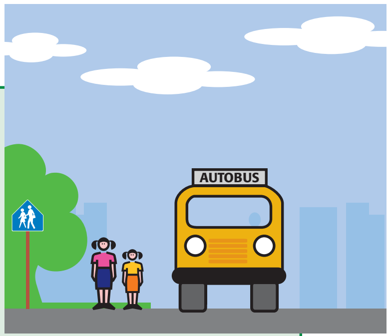


120 + 10 = 110 + 20

Droite numérique ouverte double

Introduction à la droite numérique ouverte

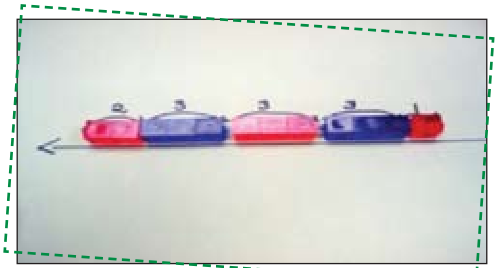
Présenter aux élèves la situation suivante.



Chaque matin, Liliane prend l'autobus scolaire avec sa sœur. Elles sont les premières passagères à y monter. L'autobus effectue quatre autres arrêts avant d'arriver à l'école. À chacun des trois premiers arrêts, trois élèves montent. Au dernier arrêt, un seul ami monte.

Combien y a-t-il d'élèves à bord de l'autobus à son arrivée à l'école?

Distribuer aux élèves des cubes emboîtables et une grande feuille. Leur demander de représenter les passagers par des cubes en les disposant sur une droite préalablement tracée. Poser des questions pour attirer leur attention sur la quantité d'élèves (cubes) présents à chaque arrêt d'autobus. Tracer devant eux les bonds proportionnels et correspondants aux quantités déterminées par les cubes. L'utilisation de cubes emboîtables permet aux élèves de tracer des bonds de taille vraisemblable.

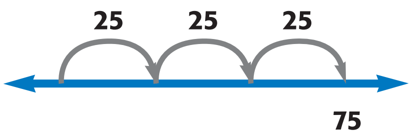


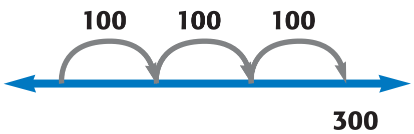
S'assurer que la taille des bonds tracés sur la droite est proportionnelle aux quantités représentées.

Par la suite, ce modèle pourra être représenté par la phrase mathématique suivante :

$$2 + 3 + 3 + 3 + 1 = 12$$

Lorsque les élèves maîtrisent les représentations sur la droite numérique ouverte sans avoir recours aux cubes emboîtables, il est important de leur faire représenter de plus grands nombres. Ils constatent ainsi que des flèches de même longueur sur des droites différentes peuvent représenter des intervalles différents.





Le fait de varier les contextes dans lesquels les élèves recourent à la droite numérique ouverte les aide d'une part à en maîtriser l'usage et, d'autre part, à la considérer comme une stratégie de résolution de problèmes, notamment de problèmes algébriques.

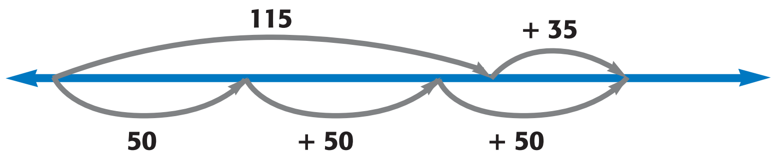
Introduction à la droite numérique ouverte double

Afficher une droite numérique ouverte au tableau avant de commencer l'activité, puis énoncer le problème suivant : « Comment peut-on démontrer que la phrase mathématique suivante est vraie? »

115 + 35 = 50 + 50 + 50

Modeler la représentation de l'expression numérique 115 + 35 sur la **partie supérieure** de la droite par des bonds accompagnés des nombres correspondants.

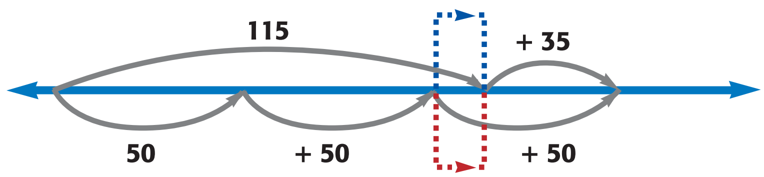
Modeler de la même façon la représentation de l'expression numérique 50 + 50 + 50 sur la **partie inférieure** de la droite.



Dire ensuite aux élèves de représenter la même phrase mathématique sur une droite numérique ouverte double qu'on leur a remise. Analyser en groupe la représentation en demandant : « Les deux expressions sont-elles égales? Comment le savez-vous? »

Comparer ensuite le premier terme de chaque expression, puis le prochain terme de chaque expression. Demander aux élèves d'expliquer leur raisonnement en se servant de la droite numérique ouverte double.

Inciter les élèves à établir des relations entre les deux expressions en encourageant la comparaison des termes, au lieu de simplement en déterminer la somme; par exemple, puisque 115 c'est 15 de plus que 50 + 50 et que 35 c'est 15 de moins que 50, donc cet énoncé est vrai.



Encourager l'emploi de la compensation et de la commutativité; par exemple : « J'ai enlevé 15 de 115 et je l'ai ajouté au 35. J'ai obtenu ainsi **100 + 50**, ce qui est égal à **50 + 50 + 50**. Cet énoncé est donc vrai. »

Souligner que la droite numérique ouverte double est une droite numérique ouverte qui a la particularité de représenter deux expressions numériques à la fois, une sur la partie supérieure et l'autre sur la partie inférieure, ce qui permet de comparer les expressions numériques et les termes qui la constituent.

Reprendre la même démarche avec une phrase mathématique constituée de plus grands nombres afin d'amener les élèves à constater que les bonds peuvent représenter aussi bien des grands intervalles que des petits.

Exemples de situations-problèmes faisant appel à la droite numérique ouverte double

En numération

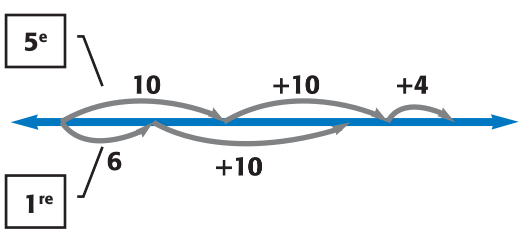
Pour aider un parent bénévole à distribuer des dépliants aux parents, les élèves de 3^{e} année ont séparé les dépliants en paquets de 10. Le parent bénévole leur a remis le tableau suivant indiquant le nombre d'élèves par classe.

1^{re}	2^{e}	3^{e}	4^{e}	5^{e}	6^{e}
16	27	29	34	24	31

Déterminer le nombre de paquets de 10 nécessaires pour faire la distribution à toutes les classes.

Pour résoudre le problème, les élèves peuvent représenter le nombre de dépliants nécessaires pour chaque classe à l'aide de droites numériques ouvertes doubles.

Exemple



En interprétant ces droites, ils peuvent constater, par exemple, qu'avec 4 paquets il est possible de faire la distribution des dépliants aux classes de 1^{re} et de 5^{e} année.

Laisser aux élèves qui le désirent la possibilité d'utiliser du matériel de manipulation (p. ex., cubes emboîtables, matériel de base dix).

S'assurer de la vraisemblance de la taille des bonds (p. ex., un bond de 10 sera nécessairement plus long qu'un bond de 2).

Demander ensuite aux élèves de déterminer le nombre total de dépliants nécessaires aux cycles primaire et moyen et de représenter ces opérations sur une droite numérique ouverte double.

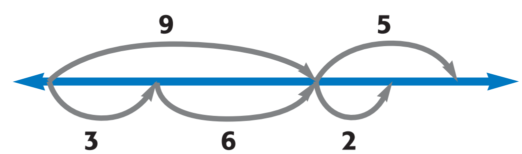
En algèbre

Dans une ville, une suite de rues parallèles sont identifiées par des nombres selon un ordre croissant, soit 1^{re} avenue, 2^{e} avenue, etc. Dans cette ville :

- l'école est située sur la 1^{re} avenue;
- l'épicerie est sur la 4^{e} avenue;
- la patinoire est sur la 10^{e} avenue.

Éric demeure sur la 15^{e} avenue et son ami Issam, sur la 12^{e} avenue. Jeudi, Éric a marché de l'école à la patinoire, où il avait un entraînement de hockey, puis il est rentré chez lui, juste avant le souper. Issam a marché de l'école à l'épicerie, puis il a rejoint Éric à la patinoire; ensuite, il est rentré chez lui. Représenter chaque trajet sur une droite numérique ouverte double dans le but de déterminer lequel des deux trajets est le plus long.

Exemple



Laisser aux élèves qui le désirent la possibilité d'utiliser du matériel de manipulation.

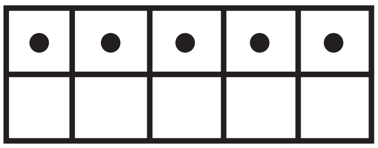
S'assurer de la vraisemblance de la taille des bonds.

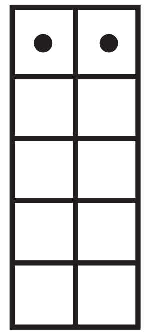
Demander aux élèves quel nombre on pourrait ajouter pour rétablir l'égalité.

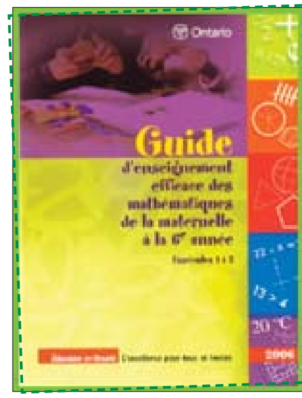
Leur demander aussi de représenter chaque trajet par une phrase mathématique.

Cadres à dix cases

Très utile en numération, ce modèle permet d'abord de développer le sens des nombres de 1 à 10 et également d'explorer le système de numération à base dix. En algèbre, pour vérifier l'égalité, il est utilisé conjointement avec du matériel de manipulation et des représentations plus symboliques (voir *Situation d'apprentissage, Maternelle/Jardin d'enfants*, p. 113-127).







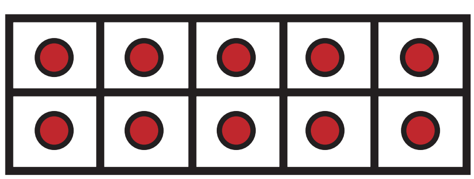
Le cadre à dix cases est présenté dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 3 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 24-26). Une vidéo (*Le cadre à 10 cases*, production du Conseil des écoles catholiques de langue française en collaboration avec le ministère de l'Éducation de l'Ontario et réalisation de Pentafolio Multimédia) démontrant son utilisation est disponible dans les différents conseils scolaires. De plus, des vidéos démontrant son utilisation en 1re année peuvent être consultées sur le site www.atelier.on.ca dans le module *Opérations fondamentales* de la rubrique *Numératie, M à la 3e*.

atelier.on.ca

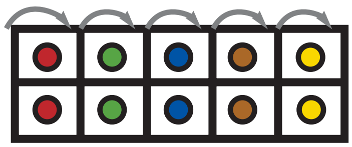
Introduction au cadre à dix cases

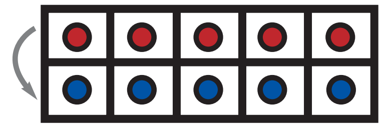
Distribuer un cadre à dix cases vide et des jetons à chaque élève. Dénombrer avec eux les cases de la rangée du haut. Reprendre la même démarche pour dénombrer les cases de la rangée du bas.

Demander aux élèves de placer un jeton sur chaque case du cadre à dix cases. Dénombrer avec eux les jetons dans les cases.

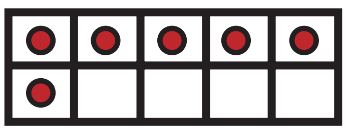


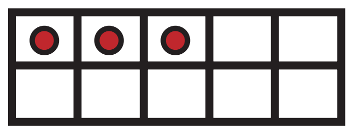
Demander à un ou à une élève s'il ou elle peut dénombrer d'une autre façon. Inciter les élèves à dénombrer par 2 en touchant chaque colonne et à dénombrer par 5 en touchant chaque rangée. Placer plusieurs cadres côte à côte et dénombrer les colonnes par 2 et les rangées par 5.

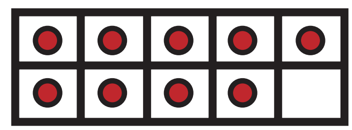




Pour chacun des nombres de 1 à 10, préparer un cadre à dix cases qui le représente. Les cadres peuvent être montés sur des transparents ou simplement sur des cartons. Présenter un cadre pendant quelques secondes et demander aux élèves d'identifier le nombre représenté.

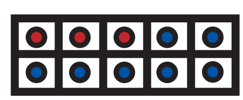
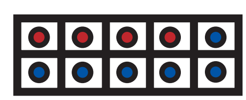


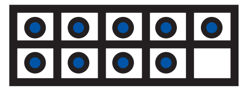




Poursuivre en présentant deux cadres à dix cases en demandant de dénombrer les cases remplies.

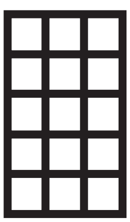
Exemples de situations-problèmes faisant appel au cadre à dix cases

En numération	En algèbre
Six élèves sont assis autour de la table de gauche et huit élèves sont assis autour de la table de droite. Utiliser des cubes ou des jetons et des cadres à dix cases pour déterminer le nombre d'élèves assis autour des deux tables. Remettre des cubes ou des jetons de deux couleurs différentes afin que le résultat soit plus facilement observable. S'assurer que les élèves remplissent toutes les cases de la première rangée avant de remplir celles de la deuxième rangée. Interroger les élèves sur le nombre de jetons de chaque couleur et le nombre total de jetons. Représenter, par des mots et des nombres, les actions posées par les élèves pour résoudre le problème. Utiliser un autre modèle mathématique pour représenter cette situation (p. ex., droite numérique).	*Démontrer sur le cadre à dix cases, différentes combinaisons de dix cubes de deux couleurs différentes, puis illustrer toutes les combinaisons trouvées sur une grande feuille.* Remettre à chaque équipe de deux élèves dix cubes emboîtables bleus et dix rouges, un cadre à dix cases et une grande feuille. S'assurer que les élèves remplissent toutes les cases de la première rangée avant de remplir celles de la deuxième rangée. Laisser les élèves résoudre le problème par tâtonnement en variant le nombre de cubes de chaque couleur. • Remettre à chaque élève une feuille avec plusieurs cadres à dix cases. Leur demander de représenter leurs essais.  

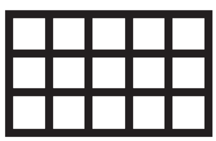
En numération	En algèbre
	• Représenter certains essais par une équation à une inconnue. *Exemple*  **$10 = 9 + \square$** • Demander aux élèves s'ils croient avoir trouvé toutes les possibilités. Si oui, leur demander comment ils peuvent l'affirmer. • Encourager les élèves à expliquer leur stratégie. • Reprende l'activité avec une quantité de cubes différente.

Dispositions rectangulaires

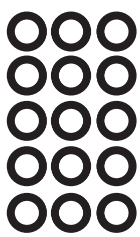
Une disposition rectangulaire est un ensemble d'objets disposés en rangées et en colonnes de façon à former un rectangle. Les dispositions rectangulaires sont des modèles mathématiques très utiles pour représenter des nombres, des opérations ainsi que leurs propriétés. Elles permettent également d'explorer et de visualiser facilement les relations entre des faits de multiplication.



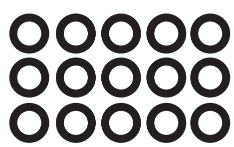
5 × 3



3 × 5



5 × 3



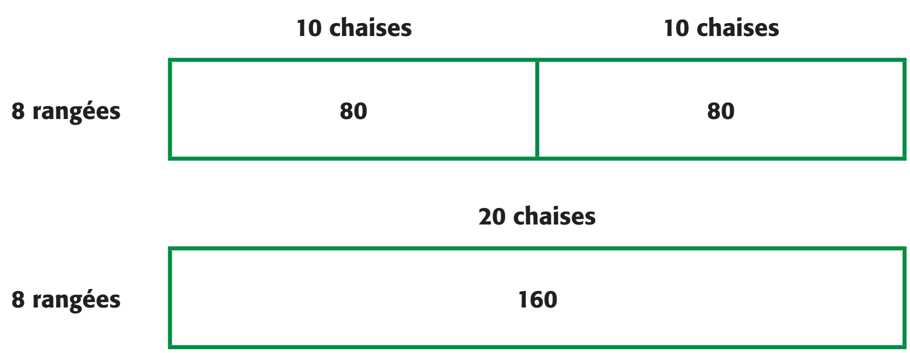
3 × 5

La situation d'apprentissage de 2e année (voir fascicule 1 du présent guide, p. 115-131) fait appel aux dispositions rectangulaires d'une façon très intéressante. Dans cette situation d'apprentissage, les élèves abordent le concept de suite numérique en créant un jardin selon une disposition rectangulaire et en y ajoutant, selon une régularité choisie, des plants pendant quatre semaines consécutives. Les dispositions rectangulaires permettent de faire le transfert d'une représentation concrète (la disposition rectangulaire) à une représentation abstraite (une suite numérique). En algèbre, les dispositions rectangulaires permettent de démontrer la propriété de commutativité dans le cadre d'une situation d'égalité. Elles servent aussi à déterminer la valeur de l'inconnue.

Les **dispositions rectangulaires ouvertes** – des rectangles vides – ne contiennent que les nombres consignés par les élèves pendant leur travail. Ces modèles, utilisés plus particulièrement au cycle moyen, permettent de passer d'une représentation semi-concrète de l'objet (p. ex., utilisation du matériel de base dix) à une représentation plus symbolique. Ils permettent aussi aux élèves de s'approprier le concept de la multiplication de grands nombres. Ces modèles deviendront des stratégies pour les élèves.

Exemple

Le gymnase peut contenir 8 rangées de 20 chaises chacune. Combien de chaises peut-il contenir en tout?



Pour plus de renseignements au sujet des dispositions rectangulaires ouvertes, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 61-64) et le module *Opérations fondamentales* de la rubrique *Numératie, M à la 3e*, sur le site www.atelier.on.ca.

Introduction aux dispositions rectangulaires

Avant de commencer, préparer des matériels concret et semi-concret qui représentent une disposition rectangulaire (p. ex., caisse de boîtes de jus, boîte à œufs, tablette de chocolat, chaises disposées en rangées et en colonnes, illustrations). Présenter le matériel aux élèves et dénombrer avec eux les rangées et les colonnes.

Observer ensuite des illustrations de dispositions rectangulaires (p. ex., illustrations de caisses remplies de boîtes de jus, de tablettes de chocolat regroupées en rangées, d'étalages de fruits ou de légumes). Puis dénombrer les rangées et les colonnes dans ces dispositions. Faire le lien avec un cadre à dix cases.

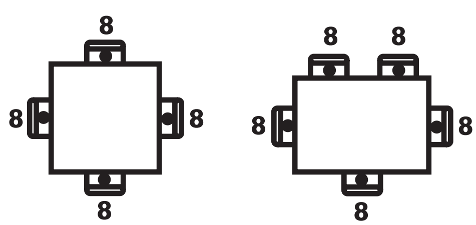
Demander aux élèves de concevoir un cadre à douze cases sur du papier quadrillé. Comparer les différentes dispositions possibles (4 rangées et 3 colonnes; 3 rangées et 4 colonnes; 2 rangées et 6 colonnes; 6 rangées et 2 colonnes; 1 rangée et 12 colonnes; 12 rangées et 1 colonne).

Faire remarquer que la forme est toujours rectangulaire et que le nombre de cases est le même dans chaque rangée (p. ex., 2 cases dans chacune des 6 rangées) et dans chaque colonne (p. ex., 6 cases dans chacune des 2 colonnes). Inviter les élèves à identifier d'autres nombres avec lesquels des dispositions rectangulaires semblables peuvent être réalisées.

Exemples de situations-problèmes faisant appel à la disposition rectangulaire

<table>
<tr><th>En numération</th><th>En algèbre</th></tr>
<tr>
<td>

Devant chaque élève, madame Martine place une boîte contenant 8 craies. Combien y a-t-il de craies sur une table où sont assis 4 élèves? sur une table où sont assis 5 élèves?



Remettre des feuilles quadrillées et des feuilles blanches à chaque élève.

La majorité des élèves auront d'emblée recours à l'addition répétée pour résoudre le problème. Pour chaque addition répétée, mentionner oralement les multiplications correspondantes.

Mettre les élèves au défi de représenter cette situation avec des dispositions rectangulaires.

Présenter la situation à l'aide d'un modèle différent (p. ex., droite numérique).

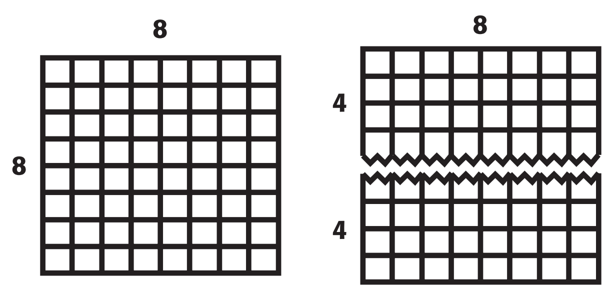
</td>
<td>

Trouver un moyen de justifier que

$\boldsymbol{8 \times 8 = \underbrace{4 \times 8} + \underbrace{4 \times 8}}$

sans avoir recours au calcul.

Par exemple, les élèves pourraient découper une disposition rectangulaire comme suit :



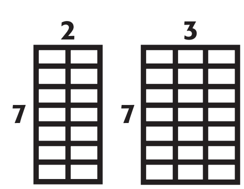
8 × 8

$\boldsymbol{\underbrace{4 \times 8} + \underbrace{4 \times 8}}$

Leur demander d'écrire d'autres phrases mathématiques pour démontrer que la stratégie fonctionne de façon systématique.

Exemple

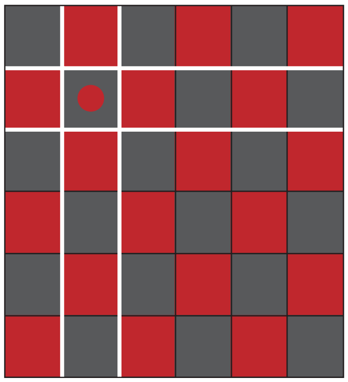
$\boldsymbol{7 \times 5 = \underbrace{7 \times 2} + \underbrace{7 \times 3}}$



</td>
</tr>
</table>

En numération

Certains élèves conçoivent avec difficulté que toute case dans une rangée d'une disposition rectangulaire fait simultanément partie d'une colonne. Pour y remédier, leur faire observer une dame sur un damier.



La dame fait partie de la 2e colonne et de la 2e rangée.

En algèbre

Sans avoir recours au calcul, les élèves peuvent déjà remarquer que l'expression numérique de gauche est également représentée à droite du symbole de l'égalité, mais en deux parties distinctes.

Demander ensuite aux élèves de représenter des phrases mathématiques avec des dispositions rectangulaires ouvertes.

Exemple

$$3 \times 9 = 3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3$$

	3	3	3
3	9	9	9

Leur demander de trouver d'autres phrases mathématiques vraies que leurs pairs pourront valider.

L'important est de découvrir les relations qui existent de part et d'autre du signe d'égalité; les élèves sont alors en mesure de formuler une conjecture qu'ils vérifient avec d'autres exemples.

Exemple

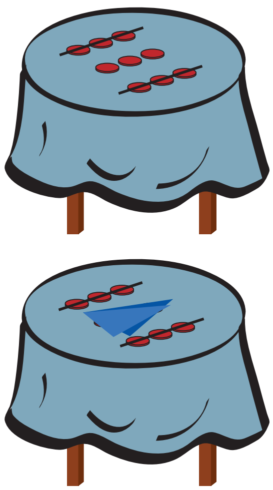
$$6 \times 30 = 6 \times 10 + 6 \times 10 + 6 \times 10$$

	10	10	10
6	60	60	60

En algèbre, des dispositions rectangulaires peuvent aussi être employées pour déterminer la valeur d'une inconnue.

Situation-problème : Sur deux tables, le même nombre de jetons sont placés sous forme de disposition rectangulaire, mais sur l'une des tables, une serviette en cache une partie. Représente symboliquement la situation avec une phrase mathématique contenant une inconnue et détermine le nombre de jetons cachés par la serviette?

Stratégie : annulation des termes



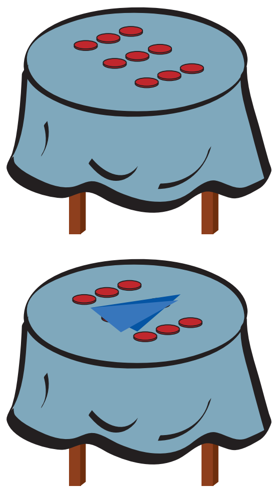
Michelle raye le même nombre de rangées de jetons visibles sur les deux tables; ainsi, la 2e rangée n'est pas biffée :

$\cancel{3} + 3 + \cancel{3} = \cancel{3} + \square + \cancel{3}$

$\square = 3$

L'annulation de termes permet de découvrir la valeur de l'inconnue (3).

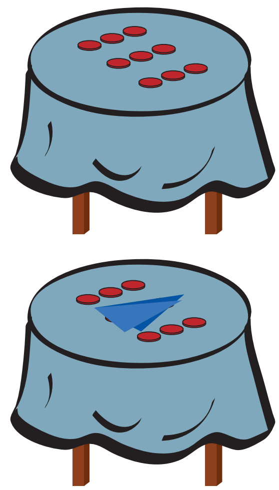
Stratégie : comparaison des termes



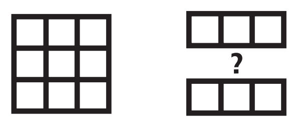
Michelle dénombre les jetons de chaque rangée sur la première table (**3**, **3** et **3**). Elle dénombre ensuite les jetons sur chaque rangée de l'autre table (**3**, $\square$ et **3**).

En comparant le nombre de jetons sur chacune des rangées de la première table au nombre de jetons sur chacune des rangées correspondantes de la deuxième table (**3 = 3**, **3 =** $\square$ et **3 = 3**), elle est en mesure de déterminer la valeur de l'inconnue (**3**).

Stratégie : disposition rectangulaire



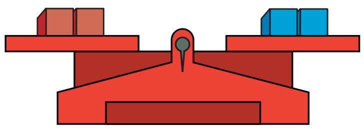
Michelle représente chaque situation par une disposition rectangulaire.



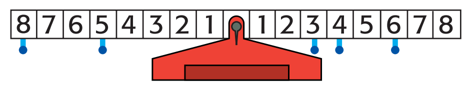
Elle compare les dispositions rectangulaires et constate que **3** cases sont nécessaires pour compléter la disposition rectangulaire de droite. Cette stratégie lui permet de découvrir la valeur de l'inconnue (**3**).

Balances

Deux modèles de balances sont utilisés pour explorer les concepts algébriques : la balance à plateaux et la balance mathématique. Grâce à ce matériel de manipulation, les élèves du cycle primaire peuvent vérifier en un coup d’œil et confirmer, le cas échéant, des situations d’égalité entre des quantités. Par le fait même, ils peuvent explorer diverses stratégies pour représenter, maintenir ou rétablir l’égalité entre les quantités.



Balance à plateaux



Balance mathématique

Introduction à la balance à plateaux

La balance à plateaux peut, dans la mesure où les objets qui y sont placés ont la même masse, favoriser la compréhension du concept d’égalité en algèbre puisque la relation entre les quantités d’objets dans chacun des plateaux est concrète et apparente.

Note : Il faut s’assurer que lorsque les élèves se servent d’une balance, ils se basent non seulement sur la masse pour établir l’équilibre, mais aussi sur les quantités. Le fait de simplement comparer les quantités contenues sur les plateaux n’est pas suffisant en algèbre; les élèves doivent explorer les relations qui existent entre ces quantités. Certains auteurs déconseillent l’usage de la balance à plateaux en algèbre au cycle primaire, car les élèves confondent facilement les concepts de quantité et de masse.

Introduction à la balance mathématique

Présenter les différentes parties de la balance mathématique en utilisant les termes appropriés (p. ex., levier, point d’appui, languette).

Placer une languette à un nombre à gauche du levier (p. ex., au nombre 5). Demander aux élèves de décrire la position du levier. Poser la question suivante :

– « Que faut-il faire pour placer la balance en équilibre? »

Échanger avec les élèves pour leur faire réaliser que :

- la partie abaissée du levier représente la quantité la plus élevée;
- dans cette situation, une quantité doit être ajoutée au côté droit du levier pour rétablir l'équilibre;
- la balance est en équilibre si les quantités sont égales sur les deux côtés du levier;
- de chaque côté de la balance, les quantités ajoutées peuvent être représentées par différentes expressions numériques, telles que **5, 4 + 1, 3 + 2, 2 + 3, 1 + 1 + 3**.

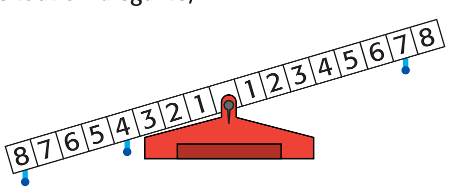
Exemples de situations-problèmes faisant appel à la balance mathématique

<table>
<tr><th>En numération</th><th>En algèbre</th></tr>
<tr><td>

Miguel constate que le fait numérique 8 + 4 est représenté sur le côté gauche d'une balance mathématique. Que doit-il faire pour placer la balance en équilibre? Écrire la phrase mathématique correspondant à la situation d'égalité.

Discuter avec les élèves des diverses solutions possibles. Former ensuite des équipes de deux et remettre à chacune une balance mathématique et un jeu de cartes de faits numériques d'addition [voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6^e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, FR 15 et FR 16)]. Leur expliquer qu'ils doivent :

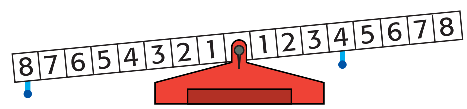
- piger une carte et représenter ce fait sur le côté gauche de la balance;
- représenter ensuite un autre fait sur le côté droit de la balance de façon à établir l'équilibre;
- vérifier si les faits numériques de part et d'autre de la balance présentent une situation d'égalité;



- écrire la phrase mathématique correspondant à cette situation d'égalité;
- reprendre la démarche de façon à trouver toutes les situations d'égalité possibles.

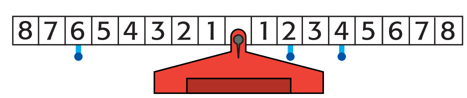
</td><td>

Lucie a placé une languette sur le 8, du côté gauche d'une balance mathématique et une autre languette sur le 4, du côté droit de la balance.



Que doit-elle faire pour créer une situation d'égalité si elle doit effectuer au moins une opération de chaque côté de la balance?

Modeler une solution possible. Par exemple, déplacer la languette sur le côté gauche de la balance du 8 vers le 6 (– 2) et ajouter une languette sur le 2 du côté droit (+ 2).



S'assurer que les élèves constatent que la balance est maintenant en équilibre et qu'elle décrit alors une situation d'égalité.

Pour chaque étape, écrire une phrase mathématique :

8 ≠ 4

8 – 2 = 4 + 2

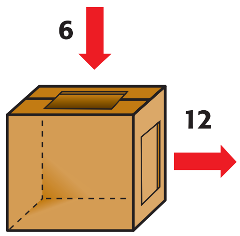
6 = 6

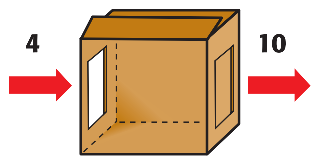
Demander aux élèves de reprendre la démarche afin de trouver une autre solution.

</td></tr>
</table>

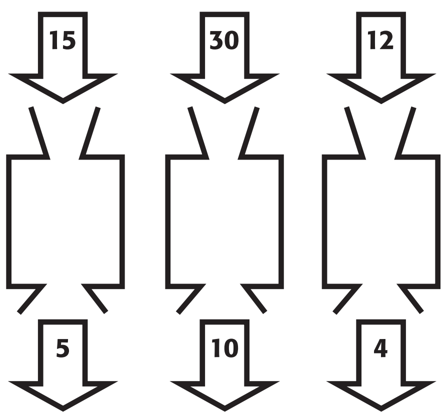
Machines mystères

L'un des modèles fréquemment utilisé pour représenter une relation est la machine mystère : une boîte munie d'une entrée et d'une sortie, dans laquelle on peut traiter différentes données. Lorsque la machine mystère sert à représenter une relation selon laquelle à chaque entrée correspond une seule et unique sortie, on la nomme, machine à fonction. Puisque la machine effectue la même opération sur chaque nombre à l'entrée, il est possible d'établir une règle de correspondance de un à un entre l'entrée et la sortie. Ce modèle permet d'initier les élèves, dès le cycle primaire, au concept de fonction avant qu'il ne leur soit enseigné plus formellement aux cycles intermédiaire et supérieur.





Pour déterminer quelle opération est cachée dans la machine mystère, les élèves peuvent, par exemple, consigner dans un tableau les correspondances entrée-sortie et analyser ensuite le changement.



Entrée	Sortie
15	5
30	10
12	4

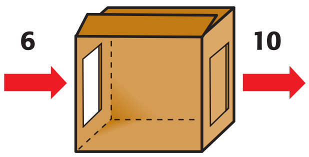
C'est l'étude des relations entre diverses entrées et sorties qui rend l'activité algébrique.

Introduction à la machine mystère

Présenter aux élèves la situation suivante.

Dans le conte de « Merlin l'enchanteur », l'apprenti fait l'essai d'une nouvelle machine que son maître a trouvée dans le château du géant Olaf. Que fait cette machine mystérieuse?

Présenter une machine mystère et démontrer son fonctionnement; par exemple, insérer un 6 par le côté gauche, insérer discrètement un 10 par l'arrière et le retirer par le côté droit.



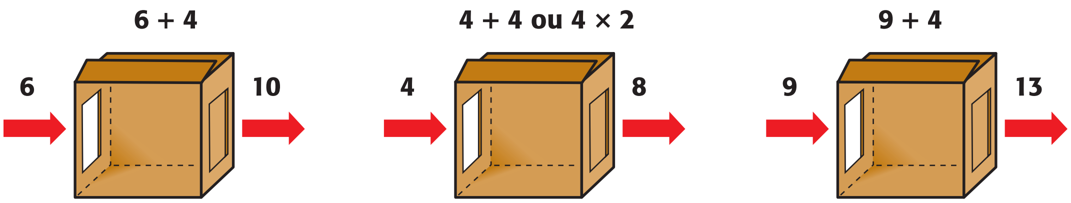
Note : Pour les plus jeunes, du matériel concret facilitera la compréhension du concept. Par exemple, montrer deux crayons qui entrent dans la machine et cinq crayons qui en ressortent.

Répéter la démarche avec d'autres nombres. À chaque essai, demander aux élèves de décrire le changement produit. Les inciter à proposer une conjecture par rapport à l'opération effectuée par la machine en posant des questions telles que :

– « Quel nombre est entré au premier essai et quel nombre en est sorti? »

– « Quel nombre est entré au deuxième essai et quel nombre en est sorti? »

– « Qu'y a-t-il de commun entre ces deux essais? »



premier essai **deuxième essai** **troisième essai**

Les élèves peuvent aussi consigner dans un tableau, les entrées et les sorties des différents essais et écrire la phrase mathématique correspondant à chacun (p. ex., **6 + 4 = 10**). Lorsque les élèves semblent avoir trouvé l'opération effectuée par la machine, leur proposer un autre nombre à l'entrée et leur demander de déterminer quel serait le nombre à la sortie.

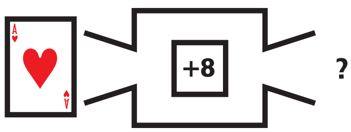
Grouper ensuite les élèves par deux. Un ou une élève doit reprogrammer la machine mystère, c'est-à-dire choisir une autre opération que la machine pourrait effectuer, et l'autre élève doit chercher à déterminer quelle est cette opération.

Exemples de situations-problèmes faisant appel à la machine mystère

En numération

En équipe de quatre, fabriquer une machine mystère. Choisir ensuite une opération arithmétique que la machine doit effectuer (p. ex., +8), l'inscrire sur un petit carton et le coller bien en vue au centre de la machine.

Tour à tour, chaque membre de l'équipe pige une carte d'un jeu de cartes (p. ex., un as), l'entre dans la machine et indique quel chiffre en sortira, compte tenu de l'opération que la machine doit effectuer (p. ex., un as + 8 = 9).



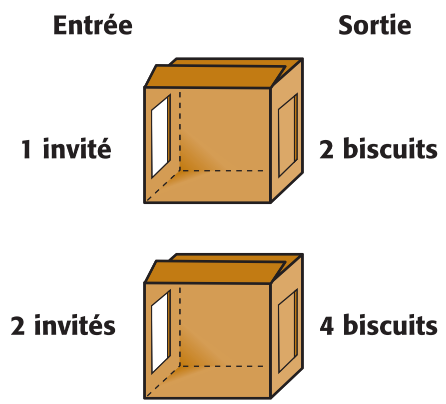
Note : La machine mystère est un moyen ludique qui facilite la mémorisation des faits numériques de base, tels que les faits d'addition, de soustraction et de multiplication.

En algèbre

Joëlle invite des amis à une fête. Elle demande à chaque invité d'apporter 2 biscuits en leur indiquant que ces biscuits seront partagés lors de la collation. Combien d'amis Joëlle doit-elle inviter si elle souhaite avoir 16 biscuits à partager?

Utiliser une boîte de carton pour représenter une machine mystère.

Modeler l'arrivée du premier invité à l'aide de la machine mystère : entrer le nombre 1 dans le côté gauche de la boîte et ressortir le nombre 2 du côté droit de la boîte.



Souligner les termes suivants :

- **entrée :** indique le nombre d'invités;
- **machine mystère :** établit la relation entre le nombre de biscuits et le nombre d'invités;
- **sortie :** indique le nombre de biscuits à partager.

En numération	En algèbre
	Modeler ensuite l'arrivée de 2 invités, 3 invités, etc. Inciter les élèves à proposer une conjecture par rapport à l'opération effectuée par la machine en posant des questions telles que : – « Quelles données changent? » – « Quelle est la relation entre le nombre de biscuits et le nombre d'invités? » – « Quelle opération effectue la machine mystère? » – « Que représente chaque nombre? » – « Si Joëlle souhaite avoir 10 biscuits pour la collation, combien d'amis doit-elle inviter? » Ces questions attirent l'attention des élèves sur le fait qu'un changement dans une quantité (le nombre d'invités) produit nécessairement un changement dans l'autre quantité (le nombre de biscuits à partager). Il importe de revenir régulièrement au contexte concret et de retarder le recours à la représentation symbolique. Sinon, les élèves auront tendance à délaisser l'analyse des changements et des relations (raisonnement algébrique) au profit d'un simple calcul.

Tables de valeurs

Une table de valeurs est une *présentation méthodique de deux variables dont l'une dépend de l'autre. Une telle table peut aider à visualiser le lien de dépendance qui unit les deux variables* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 100). Au cycle primaire, la table de valeurs est surtout employée en modélisation pour établir une relation entre une représentation concrète et une représentation abstraite (voir fascicule 1, p. 56-57).

Suite : 3, 6, 9, …

Rang	1	2	3
Terme	3	6	9

Introduction à la table de valeurs

Placer sur un rétroprojecteur les quatre premières figures d'une suite non numérique à motif croissant créée à l'aide de mosaïques géométriques.

Exemple

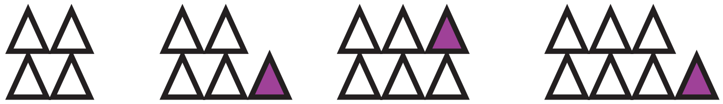


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

Demander à un ou une élève de placer des mosaïques géométriques sur le rétroprojecteur afin d'illustrer les deux prochains termes de la suite. Inviter un ou une autre élève à écrire au-dessus de chaque figure le nombre de mosaïques qui la composent.

4 5 6 7 8 9

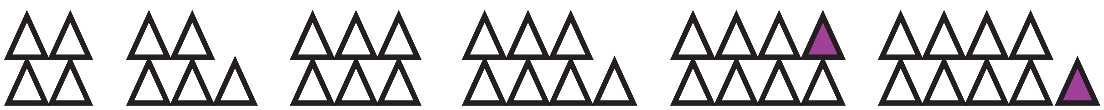


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4 Figure 5 Figure 6

Demander aux élèves d'indiquer quels sont les deux éléments d'information qui accompagnent chaque figure (*le rang de la figure et le nombre de mosaïques qui la composent*). Leur demander de transcrire les données correspondantes dans la table de valeurs suivante :

Rang de la figure						
Nombre de mosaïques						

Leur demander ensuite de représenter la régularité entre les nombres de mosaïques à l'aide de bonds.

Rang de la figure	1	2	3	4	5	6
Nombre de mosaïques	4	5	6	7	8	9

+1 +1 +1 +1 +1

Demander aux élèves de prolonger la table de valeurs jusqu'au 10e terme en utilisant cette régularité.

Rang de la figure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de mosaïques	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Note : Au cycle moyen, les élèves sont incités à observer une autre régularité, à savoir celle qui décrit la relation entre le rang (r) d'une figure et le nombre de mosaïques (m) qui la composent.

Rang de la figure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de mosaïques	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Ils peuvent décrire cette régularité en disant, par exemple, que le nombre de mosaïques ($\boldsymbol{m}$) qui composent une figure est toujours 3 de plus que le rang ($\boldsymbol{r}$) de cette figure ($\boldsymbol{m = r + 3}$). Ils vérifient cette situation d'égalité en utilisant quelques exemples de la table de valeurs (p. ex., pour la 10^{e} figure, le nombre de mosaïques est **10 + 3 = 13** ou **13 = 10 + 3**). Ils utilisent éventuellement l'équation pour déterminer le nombre de mosaïques qui composent une figure quelconque (p. ex., la 16^{e} figure) et ils vérifient ce nombre en utilisant la régularité entre les nombres de mosaïques (+1).

Lorsque les élèves sont à l'aise à utiliser une table de valeurs, il est possible dès le cycle primaire de faire le lien avec une situation d'égalité.

Exemple

Équation : □ + ○ = 10

Fraises [□]	Bleuets [○]
1	**9**
2	**8**
3	**7**
4	**6**
…	…

Exemples de situations-problèmes faisant appel à la table de valeurs

En numération

Lucie invente un nouveau jeu de dominos composé de 15 pièces. Elle dessine 1 point sur le côté gauche du 1er domino, 2 points sur le côté gauche du 2e domino, et ainsi de suite jusqu'au 15e domino. Elle décide ensuite que le nombre de points sur le côté droit de chaque domino sera le double du nombre de points sur le côté gauche. Quels sont les 15 dominos qui font partie du jeu de Lucie?

Remettre aux élèves 3 petits cartons divisés en deux. Leur demander de dessiner les 3 premiers dominos de Lucie. Demander à un ou une élève de venir présenter ses 3 dominos.

Discuter avec les élèves du travail qu'exige la représentation des 15 dominos. Leur proposer de résumer le nombre de points sur chaque domino en utilisant une table de valeurs.

Au tableau, noter dans une table de valeurs le nombre de points sur le côté gauche du premier domino et le nombre de points sur le côté droit.

Points sur le côté gauche	Points sur le côté droit
1	2

Compléter la table de valeurs pour les 2 autres dominos.

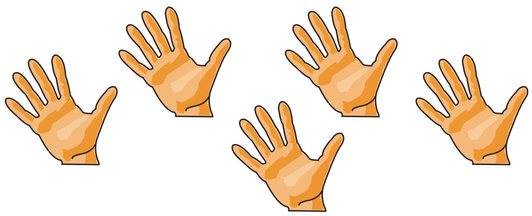
Points sur le côté gauche	Points sur le côté droit
1	2
2	4
3	6

Demander aux élèves de compléter la table de valeurs pour les 12 autres dominos.

En algèbre

Samuel veut peindre une murale géante sur laquelle il représenterait chaque élève de la classe par une empreinte de sa main. Déterminer le nombre de doigts qu'il y aura sur la murale.

Placer les élèves en équipes de deux. Demander aux équipes de représenter les doigts de 5 mains à l'aide de matériel concret ou d'un dessin et d'indiquer combien de doigts il y a en tout.



Demander à quelques élèves de partager leur travail. Discuter avec eux du temps requis pour produire la représentation qui leur a permis de déterminer le nombre total de doigts sur 5 mains.

Leur suggérer d'utiliser une table de valeurs pour observer la relation entre le nombre d'élèves et le nombre de doigts et ainsi déterminer plus rapidement le nombre total de doigts qu'il y aura sur la murale. Par exemple, s'il y a 26 élèves dans la classe, les élèves pourraient créer la table suivante :

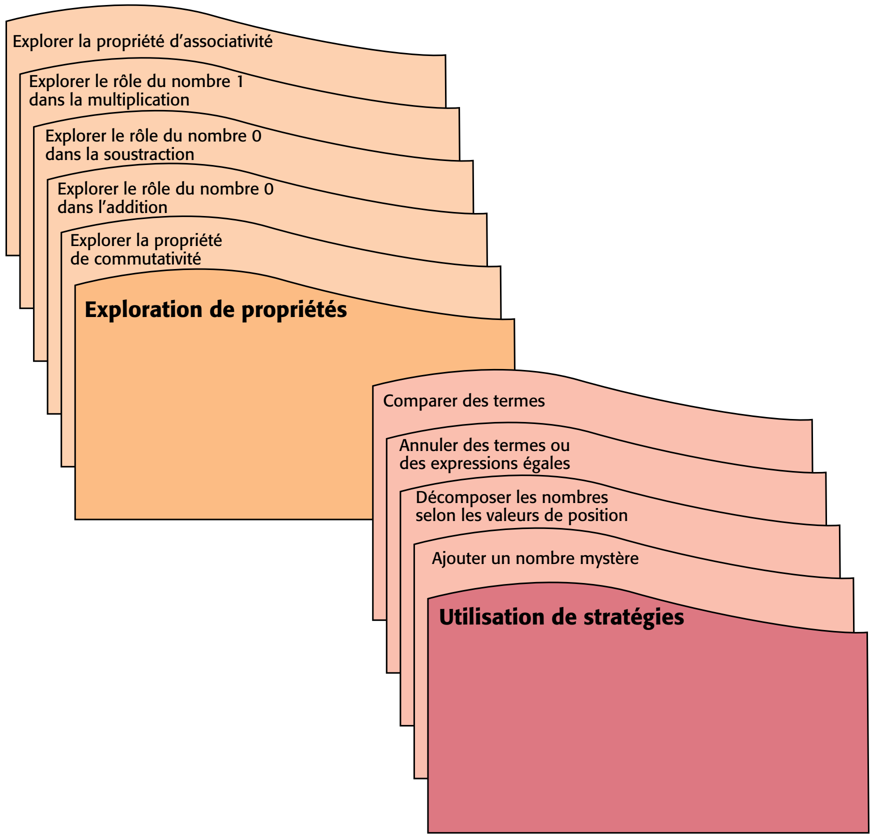
Élèves	1	5	10	20	26
Doigts	5	25	50	100	130

Demander aux élèves de décrire la relation entre le nombre d'élèves et le nombre de doigts. Ils pourraient dire que le nombre de doigts correspond à 5 fois le nombre d'élèves. Leur demander ensuite de prolonger la table de valeurs et de déterminer combien il y aurait de doigts sur la murale si 50 élèves de l'école participaient.

ANNEXE B – ACTIVITÉS LIÉES AUX SITUATIONS D'ÉGALITÉ EN ALGÈBRE ET EN NUMÉRATION

Pour faciliter l'apprentissage du concept d'égalité, l'enseignant ou l'enseignante utilise les connaissances des élèves en numération et pose des questions et des gestes qui leur permettront de traiter l'information de manière algébrique. L'exploration de certaines propriétés des nombres et des opérations et l'utilisation de stratégies pour vérifier une situation d'égalité ont pour but d'amener les élèves :

- à comprendre que certaines propriétés des nombres et des opérations permettent de reconnaître l'égalité sans avoir recours au calcul;
- à utiliser des stratégies afin d'établir les relations entre les termes ou les expressions numériques de part et d'autre du signe = .



Dans cette annexe, on présente différentes activités qui favorisent le développement du concept d'égalité. Regroupées en deux sections, elles ont trait aux deux énoncés de la grande idée 2. La première section, intitulée *Exploration de propriétés*, présente cinq explorations de propriétés des nombres et des opérations, soit :

- explorer la propriété de commutativité;
- explorer le rôle du nombre 0 dans l'addition;
- explorer le rôle du nombre 0 dans la soustraction;
- explorer le rôle du nombre 1 dans la multiplication;
- explorer la propriété d'associativité.

La deuxième section, intitulée *Utilisation de stratégies*, présente quatre stratégies qui permettent de gérer efficacement des situations d'égalité, soit :

- ajouter un nombre mystère;
- décomposer les nombres selon les valeurs de position;
- annuler des termes ou des expressions égales;
- comparer des termes.

Dans chaque cas, on explique pourquoi la propriété ou la stratégie est utile en algèbre et on présente un exemple de son application pour chacun des deux énoncés de la grande idée 2 (voir p. 27).

Les cinq explorations de propriétés sont aussi de bons exemples de situations dans lesquelles les élèves peuvent développer l'habileté à formuler une conjecture et une généralisation. Le tableau à la page suivante résume les principales conjectures en algèbre qui sont à la portée des élèves du cycle primaire.

Note : Les exemples dans ce tableau, ainsi que dans les activités qui suivent, présentent des nombres qui dépassent les limites établies par le programme-cadre. Ceci a pour objectif d'inciter les élèves à recourir à des stratégies relatives aux propriétés des nombres et des opérations au lieu d'effectuer de simples calculs.

Conjectures	Exemples
Rôle du nombre 0 dans l'addition	
Lorsqu'on ajoute 0 à un nombre, on obtient le nombre de départ.	**2 230 + 0 = 2 230**
Lorsqu'on ajoute un nombre à 0, on obtient le nombre ajouté.	**0 + 2 230 = 2 230**
Rôle du nombre 0 dans la soustraction	
Lorsqu'on soustrait 0 d'un nombre, on obtient le nombre de départ.	**776 – 0 = 776**
Lorsqu'on soustrait un nombre de lui-même, on obtient 0.	**776 – 776 = 0**
Rôle du nombre 1 dans la multiplication	
Lorsqu'on multiplie un nombre par 1, on obtient le nombre de départ.	**2 230 × 1 = 2 230**
Lorsqu'on multiplie 1 par un nombre, on obtient ce nombre.	**1 × 2 230 = 2 230**
Commutativité de l'addition et de la multiplication	
Lorsqu'on additionne deux nombres, on peut changer l'ordre de ces nombres et l'égalité demeure vraie.	**43 + 85 = 85 + 43**
Lorsqu'on multiplie deux nombres, on peut changer l'ordre de ces nombres et l'égalité demeure vraie.	**55 × 29 = 29 × 55**
Opérations inverses	
Lorsqu'à partir d'un nombre, on additionne et soustrait une même quantité, on obtient le nombre de départ.	**35 + 45 – 45 = 35**
Propriétés des nombres	
Lorsqu'on additionne des nombres qui ont un 5 ou un 0 à la position des unités, la somme aura toujours un 5 ou un 0 à la position des unités.	**700 + 275 = 975** **705 + 205 = 910**
Lorsqu'on additionne deux nombres pairs, la somme est toujours un nombre pair.	**50 + 52 = 102**

Exploration de propriétés

C’est par l’exploration de certaines propriétés des nombres et des opérations que les élèves approfondissent leur compréhension du sens du symbole et du concept d’égalité. Mieux comprendre ces propriétés permet aux élèves de les utiliser plus souvent comme stratégie de résolution de problèmes.

Explorer la propriété de commutativité

POURQUOI?

En ayant recours à cette propriété, l’enseignant ou l’enseignante incite les élèves à reconnaître qu’il est possible d’intervertir les termes d’une équation sans en modifier la somme ou le produit. La multiplication et l’addition sont des opérations commutatives (p. ex., $\mathbf{2 + 3 = 3 + 2}$; $\mathbf{4 \times 5 = 5 \times 4}$), alors que la soustraction et la division ne le sont pas (p. ex., $\mathbf{12 - 6 \neq 6 - 12}$; $\mathbf{12 \div 2 \neq 2 \div 12}$). Cette propriété permet aux élèves de reconnaître rapidement la validité d’une situation d’égalité sans effectuer de calcul (p. ex., $\mathbf{37 + 49 = 49 + 37}$).

Cette propriété permet également de résoudre certaines équations contenant une inconnue. Par exemple, en utilisant la propriété de commutativité dans l’équation $\mathbf{78 + 49 = 49 +} \blacktriangle$, il est facile de déduire que la valeur de $\blacktriangle$ est 78 sans effectuer de calcul. Enfin, les élèves pourront formuler une généralisation, à savoir qu’il est possible de modifier l’ordre des termes dans toute addition ou l’ordre des facteurs dans toute multiplication sans que cela change la somme ou le produit.

Exemples

$\square + \bullet = \bullet + \square$

$\square \times \bullet = \bullet \times \square$

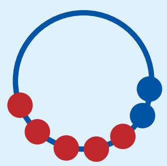
COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette propriété pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple 1

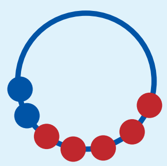
Demander aux élèves de confectionner un collier en enfilant 5 perles rouges et 2 perles bleues, puis leur suggérer d'écrire la phrase mathématique correspondante.

(5 + 2 = 7)



Demander aux élèves de tourner le collier et d'écrire la phrase mathématique correspondante.

(2 + 5 = 7)



Proposer ensuite aux élèves de comparer les deux phrases mathématiques et de répondre aux questions suivantes :

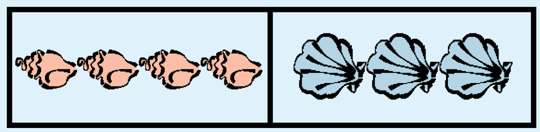
- « Que remarquez-vous au sujet de l'ordre des perles? »
- « Que remarquez-vous au sujet de la quantité de perles? »
- « Pourquoi la quantité est-elle la même dans les deux cas? »
- « Changez la quantité de perles sur le collier et écrivez deux phrases mathématiques. Comparez les phrases mathématiques. Que remarquez-vous? »
- « Si vous faites la même démarche en utilisant une grande quantité de perles sur le collier comme 100, 300 ou 500, que pouvez-vous affirmer au sujet des situations d'égalité que vous observez? »

Note : Refaire l'activité en demandant aux élèves de se déplacer pour observer le collier dans l'autre direction au lieu de le tourner.

Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple 1

Présenter aux élèves la situation suivante :

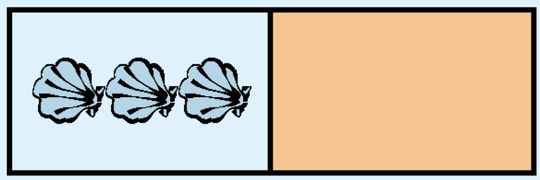
Jacob et Gabrielle ont ramassé 7 coquillages. Jacob les dispose ainsi :



Demander aux élèves d'écrire la phrase mathématique correspondante.

(4 + 3 = 7)

Gabrielle a disposé autrement les mêmes 7 coquillages; le sable en recouvre quelques-uns :



Demander aux élèves d'écrire l'équation correspondante.

($3 + \triangle = 7$)

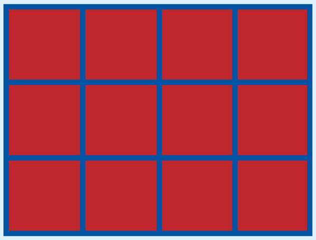
Proposer aux élèves de résoudre l'équation et de répondre aux questions suivantes :

- « Que remarquez-vous au sujet de l'ordre des coquillages? »
- « Le changement de l'ordre a-t-il modifié la quantité de coquillages? »
- « Obtiendrez-vous les mêmes résultats avec deux autres quantités? Essayez-le. »

Exemple 2

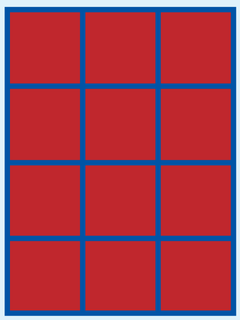
Demander aux élèves de colorier 3 rangées de 4 carrés sur du papier quadrillé et d'écrire la phrase mathématique correspondante.

(**3 × 4 = 12**)



Leur demander de tourner le papier quadrillé d'un quart de tour et d'écrire la phrase mathématique correspondante.

(**4 × 3 = 12**)



Inciter les élèves à comparer les deux phrases mathématiques en posant des questions telles que :

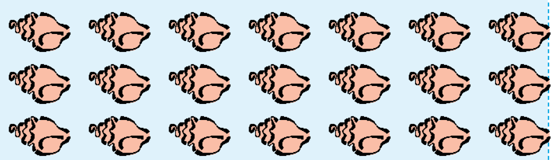
– « Que remarquez-vous au sujet du produit? »
– « Pourquoi la quantité est-elle la même dans les deux cas? »
– « Obtiendrez-vous le même résultat avec 5 colonnes de 6 carrés et 6 colonnes de 5 carrés? »
– « Essayez-le avec des grands nombres comme : **100 × 4 = ?** et **4 × 100 = ?** Que remarquez-vous? »

Note : Refaire l'activité en demandant aux élèves de se déplacer et d'observer le côté le plus court d'abord et le plus long ensuite sans tourner le papier quadrillé.

Exemple 2

Présenter aux élèves la situation suivante :

Jacob a disposé 21 coquillages en 3 rangées.



Leur demander d'écrire la phrase mathématique correspondante.

(**3 × 7 = 21**)

Puis, continuer à décrire la situation :

Gabrielle veut disposer les mêmes coquillages en 7 rangées.

Demander aux élèves d'écrire l'équation qui permettra à Gabrielle de déterminer le nombre de coquillages par rangée.

(**7 ×** $\triangle$ **= 21**)

Leur demander d'illustrer la disposition des coquillages de Gabrielle et de résoudre l'équation en comparant les deux phrases mathématiques.

Poser ensuite les questions suivantes :

– « Que remarquez-vous au sujet des quantités de coquillages disposés par Jacob et par Gabrielle? »
– « Si vous comparez le nombre de rangées dans les dispositions de Jacob et de Gabrielle, que remarquez-vous? »
– « Obtiendrez-vous le même résultat avec deux autres quantités? Essayez-le. »

Exemple 3

Demander aux élèves de déterminer si les phrases mathématiques suivantes sont vraies ou fausses sans effectuer de calcul.

$\mathbf{6 + 3 = 3 + 6}$

$\mathbf{45 + 34 = 34 + 46}$

$\mathbf{67 + 89 = 89 + 67}$

$\mathbf{3 \times 8 = 8 \times 2}$

$\mathbf{75 \times 37 = 37 \times 78}$

$\mathbf{12 \times 45 = 45 \times 12}$

$\mathbf{345 \times 200 = 200 \times 345}$

Après avoir présenté chaque phrase mathématique, poser les questions suivantes :

– « Comment pouvez-vous affirmer que cette phrase est vraie ou fausse? »
– « Que remarquez-vous au sujet des termes de cette égalité? »

Exemple 3

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

6 + 9 = 9 + ❖

56 + 78 = 78 + ▲

✣ + 90 = 90 + 23

5 × 7 = 7 × ✹

85 × 23 = 23 × ♣

♦ × 73 = 73 × 67

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l’inconnue, puis poser les questions suivantes :

– « Comment avez-vous déterminé la valeur de l’inconnue dans cette équation? »
– « Pourriez-vous utiliser la même stratégie avec de plus grands nombres, comme dans l’équation **160 + 195 = 195 + ▲** ? »
– « Cette stratégie fonctionne-t-elle si le signe d’addition est remplacé par le signe de soustraction ou si le signe de multiplication est remplacé par le signe de division? »

Explorer le rôle du nombre 0 dans l’addition

POURQUOI?

En ayant recours à cette propriété, l’enseignant ou l’enseignante incite les élèves à proposer des conjectures telles que : « Si j’ajoute 0 à un nombre (p. ex., $\mathbf{5 + 0}$), j’obtiens le nombre de départ et si j’ajoute un nombre quelconque à 0 (p. ex., $\mathbf{0 + 5}$), j’obtiens le nombre ajouté. » En appliquant ces conjectures à différents nombres, les élèves seront en mesure de formuler une généralisation, à savoir que cette propriété du nombre 0 est vraie pour tous les nombres. Au cycle moyen, les élèves identifieront formellement le nombre 0 comme étant l’élément neutre de l’addition.

COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette propriété pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple

Présenter 6 jouets aux élèves et leur demander de les dénombrer. Recouvrir les jouets d'un tissu et préciser que vous allez ajouter un nombre mystère de jouets.

Faire semblant d'ajouter des jouets, mais n'ajouter rien. Retirer le tissu et poser les questions suivantes :

– « Combien y a-t-il de jouets maintenant? »
– « Combien de jouets ai-je ajoutés? »

Demander aux élèves d'écrire une phrase mathématique pour représenter la situation.

(**6 + 0 = 6**)

Refaire l'activité en ajoutant 6 jouets à 0 jouet afin de représenter **0 + 6 = 6**.

Faire remarquer que puisque **6 + 0 = 6** et que **0 + 6 = 6**, on peut conclure que **6 + 0 = 0 + 6** et faire le lien avec la propriété de commutativité de l'addition.

Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

★ = 8 + 0

0 + 9 = ✱

47 + 0 = ▲

✹ = 786 + 0

893 + 0 = ■

923 = ◗ + 0

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue, puis poser les questions suivantes :

– « Comment avez-vous déterminé la valeur de l'inconnue? »
– « Quelle somme obtenez-vous lorsque vous ajoutez 0 à un nombre? »
– « Quelle somme obtenez-vous lorsque vous ajoutez un nombre à 0? »

Encourager les élèves à proposer une conjecture sur le rôle du nombre 0 dans une addition, puis poser des questions telles que :

– « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à d'autres nombres? Essayez-le. »
– « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à tous les nombres? Pourquoi? »

Explorer le rôle du nombre 0 dans la soustraction

POURQUOI?

En ayant recours à cette propriété, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à proposer une conjecture telle que : « Quand je soustrais 0 d'un nombre (p. ex., **5 – 0**), j'obtiens le nombre de départ. » En appliquant cette conjecture à différents nombres, ils seront en mesure de formuler une généralisation, à savoir que cette propriété du nombre 0 est vraie pour tous les nombres.

COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette propriété pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

<table>
<tr>
<td>Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple

Présenter 8 jouets aux élèves et leur demander de les dénombrer. Recouvrir les jouets d'un tissu et préciser aux élèves que vous allez enlever un nombre mystère de jouets.

Faire semblant d'enlever des jouets, mais n'enlever rien. Retirer le tissu et poser les questions suivantes :
– « Combien y a-t-il de jouets maintenant? »
– « Combien de jouets ai-je enlevés? »
Demander aux élèves d'écrire une phrase mathématique pour représenter la situation.

(8 – 0 = 8)</td>
<td>Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

☺ = 9 – 0

45 – 0 = ■

✚ = 786 – 0

893 – 0 = ✿

923 = ▼ – 0

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue, puis poser les questions suivantes :
– « Comment avez-vous déterminé la valeur de l'inconnue? »
– « Quelle différence obtenez-vous lorsque vous enlevez 0 à un nombre? »</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Encourager les élèves à proposer une conjecture sur le rôle du nombre 0 dans une soustraction, puis poser des questions telles que :
– « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à d'autres nombres? Essayez-le. »
– « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à tous les nombres? Pourquoi? »</td>
</tr>
</table>

Explorer le rôle du nombre 1 dans la multiplication

POURQUOI?

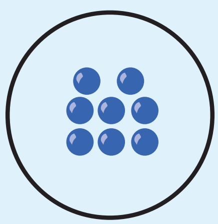
En ayant recours à cette propriété, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à proposer des conjectures telles que : « Si je multiplie un nombre par 1 (p. ex., **6 × 1**), j'obtiens le nombre de départ et si je multiplie le nombre 1 par un nombre quelconque (p. ex., **1 × 6**), j'obtiens ce même nombre. » En appliquant ces conjectures à différents nombres, ils seront en mesure de valider une situation d'égalité sans effectuer de calcul et ainsi de formuler une généralisation, à savoir que cette propriété du nombre 1 est vraie pour tous les nombres. Au cycle moyen, les élèves identifieront formellement le nombre 1 comme étant l'élément neutre de la multiplication.

COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette propriété pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple

Présenter une assiette contenant 8 billes aux élèves et leur demander de les dénombrer.



Souligner le fait qu'il s'agit de 1 groupe de 8 billes et écrire la phrase mathématique correspondante :

1 × 8 = 8

Répéter l'activité avec des ensembles de 8 éléments différents (p. ex., 1 groupe de 8 élèves, 1 groupe de 8 crayons). Faire remarquer que 1 × 8 c'est toujours égal à 8.

Reprendre la même démarche avec d'autres nombres.

Présenter ensuite une activité impliquant 8 groupes de 1 élément (p. ex., 8 élèves ont chacun 1 bicyclette) afin de représenter **8 × 1 = 8**.

Faire remarquer que puisque **1 × 8 = 8** et que **8 × 1 = 8**, on peut conclure que **1 × 8 = 8 × 1** et faire le lien avec la propriété de commutativité de la multiplication.

Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

✱ = 8 × 1

1 × 5 = ◆

57 × 1 = ✪

567 = ♡ × 567

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue, puis poser les questions suivantes :
- « Comment avez-vous déterminé la valeur de l'inconnue? »
- « Qu'advient-il du produit lorsque vous multipliez un nombre par 1? »
- « Qu'advient-il du produit lorsque vous multipliez 1 par un nombre? »

Encourager les élèves à proposer une conjecture sur le rôle du nombre 1 dans une multiplication, puis poser des questions telles que :
– « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à d'autres nombres? Essayez-le. »
– « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à tous les nombres? Pourquoi? »

Explorer la propriété d'associativité

POURQUOI?

La propriété d'associativité de l'addition et de la multiplication ne fait pas partie des contenus d'apprentissage au cycle primaire. Par contre, une exploration informelle de cette propriété permet aux élèves de développer davantage leur pensée algébrique.

En ayant recours à cette propriété, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à modifier l'ordre dans lequel ils additionnent ou multiplient trois nombres. Les élèves se rendent compte au fur et à mesure de leur exploration que :

- l'addition et la multiplication sont des opérations associatives;

  Exemples

  $\mathbf{2 + (9 + 5) = (2 + 9) + 5}$

  $\mathbf{4 \times (3 \times 2) = (4 \times 3) \times 2}$

- la soustraction et la division ne sont pas des opérations associatives.

  Exemples

  $\mathbf{12 - (6 - 5) \neq (12 - 6) - 5}$

  $\mathbf{12 \div (6 \div 2) \neq (12 \div 6) \div 2}$

Comme c'est le cas pour la propriété de commutativité, ils peuvent utiliser cette propriété pour reconnaître une situation d'égalité sans effectuer de calcul.

Exemple

$\mathbf{15 + (25 + 17) = (15 + 25) + 17}$

Important…

Dans ce fascicule, les parenthèses sont utilisées pour assurer l'exactitude mathématique du message. Par contre, avec les élèves du cycle primaire, il est préférable de s'en tenir à des façons moins abstraites de mettre en évidence les regroupements. Par exemple :

$$2 + 9 + 5 = 2 + 9 + 5$$

ou $\underbrace{2 + 9} + 5 = 2 + \underbrace{9 + 5}$

La propriété d'associativité permet également de résoudre certaines équations contenant une inconnue. Par exemple, en utilisant la propriété d'associativité pour déterminer la valeur de l'inconnue dans l'équation **(76 × 45) × 93 = ▲ × (45 × 93)**, il est facile de déduire, sans faire de calcul, que la valeur de ▲ est 76. Enfin, les élèves pourraient formuler une généralisation, à savoir qu'il est possible de modifier le regroupement des termes dans toute addition ou celui des facteurs dans toute multiplication sans que cela change la somme ou le produit.

Exemples

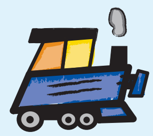
(□ + ●) + ▲ = □ + (● + ▲)

(□ × ●) × ▲ = □ × (● × ▲)

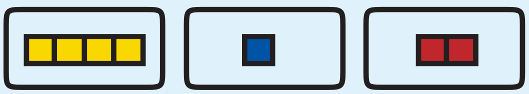
COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette propriété pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple 1



Présenter aux élèves trois wagons de train construits avec des cubes emboîtables de différentes couleurs.



wagon 1 **wagon 2** **wagon 3**

Leur proposer d'aider M. Bontrain, le chef de train qui désire regrouper **deux wagons** sans en modifier l'ordre.

Représenter chaque situation possible à l'aide des cubes et écrire la phrase mathématique correspondante. Afin d'éviter d'avoir recours aux parenthèses, utiliser des encadrés pour illustrer les wagons.

Note : Les wagons peuvent être regroupés de deux façons :

- regrouper les wagons 1 et 2;

$$\boxed{\mathbf{4+1} \;|\; \mathbf{+2}} \quad = \quad \boxed{\mathbf{7}}$$

- regrouper les wagons 2 et 3;

$$\boxed{\mathbf{4+} \;|\; \mathbf{1+2}} \quad = \quad \boxed{\mathbf{7}}$$

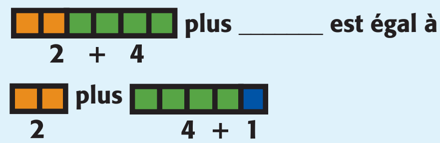
Poser les questions suivantes aux élèves :
– « Y a-t-il d'autres regroupements possibles de wagons? Comment le savez-vous? »
– « Quelle est la somme des cubes qui forment le train dans chaque cas? » (*Les deux sommes sont égales à 7; elles sont pareilles.*)

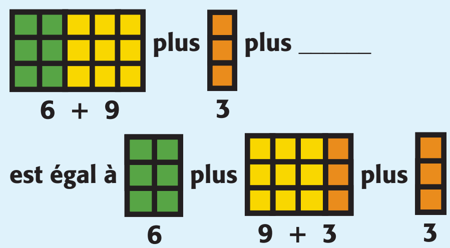
$$\boxed{\mathbf{4+1} \;|\; \mathbf{+2}} \quad = \quad \boxed{\mathbf{4+} \;|\; \mathbf{1+2}}$$

– « Comment est-ce possible que la somme reste pareille même si nous avons différents regroupements de wagons? » (*Ce sont les mêmes cubes qui sont regroupés différemment; la quantité totale de cubes ne change pas.*)

Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple 1

Présenter les situations suivantes aux élèves et leur demander comment ils peuvent les rendre vraies.

a) 

b) 

Leur demander ensuite de représenter symboliquement chaque situation.

Note : Les représentations symboliques sont :

a) **(2 + 4) + ___ = 2 + (4 + 1)**

b) **(6 + 9) + 3 + ___ = 6 + (9 + 3) + 3**

Poser les questions suivantes :
– « Que remarquez-vous au sujet des expressions de chaque côté du signe = ? » (*Elles représentent différents regroupements des mêmes nombres.*)
– « Pourquoi la somme ne change-t-elle pas lorsqu'on regroupe les cubes de différentes façons? » (*Ce sont toujours les mêmes cubes qui sont additionnés.*)

Poursuivre en présentant l'équation **(50 + ♥) + 10 = 50 + (5 + 10)** et en leur demandant de déterminer la valeur de l'inconnue.

Poser les questions suivantes :
– « Comment avez-vous déterminé la valeur de l'inconnue? »

– « Est-ce que cela fonctionnerait avec trois autres nombres? Démontrez-le à l'aide d'une droite numérique ouverte double et d'une phrase mathématique. »

Leur demander d'expliquer à un ou une autre élève ce qu'ils ont observé. Par la suite, leur demander :

– « Que pourriez-vous écrire dans votre journal mathématique collectif au sujet de ce que vous avez découvert aujourd'hui? »

Reprendre l'activité avec un plus grand nombre de wagons.

Note : Si les élèves connaissent la propriété de commutativité, certains pourraient modifier l'**ordre** des termes à additionner (p. ex., **4 + 2 + 1**). Si tel est le cas, leur demander de justifier pourquoi il est possible de modifier l'ordre. Sinon, mentionner simplement que l'ordre des wagons ne peut être modifié puisqu'ils sont attachés ainsi sur la voie ferrée.

– « Peut-on le faire d'une autre façon? » (*Alors que certains élèves recourent à l'arithmétique, d'autres utilisent l'algèbre; ils observent les relations entre les expressions qui figurent de part et d'autre du signe =.*)

– « Est-il nécessaire d'effectuer un calcul pour déterminer la valeur de l'inconnue? Pourquoi? »

– « Est-ce que ça fonctionnerait avec d'autres nombres? Essayez-le avec des grands nombres comme 50, 100 et 200. »

– « Qu'avez-vous découvert au cours de la résolution de ce problème? »

Exemple 2

Demander aux élèves de vérifier l'égalité des phrases mathématiques suivantes sans effectuer de calcul.

(7 + 4) + 6 = 7 + (4 + 6)

46 + (34 + 67) = 46 + (34 + 46)

67 + (89 + 103) = (67 + 89) + 105

Pour chaque phrase, poser des questions telles que :

– « Comment pouvez-vous affirmer que cette phrase est vraie (ou fausse)? »

– « Que faut-il faire pour rendre cette phrase vraie? »

Exemple 2

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

(6 + 7) + 5 = 6 + (7 + ▲)

56 + (78 + 84) = (56 + 78) + ✱

(■ + 90) + 387 = 567 + (90 + 387)

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue, puis poser les questions suivantes :

– « Comment avez-vous déterminé la valeur de l'inconnue dans cette équation? »

– « Pourriez-vous utiliser la même stratégie avec d'autres nombres? »

Utilisation de stratégies

La section qui suit présente quatre stratégies qui favorisent l'intégration de la pensée algébrique au sens du nombre en numération. Elles permettent d'établir des relations entre les termes ou les expressions numériques qui composent une phrase mathématique ou une équation. Éventuellement ces stratégies devraient devenir pour les élèves, des outils de résolution de problèmes. Afin d'aider ces derniers à développer l'habileté à utiliser ces stratégies, il est important de les intégrer à l'enseignement des mathématiques (minileçons, situations-problèmes, échanges mathématiques) dès le cycle primaire.

Ajouter un nombre mystère

POURQUOI?

En ayant recours cette stratégie, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à proposer des conjectures telles que « Si j'ajoute 0 à l'expression d'un côté du signe = , je ne modifie pas l'égalité, car l'ajout de 0 à un nombre ou à une expression ne change pas sa valeur (p. ex., **34 + 67 = 34 + 67 + 0**). De même, si j'ajoute la même quantité de part et d'autre du signe = , je ne modifie pas l'égalité (p. ex., **34 + 67 + 20 = 34 + 67 + 20**). » En appliquant ces conjectures à différents nombres, ils seront en mesure de valider ou de confirmer une situation d'égalité sans effectuer de calcul et ainsi de formuler une généralisation, à savoir que cette stratégie est vraie pour tous les nombres.

L'ajout d'un nombre mystère d'un seul côté ou des deux côtés du signe = n'est qu'une façon d'établir une égalité. Pour d'autres exemples, voir *Habileté à rétablir une situation d'égalité* (p. 44-47).

Au cycle moyen, les élèves pourront constater que l'on maintient l'égalité dans toutes les situations où l'on intervient de la même façon de part et d'autre du signe = :

- le retrait de la même quantité de chaque côté du signe = : $(a + b) - c = (a + b) - c$;
- la multiplication par la même quantité de chaque côté du signe = : $n \times (a + b) = n \times (a + b)$;
- la division par la même quantité de chaque côté du signe = : $(a + b) \div n = (a + b) \div n$.

COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette stratégie pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple

Demander aux élèves groupés en équipes de deux de construire chacun une tour avec 6 cubes emboîtables, puis poser la question suivante :

– « Que remarquez-vous en observant les deux tours? » (*Les tours ont la même hauteur et le même nombre de cubes*.)

Leur demander d'ajouter, au choix, un certain nombre de cubes aux tours tout en s'assurant de maintenir l'égalité.

Demander à chaque équipe d'expliquer comment elle a maintenu l'égalité. Écrire ensuite leurs réponses dans un tableau. Par exemple :

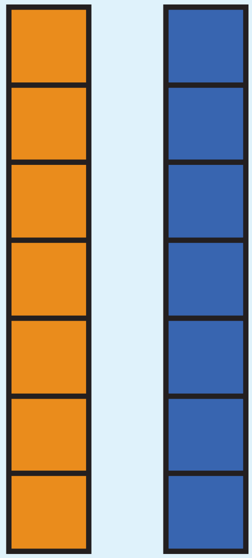
Groupe	Hauteur des tours au début	Ajout par l'élève A	Ajout par l'élève B
1	6	3	3
2	6	4	4
3	6	1	1
4	6	5	5
5	6	2	2

Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple

Présenter aux élèves les deux situations suivantes :

Situation 1

« Observez les tours de Sacha et de Thierry. Si Sacha ajoute 2 cubes à sa tour, combien de cubes Thierry devra-t-il ajouter à la sienne pour maintenir l'égalité entre les hauteurs des deux tours? »



Demander aux élèves d'analyser les données et attirer leur attention sur le fait que la même quantité doit être ajoutée à chacune des tours pour que l'égalité soit maintenue. Faire remarquer que cette constatation est vraie pour toutes les quantités ajoutées.

Leur demander de vérifier s'il est possible d'ajouter une quantité à une seule tour et de maintenir l'égalité. Faire remarquer que l'égalité se maintient seulement si rien n'est ajouté (0 cube).

Demander à un ou une élève de chaque équipe d'ajouter 1 cube à sa tour, puis poser les questions suivantes :
- « Que remarquez-vous maintenant en observant les deux tours? » (*Les tours ne contiennent pas le même nombre de cubes; 1 de plus ou 1 de moins selon la situation*.)
- « Que devez-vous faire pour rétablir l'égalité? »

Note : Les élèves doivent être en mesure de constater et d'expliquer l'inégalité avant de chercher à rétablir l'égalité (voir *Habileté à rétablir une situation d'égalité*, p. 44-47).

Demander à un ou une élève de chaque équipe d'ajouter, au choix, de 2 à 5 cubes à sa tour. Demander à l'autre élève de rétablir l'égalité entre les deux tours.

Demander à chaque équipe d'expliquer comment elle a rétabli l'égalité.

Faire remarquer aux élèves que chaque équipe a dû ajouter à la deuxième tour la même quantité de cubes que celle ajoutée à la première tour pour rétablir l'égalité. Attirer l'attention des élèves sur le fait que cette constatation s'applique à toutes les quantités ajoutées.

Situation 2

« Les entreprises Vincent et Surry ont construit chacune un édifice de 45 étages. L'entreprise Surry ajoute 17 étages à son édifice. Combien d'étages l'entreprise Vincent devra-t-elle ajouter au sien pour maintenir l'égalité entre les hauteurs des deux édifices? »

Poser aux élèves les questions suivantes :
- « Quelle équation représenterait chacune des situations?

  Situation 1 : **7 + 2 = 7 + ◆**

  Situation 2 : **45 + ■ = 45 + 17**
- « Quelle est la valeur de l'inconnue dans chaque équation? Expliquez votre réponse. »

Par la suite, projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

16 + 17 + ♡ = 16 + 17 + ♡

28 + ○ + 35 = 28 + 35 + ○

▲ + 14 + 23 = 14 + ▲ + 23

Poser la question suivante :
- « Pour maintenir l'égalité dans chacune des équations, quelle valeur pouvez-vous donner au symbole? Expliquez votre réponse. »

Présenter ensuite les équations suivantes :

65 + 72 + ▲ = 65 + 72

78 + 18 = 78 + ■ + 18

Demander aux élèves :
- « Si un nombre est ajouté d'un seul côté du signe =, l'égalité est-elle maintenue? » (*Seulement si le nombre ajouté est 0*.)

Inciter les élèves à proposer une conjecture sur l'ajout d'un nombre mystère dans une phrase mathématique, d'un ou des deux côtés du signe =. Les aider ensuite à formuler une généralisation en posant des questions telles :
- « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à d'autres nombres? Essayez-le. »
- « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à tous les nombres? Pourquoi? »

Décomposer les nombres selon les valeurs de position

POURQUOI?

En ayant recours à cette stratégie, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à faire appel à la structure du système de numération à base dix pour vérifier une situation d'égalité ou pour déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation sans avoir à effectuer de calculs.

COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette stratégie pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

<table>
<tr>
<td>

Grande idée 2 – Énoncé 1
Exemple

Présenter les phrases mathématiques suivantes aux élèves et leur demander si elles sont vraies ou fausses :

47 = 40 + 7

35 + 12 = 35 + 10 + 2

47 + 21 = 40 + 20 + 7 + 1

700 + 90 + 5 + 8 = 795 + 8

Afin d'inciter les élèves à justifier leurs réponses, poser les questions suivantes :
- « Comment pouvez-vous affirmer que cette phrase mathématique est vraie (ou fausse)? »
- « Est-ce possible de vérifier l'égalité avec du matériel concret (p. ex., cadres à dix cases, matériel de base dix, cubes emboîtables)? »
- « Comment ce matériel aide-t-il à déterminer si la phrase est vraie ou fausse? »
- « Est-ce possible de vérifier l'égalité sans matériel concret et sans effectuer de calcul? Comment? » (*En comparant les dizaines et les unités de chaque côté du signe =, il est possible de vérifier l'égalité sans avoir à utiliser du matériel concret.*)

</td>
<td>

Grande idée 2 – Énoncé 2
Exemple

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

36 = 6 + ☺

20 + 7 + 1 + ▼ = 27 + 31

305 + 200 + ♦ = 209 + 305

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue, puis poser les questions suivantes :
- « Comment avez-vous déterminé la valeur de l'inconnue? »
- « Est-ce possible de le faire d'une autre façon? »
- « Observez les nombres de chaque côté du signe =. Que remarquez-vous? »
- « Est-ce possible de déterminer la valeur de l'inconnue sans effectuer de calcul? Comment? »

</td>
</tr>
</table>

Annuler des termes ou des expressions égales

POURQUOI?

En ayant recours à cette stratégie, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à annuler certains termes ou certaines expressions égales de chaque côté du symbole de l'égalité. Cette stratégie permet aux élèves de résoudre une équation en considérant seulement les termes restants (p. ex., si dans l'équation **33 + 21 + 12 = 21 + 33 + ▲**, les nombres 21 et 33 sont annulés, il est possible de déduire que **▲ = 12**).

Aux cycles moyen et intermédiaire, cette stratégie permettra aux élèves de déduire que si une ou des expressions numériques d'un côté du symbole de l'égalité sont égales à une ou des expressions numériques de l'autre côté, alors la ou les expressions numériques restantes de chaque côté sont nécessairement égales (p. ex., si $\mathbf{a + b + 2c = a + b + d}$, alors $\mathbf{2c = d}$).

COMMENT?

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette stratégie pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Important…

Comme cette stratégie s'applique davantage aux représentations symboliques d'une situation d'égalité, il serait important de la modeler avant de procéder aux activités.

Grande idée 2 – Énoncé 1	**Grande idée 2 – Énoncé 2**
Exemple 1 Écrire au tableau la phrase mathématique suivante : **6 + 24 + 32 = 32 + 24 + 6** Poser aux élèves les questions suivantes : – « Cette phrase mathématique est-elle vraie ou fausse? Comment le savez-vous? » (*Certains élèves recourront à la commutativité.*) – « Si j'enlève les 32 de chaque côté du signe =, l'égalité demeure-t-elle vraie? » – « Si j'enlève les 24 de chaque côté du signe =, l'égalité demeure-t-elle vraie? » Écrire au tableau la phrase mathématique suivante : **6 + 24 + 32 = 32 + 20 + 4 + 7** Demander aux élèves : – « Cette phrase mathématique est-elle vraie ou fausse? Comment le savez-vous? » (*En annulant les expressions égales de chaque côté du signe =, soit 24 et (20 + 4) ainsi que 32 et 32, on isole le 6 et le 7, deux termes inégaux. On peut alors conclure que la phrase est fausse.*)	*Exemple 1* Écrire au tableau l'équation suivante : **21 + 89 + ☼ = 89 + 20 + 1 + 12** Poser aux élèves les questions suivantes : – « Quelles expressions numériques égales se retrouvent de chaque côté du signe =? » – « Si vous annulez ces expressions, l'égalité demeure-t-elle vraie? » – « Quelle est la valeur de l'inconnue? Comment le savez-vous? » (*En annulant les expressions égales, soit 89 et 89 ainsi que (20 + 1) et 21, on isole le ☼ et le 12. On peut donc conclure que ☼ = 12.*)

Exemple 2

Présenter aux élèves les phrases mathématiques suivantes et leur demander de vérifier si elles sont vraies ou fausses :

3 + 4 + 2 = 3 + 3 + 2

5 + 6 + 8 = 6 + 5 + 8

11 + 7 + 4 = 5 + 6 + 7 + 4

54 + 67 + 75 = 54 + 67 + 75

12 + 78 + 20 + 3 = 78 + 23 + 14

Pour chaque phrase mathématique, poser les questions suivantes :

– « Cette phrase est-elle vraie ou fausse? »
– « Si vous annulez des termes qui sont pareils de chaque côté du signe =, l’égalité demeure-t-elle vraie? Comment le savez-vous? »

Exemple 2

Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau :

5 + 6 + 3 = 6 + 5 + ☼

11 + 7 + 4 = 5 + 6 + 7 + ■

54 + 67 + 75 = 67 + 54 + ●

12 + 78 + ♡ = 78 + 23 + 12

46 + 378 + ✿ = 378 + 40 + 6 + 123

Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l’inconnue, puis poser les questions suivantes :

– « Quelles expressions numériques égales se retrouvent de chaque côté du signe = ? »
– « Si vous annulez ces expressions, l’égalité demeure-t-elle vraie?
– « Quelle est la valeur de l’inconnue? Comment le savez-vous? »

Comparer des termes

POURQUOI?

En ayant recours à cette stratégie, l'enseignant ou l'enseignante incite les élèves à reconnaître l'égalité entre les expressions numériques de part et d'autre du signe = sans effectuer de calcul. Par exemple, les élèves doivent pouvoir conclure que la phrase mathématique **46 + 89 = 45 + 90** est vraie puisque **46 + 89 = (46 – 1) + (89 + 1) = 45 + 90**.

Cette stratégie permet également de déterminer la valeur de l'inconnue dans certaines équations. Par exemple, en comparant les termes dans l'équation **□ + 10 = 6 + 12**, on peut noter que puisque 10 est 2 de moins que 12, alors □ doit être 2 de plus que 6, soit 8.

COMMENT?

En numération et sens du nombre, les élèves recourent à une stratégie semblable pour effectuer une addition. Par exemple, pour calculer **44 + 36**, les élèves enlèvent 4 au premier terme et ajoutent 4 au deuxième terme :

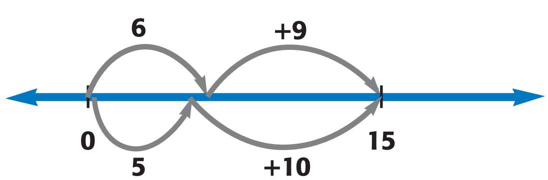
$$\mathbf{44 + 36 = 44 - 4 + 36 + 4}$$
$$\mathbf{44 + 36 = 40 + 40}$$

Ils obtiennent ainsi l'expression 40 + 40 qui est plus facile à calculer.

Important…

Comme cette stratégie s'applique davantage aux représentations symboliques d'une situation d'égalité, il serait important de la modeler avant de procéder aux activités.

L'enseignant ou l'enseignante peut aussi représenter cette stratégie sur une droite numérique ouverte double. Par exemple, écrire au tableau la phrase mathématique **6 + 9 = 5 + 10** et représenter cette phrase sur une droite numérique ouverte double.



Poser ensuite aux élèves les questions suivantes :

– « Cette phrase mathématique est-elle vraie? Comment le savez-vous? »

– « Que remarquez-vous lorsque vous comparez le nombre 6 au nombre 5? » (*6 est 1 de plus que 5*)

– « Que remarquez-vous lorsque vous comparez le nombre 9 au nombre 10? » (*9 est 1 de moins que 10*)

– « Que remarquez-vous lorsque vous comparez la longueur des bonds sur la droite? » (*Le bond de 6 est plus grand que le bond de 5; le bond de 9 est plus petit que le bond de 10.*)

Souligner que puisque la différence entre les deux premiers termes (**6 – 5 = 1**) correspond à ce que l'on doit ajouter au deuxième terme de gauche (9) pour obtenir le deuxième terme de droite (10), les deux expressions sont nécessairement égales et la phrase est donc vraie.

Le tableau suivant présente des exemples illustrant l'application de cette stratégie pour chacun des énoncés de la grande idée 2.

Grande idée 2 – Énoncé 1	**Grande idée 2 – Énoncé 2**
Exemple Présenter les phrases mathématiques suivantes : **9 + 8 = 10 + 7** **34 + 67 = 35 + 66** **23 + 48 = 26 + 45** Demander aux élèves de vérifier à l'aide d'une droite numérique ouverte double (voir *Droites numériques*, p. 65-70) si ces phrases sont vraies. Pour chaque phrase, poser les questions suivantes : – « Comment pouvez-vous affirmer que cette phrase est vraie? » – « Quels termes avez-vous comparés? » – « Que remarquez-vous au sujet de ces termes? » – « Pouvez-vous comparer les termes d'une autre façon? »	*Exemple* Projeter ou écrire les équations suivantes au tableau : **26 + 79 = ☼ + 28** **89 + ♡ = 90 + 54** **■ + 67 = 34 + 66** Pour chaque équation, demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue, puis poser les questions suivantes : – « Quelle est la valeur de l'inconnue? Comment le savez-vous? » (*Puisque 28 est 2 de plus que 26, alors ☼ sera 2 de moins que 79.*) – « Pouvez-vous comparer les termes d'une autre façon? » Encourager les élèves à proposer une conjecture au sujet de la stratégie *comparer des termes*, puis poser des questions telles que : – « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à d'autres nombres? Essayez-le. » – « Pourriez-vous appliquer votre conjecture à tous les nombres? Pourquoi? »

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Aperçu

Cette section présente, pour chacune des années d'études de la maternelle à la 3e année, une situation d'apprentissage en lien avec la grande idée *Situations d'égalité*. Ce sont des situations-problèmes engageantes qui suscitent le questionnement et la réflexion. En outre, elles contribuent au développement de l'habileté à communiquer. Chacune des situations d'apprentissage est riche en contenu mathématique. Afin d'être en mesure d'anticiper les difficultés que pourraient éprouver les élèves et de planifier ses interventions, il est préférable de résoudre la situation-problème avant de la présenter aux élèves.

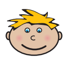
Toutes les situations d'apprentissage présentées sont structurées en trois temps : avant l'apprentissage (mise en train), pendant l'apprentissage (exploration) et après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique). Elles sont suivies d'activités de prolongement, de suggestions d'adaptations pour faciliter ou enrichir la tâche, d'une activité de suivi à la maison et de quelques activités supplémentaires que l'enseignant ou l'enseignante pourrait utiliser pour poursuivre l'apprentissage des élèves.

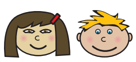
Dans un contexte d'enseignement par la résolution de problèmes, l'enseignant ou l'enseignante a recours à l'étayage et à des stratégies de questionnement efficaces afin d'inciter les élèves à réfléchir et à développer leurs propres stratégies de résolution de problèmes. Pour plus de détails au sujet du rôle de l'enseignant ou de l'enseignante dans un contexte de résolution de problèmes, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 27-40).

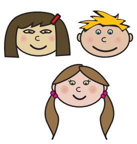
Dans la présentation des situations d’apprentissage, les icônes suivantes sont utilisées afin de faciliter le repérage de certains renseignements.

Légende

Icônes d’ordre organisationnel

 Travail individuel

 Travail en équipe

 Travail en groupe classe

 Durée approximative

Icônes d’ordre pédagogique

 Observations possibles

 Mise au point à l’intention de l’enseignant ou de l’enseignante

 Pistes de questionnement

Situation d'apprentissage, Maternelle/Jardin d'enfants

Plus que, moins que, autant que…

Grande idée : Situations d'égalité

Matériel

- cartons de couleur différente (1 par habitat)
- napperons (1 par équipe)
- sacs (1 par équipe)
- petits animaux en plastique ou dessins d'animaux choisis en fonction de trois habitats différents (10 à 25 par équipe)

Sommaire

Dans cette situation d'apprentissage, les enfants comparent les quantités de divers ensembles d'objets. Ils représentent des situations d'égalité et d'inégalité à l'aide de matériel concret, et les décrivent oralement en utilisant le vocabulaire approprié (*plus que*, *moins que*, *autant que*, *est égal à* et *n'est pas égal à*). De plus, ils vérifient l'égalité entre les ensembles à l'aide de différentes stratégies et la rétablissent si nécessaire.

Intention pédagogique

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les enfants :

- à explorer les concepts d'égalité et d'inégalité à l'aide de différentes stratégies telles que le dénombrement et la correspondance de un à un;
- à comparer des quantités et à établir l'égalité à l'aide de cadres à dix cases;
- à se familiariser avec le vocabulaire mathématique relatif à l'égalité.

Liens avec le programme Jardin d'enfants

Cette situation d'apprentissage est liée aux processus mathématiques suivants.

Résolution de problèmes	L'enfant commence à développer et à appliquer des stratégies de résolution de problèmes.
Communication	L'enfant commence à communiquer dans un langage de tous les jours, à l'aide d'un vocabulaire mathématique émergent.
Raisonnement	L'enfant applique des habiletés émergentes de raisonnement pour identifier et explorer des possibilités.

Contexte pédagogique

Comprendre le concept d'égalité est important pour développer le raisonnement algébrique. Pour ce faire, les enfants doivent vivre plusieurs expériences qui leur permettent de reconnaître, de définir, de créer et d'établir des situations d'égalité. Bien que le concept d'égalité fasse aussi partie du domaine Numération et sens du nombre, l'accent dans cette situation d'apprentissage est surtout mis sur le raisonnement algébrique qui permet de comparer des quantités et d'établir des relations entre elles.

En général, les jeunes enfants qui arrivent à l'école savent déjà ce que signifient les expressions *plus que* et *est égal à* puisqu'ils emploient des expressions similaires à leur façon (p. ex., *pareil*, *autant*, *même*). À titre d'exemple, en observant deux assiettes de biscuits, les enfants ont tendance à les comparer en disant : « Cette assiette en contient *plus que* l'autre » ou « Les deux assiettes ont la *même quantité* de biscuits ». Ils utilisent peu l'expression *moins que*. Autant que possible, chaque fois que les enfants comparent deux ensembles en employant l'expression *plus que*, il serait bien de leur demander de comparer les ensembles de nouveau en employant l'expression *moins que* afin de développer simultanément ces deux concepts.

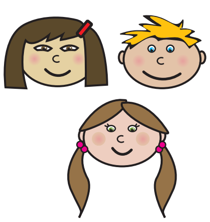
Préalables

Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les enfants doivent :

- connaître le nom de certains animaux et leur habitat naturel (p. ex., singe et jungle, écureuil et forêt, grenouille et étang);
- savoir utiliser le cadre à dix cases (voir *Cadres à dix cases*, p. 71-73);
- comprendre la signification des expressions *plus que, moins que, autant que, est égal à* et *n'est pas égal à*.

Vocabulaire mathématique

Est égal à, n'est pas égal à, plus que, moins que, pareil, autant que, même quantité.



Activité préparatoire facultative

Inviter six enfants à se mettre debout devant la classe. Les répartir en deux groupes : un groupe de deux et l'autre de quatre. Demander aux autres enfants de comparer le nombre de pieds dans les deux groupes en posant des questions telles que :

environ
20 minutes

– « Dans quel groupe y a-t-il le plus de pieds? le moins de pieds? »

– « Comment le sais-tu? » (*L'enfant pourrait répondre* : « *Parce qu'il y a plus d'enfants dans le groupe de quatre, il y a plus de pieds*. »)

– « Combien y a-t-il de pieds dans chaque groupe? »

– « Est-ce que le nombre de pieds dans les deux groupes est égal? » (*Certains enfants diront peut-être qu'un groupe en a plus et que l'autre n'en a « pas plus ». Profiter de l'occasion pour leur présenter l'expression « moins que ».*)

Poursuivre ce type de questionnement en choisissant d'autres parties du corps afin d'amener les enfants à comprendre et à utiliser les expressions *plus que* et *moins que*.

Demander ensuite aux enfants ce qu'ils peuvent faire pour que le nombre de pieds dans les deux groupes soit égal. Écouter les stratégies proposées et démontrer chacune d'elle. Par exemple, les enfants peuvent dire :

- « Je peux ajouter deux enfants au groupe de deux et là on aurait huit pieds dans chaque groupe. »
- « Je peux enlever deux enfants du groupe de quatre et là on aurait quatre pieds dans chaque groupe. »
- « Je peux enlever tous les enfants des deux groupes et faire deux nouveaux groupes égaux et là le nombre de pieds serait égal. »
- « Je peux prendre un enfant du groupe de quatre et le placer dans le groupe de deux et là on aurait deux groupes de trois enfants avec six pieds dans chaque groupe. »
  Note : Si cette dernière stratégie n'est pas suggérée, la modeler pour les enfants.

Lorsque le nombre d'enfants dans les deux groupes est égal, poser les questions suivantes :

– « Comment sais-tu que le nombre de pieds dans les deux groupes est égal? Peux-tu le démontrer? »

Pour le démontrer, les enfants peuvent par exemple :

- dénombrer;

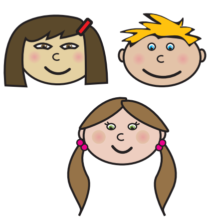
Le garçon dénombre en touchant chaque pied dans chaque groupe.

- établir la correspondance de un à un.

L'enseignante modèle la correspondance de un à un.

S'ils ne suggèrent pas d'établir la correspondance de un à un, modeler cette stratégie en leur expliquant que c'est une façon de comparer les quantités sans avoir à dénombrer. Par exemple, établir la correspondance de un à un en plaçant les enfants de deux groupes face à face et vérifier si pour chaque enfant dans un groupe, il y a un ou une enfant dans l'autre groupe.

En comparant de nouveau les pieds ou autres parties du corps, encourager les enfants à utiliser des expressions telles que *même nombre*, *même quantité*, *pareil*, *autant que* et *est égal à* pour exprimer les relations d'égalité.



environ
15 minutes

Avant l'apprentissage (mise en train)

Inviter les enfants à s'asseoir par terre. Leur demander de nommer et de décrire différents habitats* d'animaux (p. ex., dans l'étang, il y a des nénuphars, des joncs…). Leur présenter des animaux provenant de trois habitats différents (p. ex., ferme, étang, jungle). Déposer sur le plancher de grands cartons de couleur différente pour représenter ces trois habitats et demander à des enfants de venir dessiner des éléments caractéristiques de ces habitats.

* Lien avec le champ d'études Sciences et technologie; un des contenus d'apprentissage de la rubrique « Vie et environnement » précise de décrire des habitats naturels (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006b, p. 41).

Pendant l'apprentissage (exploration)

Présenter la situation en disant aux enfants :

Nous allons fabriquer des maquettes de différents habitats naturels que nous présenterons lors de la foire de sciences (la semaine de l'éducation, la Journée de la Terre, etc.). Cependant, pour déterminer la grandeur de chaque maquette, nous devons connaître le nombre d'animaux à y placer. Avec vous, j'aimerais vérifier les quantités d'animaux que nous avons avant de les placer sur les maquettes représentant leur habitat.

environ
15 minutes

Grouper les enfants en équipes de trois ou de quatre et leur distribuer un napperon et un sac contenant des animaux en plastique choisis en fonction de trois habitats différents (au moins trois animaux par habitat). S'assurer qu'il y a la même quantité d'animaux dans deux des habitats. Leur demander de classifier les animaux selon leur habitat naturel et de comparer les quantités.

Invariance numérique

Une quantité peut être représentée par des choses différentes. Par exemple, trois animaux de la ferme peuvent être représentés par trois animaux différents (p. ex., vache, cheval, poule).

Pour plus de détails, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année : Numération et sens du nombre* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 13).

Circuler, observer et poser des questions…

Circuler et observer les stratégies utilisées par les enfants pour comparer la quantité d'animaux dans chaque habitat. Par exemple :

- Regroupent-ils les animaux selon leur habitat pour ensuite les aligner de façon à établir une correspondance de un à un entre les animaux de chaque habitat?

- Dénombrent-ils les animaux de chaque habitat?
- Touchent-ils chaque animal lors du dénombrement?

Poser des questions telles que :

– « Dans quel habitat y a-t-il le plus (ou le moins) d'animaux? Qu'as-tu fait pour le savoir? »

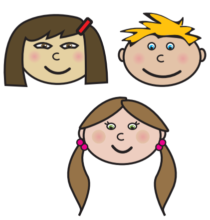
– « Comment peux-tu démontrer qu'il y a une quantité différente d'animaux dans ces deux habitats? » (*Soit en faisant la correspondance de un à un, soit en dénombrant.*)

– « Que remarques-tu en comparant la quantité d'animaux dans ces deux autres habitats? » (*La quantité d'animaux est la même.*) « Comment peux-tu le démontrer? »

Dès que deux équipes ont terminé, les regrouper et demander à une équipe d'expliquer à l'autre ce qu'elle a découvert au sujet du nombre d'animaux dans chaque habitat. Leur demander de comparer leur quantité d'animaux dans un même habitat (p. ex., la quantité d'animaux que chaque équipe a placés sur la maquette représentant la jungle).

Pour des renseignements au sujet de l'échange mathématique, voir *Annexe générale* (p. 185-186).

Après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique)



environ

30 minutes

Lorsque toutes les équipes ont fini de classifier leurs animaux et de discuter avec une autre équipe, les regrouper en cercle. Placer au centre de grands cartons de couleur différente pour représenter les habitats.

Demander à chaque équipe de venir à tour de rôle déposer leurs animaux sur les cartons qui correspondent à l'habitat approprié. Lorsque toutes les équipes ont terminé, demander aux enfants d'observer les animaux sur chaque carton et de vérifier s'ils vivent bien dans cet habitat. Modifier l'emplacement de certains animaux au besoin.

Leur demander ce qu'ils peuvent faire pour comparer la quantité d'animaux dans les différents habitats et de justifier leur raisonnement. Par exemple, les enfants peuvent suggérer :

- d'établir la correspondance de un à un et dire : « Il y a *plus* d'animaux qui vivent dans la jungle *que* sur la ferme, donc il y a *moins* d'animaux sur la ferme *que* dans la jungle. Je le sais puisque la ligne est plus longue quand je les compare. »
- d'utiliser des cadres à dix cases pour comparer les quantités et dire :
  - « Chaque habitat a trois cadres complets. »
  - « Quand je regarde le cadre qui n'est pas complet dans chaque habitat, je vois que celui de la jungle en a *plus que* les deux autres. »
  - « Dans le 4e cadre de la jungle, il y a cinq animaux dans les cases du haut et trois animaux dans les cases du bas. Il en a huit au total. Il en manque deux autres pour que ce cadre soit complet. »
  - « Dans l'étang, il y a *plus* d'animaux *que* sur la ferme, mais *moins que* dans la jungle. Je le sais parce que je les ai dénombrés : la jungle en a huit dans le 4e cadre, l'étang en a trois et la ferme en a un. »

Extrait non disponible en raison de restrictions relatives aux droits d'auteur. Pour l'intégrale, voir la version imprimée.

Lorsque les enfants établissent la relation entre les quantités en comparant les cadres à dix cases plutôt qu'en dénombrant les animaux, ils développent leur raisonnement algébrique.

Extrait non disponible en raison de restrictions relatives aux droits d'auteur. Pour l'intégrale, voir la version imprimée.

Poursuivre en demandant aux enfants de préciser combien il y a d'animaux *de plus* ou *de moins* dans un habitat par rapport à l'autre.

Extrait non disponible en raison de restrictions relatives aux droits d'auteur. Pour l'intégrale, voir la version imprimée.

Prolongement

Fabrication des maquettes

Regrouper les enfants autour des cartons sur lesquels sont déposés les animaux selon leur habitat. Avant de déterminer la grandeur des maquettes à fabriquer, poser les questions suivantes :

– « Si je voulais que tous les habitats aient une quantité égale d'animaux, peux-tu m'expliquer et me démontrer ce que je pourrais faire? »

– « Est-ce que quelqu'un aurait une autre façon de procéder? Peux-tu l'expliquer et le démontrer? »

Il est très important que les enfants décrivent les situations à haute voix en utilisant les termes appropriés.

Les enfants peuvent suggérer :

- d'enlever les animaux en surplus dans l'habitat en ayant le plus;
- d'enlever – si on leur indique de ne pas tenir compte des habitats – des animaux dans l'habitat ayant une plus grande quantité et les redistribuer dans ceux en ayant moins.

Remettre les animaux dans leur habitat approprié. Discuter de la grandeur souhaitable de chaque maquette, compte tenu de la quantité d'animaux à placer dans chacune. Demander aux enfants de justifier leur raisonnement. Par exemple, certains enfants diront que la grandeur de la maquette dépend de l'espèce animale et non de la quantité d'animaux puisque certains animaux ont besoin de plus d'espace pour se déplacer; d'autres enfants diront qu'il faut fabriquer plus d'une maquette par habitat puisqu'il y a une grande quantité d'animaux pour chacun.

Après discussion et entente, fabriquer avec les enfants les maquettes à l'aide de cartons rigides ou de boîtes et des éléments propres aux habitats avec de la pâte à modeler ou tout autre matériel disponible.

Adaptations

La situation d'apprentissage peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des enfants.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
Lors de la comparaison de la quantité d'animaux dans chaque habitat : • faire d'abord ressortir l'habitat comptant le *plus* d'animaux, en disant par exemple : « Il y a *plus* d'animaux dans la jungle *que* dans l'étang »; • ensuite, faire ressortir l'habitat ayant le moins d'animaux, en disant par exemple : « Il y a *moins* d'animaux dans l'étang *que* dans la jungle »; • conclure en utilisant les deux expressions de comparaison dans la même phrase, en disant par exemple : « Il y a *plus* d'animaux dans la jungle *que* dans l'étang, donc il y a *moins* d'animaux dans l'étang *que* dans la jungle ».	• Distribuer de plus grandes quantités d'animaux. • Faire comparer la quantité d'animaux dans trois habitats différents et les amener à conclure, par exemple, que s'il y a *plus* d'animaux dans la jungle *que* dans l'étang et *plus* d'animaux dans l'étang *que* sur la ferme, il y a donc *plus* d'animaux dans la jungle *que* sur la ferme. • Faire comparer trois habitats comprenant la même quantité d'animaux et les amener à conclure, par exemple, que s'il y a *autant* d'animaux dans la jungle *que* dans l'étang et *autant* d'animaux dans l'étang *que* sur la ferme, il y a donc *autant* d'animaux dans la jungle *que* sur la ferme.

Suivi à la maison

À la maison, les enfants peuvent comparer les quantités d'objets de collections qu'ils possèdent et expliquer à un membre de la famille :

- la stratégie utilisée pour comparer les quantités (p. ex., dénombrement, correspondance de un à un);
- les relations entre les quantités d'objets à l'aide du vocabulaire approprié (p. ex., *plus que*, *moins que*, *est égal à*, *autant que*, *même quantité*).

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 1

Une poignée de cubes

Matériel

- annexe MJ.1 (1 roulette par équipe)
- cubes emboîtables de deux couleurs différentes (30 à 40 par équipe)
- feuilles de papier (1 par équipe)

SOMMAIRE : Cette activité a pour but d'amener les enfants à comparer deux ensembles d'objets, c'est-à-dire à déterminer quel ensemble a le plus grand nombre d'objets, lequel en a le moins ou si la quantité d'objets dans les deux ensembles est égale. Aussi, les enfants auront à rétablir l'égalité entre les quantités dans les ensembles inégaux.

DÉROULEMENT : Grouper les enfants par deux et modeler l'activité avec une équipe. Distribuer une roulette munie d'une flèche (annexe MJ.1), une feuille pour enregistrer le pointage et de 30 à 40 cubes emboîtables de deux couleurs différentes à chaque équipe.

Voici les règles du jeu :

- Chaque enfant prend une poignée de cubes d'une couleur.
- Un ou une enfant fait tourner la flèche sur la roulette et lit l'expression sur laquelle la flèche s'est arrêtée :
  – Si la flèche s'est arrêtée dans la section « plus que », l'enfant ayant la plus grande quantité de cubes reçoit un point.
  – Si la flèche s'est arrêtée dans la section « moins que », l'enfant ayant la moins grande quantité de cubes reçoit un point.
  – Si la flèche s'est arrêtée dans la section « est égal à », les deux enfants travaillent ensemble pour égaliser les quantités de cubes et chacun reçoit un point (Voir *Habileté à rétablir une situation d'égalité*, p. 44-47).
- Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'un ou une enfant accumule 10 points.

Lors de l'échange mathématique, demander à des enfants d'expliquer la ou les stratégies utilisées pour égaliser les quantités.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 2

Combien de pépins de melon d'eau?

Matériel

- annexe MJ.2 (1 ensemble de cartes de melons d'eau par enfant)
- cartes de comparaison : plus que, moins que ou est égal à (plusieurs cartes)
- petits objets noirs (p. ex., cubes emboîtables ou vrais pépins de melon d'eau)

SOMMAIRE : Dans cette activité, les enfants indiquent les relations *plus que*, *moins que* ou *est égal à* à l'aide de cartes et créent des situations d'équivalence avec des pépins de melon d'eau.

DÉROULEMENT : Préparer le matériel et le placer dans un centre de mathématiques. Les cartes de melons d'eau peuvent être remplacées par des assiettes à pois [voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année : Numération et sens du nombre* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, annexe 1Q.4)].

Les enfants retournent une carte illustrant un certain nombre de pépins dans un melon d'eau et une carte de comparaison de quantité. À l'aide de cubes emboîtables ou de vrais pépins, ils représentent la quantité qui satisfait à l'expression indiquée sur la carte de comparaison.

À titre d'exemple, un ou une enfant retourne une carte illustrant un melon d'eau ayant trois pépins et la carte de comparaison *plus que*. La quantité de pépins à représenter doit donc être plus grande que trois. Il ou elle dépose alors plus de trois pépins pour respecter l'expression retournée, soit *plus que*. Encourager l'enfant à expliquer la relation et à la justifier. Par exemple, l'enfant pourrait dire : « J'ai placé cinq pépins parce que la carte indiquait *plus que* et le melon d'eau sur le dessin avait trois pépins. Cinq c'est plus que trois. »

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 3

Oh là là! Quel dégât!

Matériel

- petits contenants (1 par enfant)
- ensembles de dix petits objets (1 ensemble par enfant)

SOMMAIRE : Dans cette activité, les enfants comparent des quantités d'objets en utilisant le vocabulaire approprié et expliquent la stratégie utilisée pour démontrer les relations.

DÉROULEMENT : Grouper les enfants par trois. Distribuer à chaque enfant un petit contenant (p. ex., contenant de yogourt, petit sac en papier) et un ensemble de dix petits objets (p. ex., haricots secs, boutons, macaronis). Chaque membre d'une équipe doit avoir des objets différents. Expliquer aux enfants qu'il nous arrive à l'occasion de faire des dégâts. Leur donner l'occasion de raconter un petit dégât qu'ils ont fait (p. ex., renverser sa collation sur le plancher).

Faire asseoir les équipes en petits cercles par terre et leur dire :

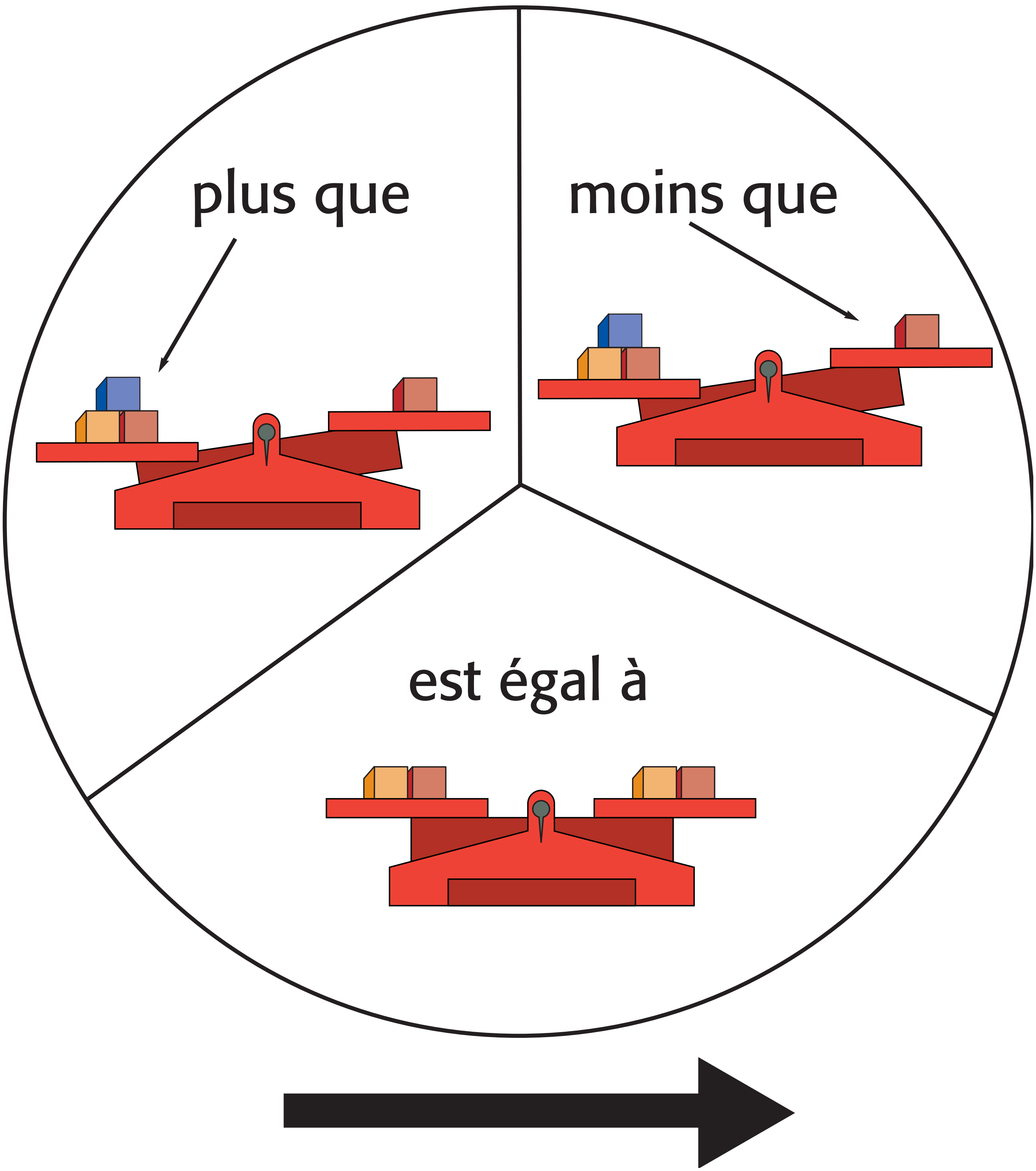
> *Placez quelques objets dans votre contenant. Ensuite, les membres d'une même équipe doivent compter ensemble jusqu'à trois et renverser leur contenant sur le plancher devant eux en s'écriant : « Oh là là! Quel dégât! » Observez les objets par terre et comparez les quantités en utilisant les termes appropriés. On pourrait dire, par exemple : « Il y a moins de haricots que de boutons, mais il y a plus de macaronis que de boutons. Donc, il y a plus de macaronis que de haricots. »*

Circuler et encourager les enfants à comparer la quantité d'un ensemble d'objets avec la quantité de chacun des deux autres ensembles d'objets. Lorsqu'un ou une enfant présente une observation, lui demander de justifier son raisonnement.

Reprendre l'activité en invitant les enfants à placer un nombre quelconque d'objets dans leur contenant.

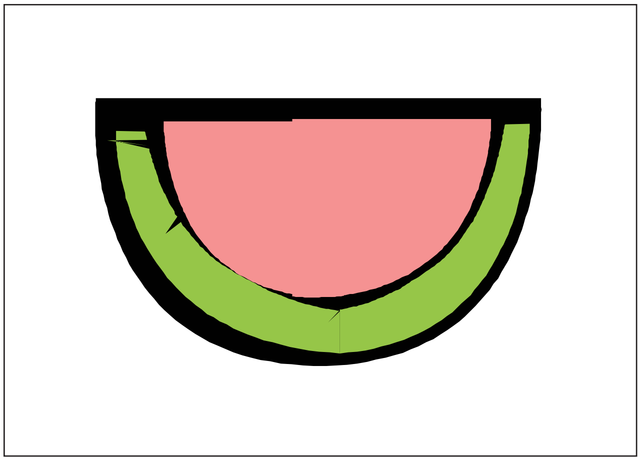
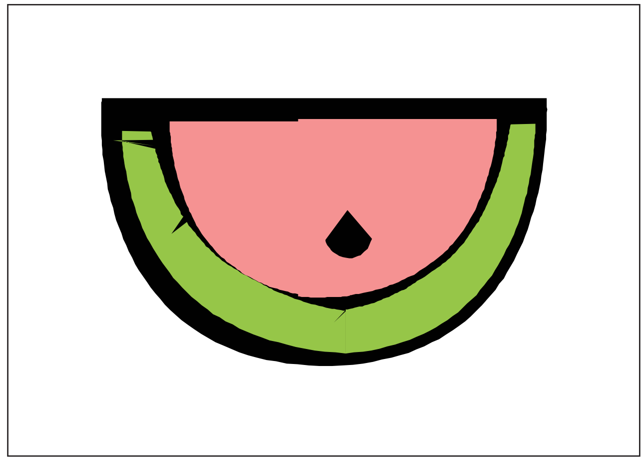
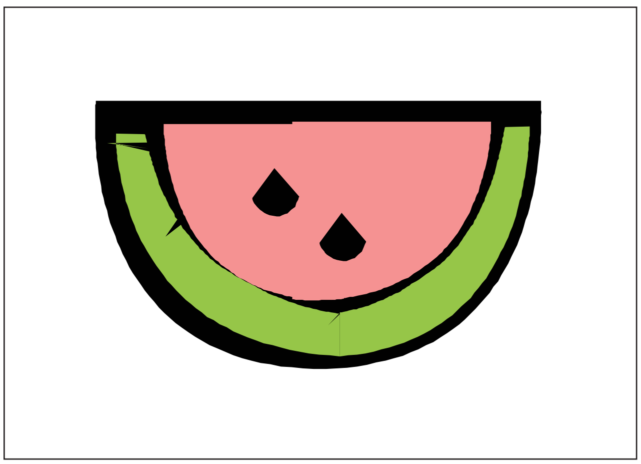
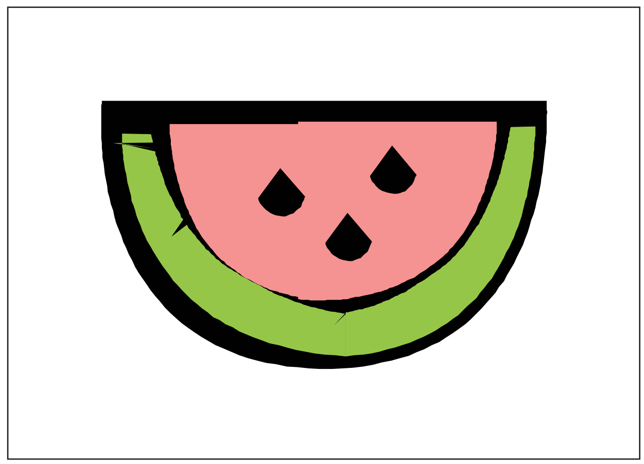
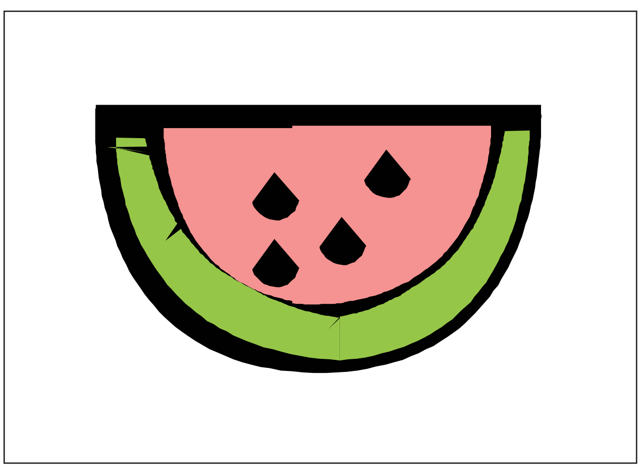
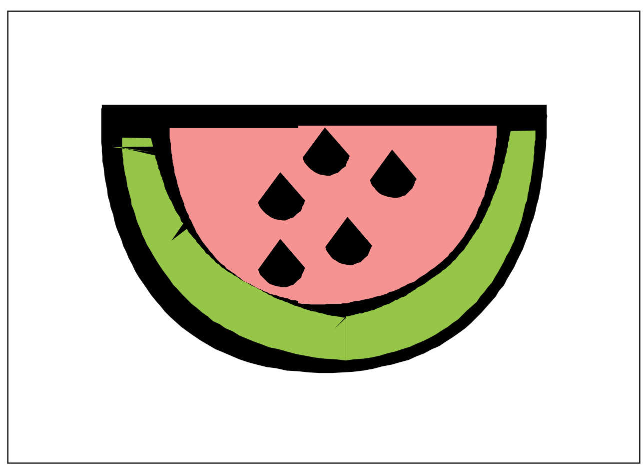
ANNEXE MJ.1

Roulette

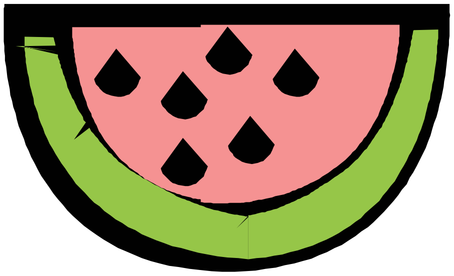


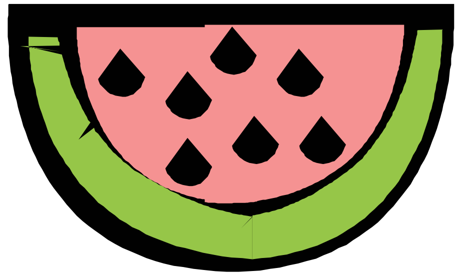
ANNEXE MJ.2

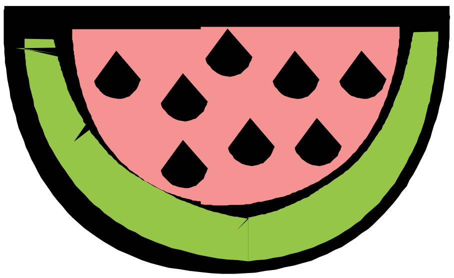
Melons d'eau

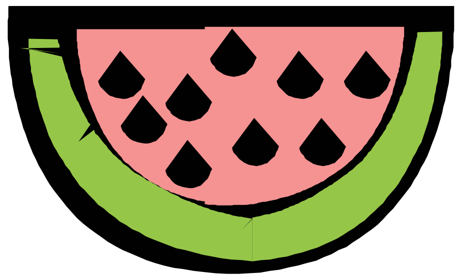







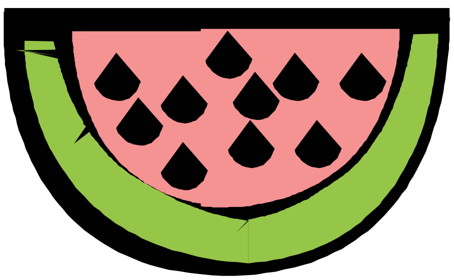
ANNEXE MJ.2 (*suite*)











Situation d'apprentissage, 1re année

Quelles belles surprises!

Matériel

- 2 sacs à surprises contenant 10 objets chacun (le premier sac contenant 3 différentes sortes d'objets et le deuxième sac contenant 2 différentes sortes d'objets)
- grandes feuilles (1 par élève)
- cadres à dix cases (2 par élève)

Grande idée : Situations d'égalité

Sommaire

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves représentent le contenu de deux sacs à surprises à l'aide de matériel semi-concret, de mots et de symboles. Ils écrivent ensuite une phrase mathématique pour représenter les quantités d'objets dans ces sacs et vérifient si elle est vraie.

Note : Il est préférable de présenter cette activité lorsque vous commencez à représenter symboliquement des situations concrètes d'addition avec des phrases mathématiques.

Intention pédagogique

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à représenter des situations d'égalité de différentes façons;
- à établir un lien entre les différentes représentations des quantités et les phrases mathématiques correspondantes.

Attente et contenus d'apprentissage

Attente

L'élève doit pouvoir représenter des situations d'égalité de façon symbolique et concrète.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

– illustrer une situation d'égalité à l'aide de matériel concret;

– traduire une situation d'égalité à l'aide de nombres et de symboles;

– établir le lien entre la représentation concrète ou symbolique et une situation d'égalité.

Pour plus de renseignements au sujet des situations d'égalité, voir *Énoncé 1* (p. 29-48).

Contexte pédagogique

La compréhension du concept d'égalité est essentielle au développement du raisonnement algébrique. Par conséquent, les élèves doivent expérimenter diverses situations dans lesquelles ils s'exerceront à reconnaître, à définir, à créer et à établir une situation d'égalité.

Il importe d'amener les élèves à comprendre que le symbole de l'égalité, soit le signe = qui se lit « est égal à », signifie que les nombres ou les expressions de chaque côté du signe = représentent la même quantité. En faisant appel aux connaissances antérieures des élèves, l'enseignant ou l'enseignante doit les inciter à explorer différentes représentations d'une même situation d'égalité.

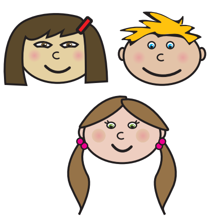
Préalables

Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent pouvoir :

- dénombrer de petites quantités d'objets;
- décrire oralement des situations d'égalité;
- utiliser un cadre à dix cases pour représenter des quantités;
- reconnaître et utiliser les symboles de l'addition (+) et de l'égalité (=).

Vocabulaire mathématique

Situation d'égalité, autant que, est égal à, n'est pas égal à, quantités égales, symbole de l'égalité, signe =, phrase mathématique.



Avant l'apprentissage (mise en train)

Présenter la situation en disant aux élèves :

J'ai retrouvé chez moi deux sacs à surprises. J'ai identifié un sac par la lettre A et l'autre par la lettre B. Voyons ensemble ce que chaque sac contient.

environ

50 minutes

Déposer devant les élèves les deux sacs identifiés. Demander à un ou une élève de sortir les objets du sac A et de les décrire. Demander à un ou une autre élève de faire de même avec le sac B. Profiter de l'occasion pour présenter de nouveaux mots aux élèves (p. ex., kaléidoscope, toupie).

Poser les questions suivantes :

– « Comment pourriez-vous disposer les objets de chaque sac à surprises afin de comparer le nombre d'objets de chaque sorte? » (*En regroupant les objets identiques, comme illustré dans les photos ci-dessous*.)

Le sac à surprises A

4 toupies, 4 ballons et 2 jeux de cartes

Le sac à surprises B

6 kaléidoscopes et 4 jeux de cartes

– « Combien d'objets de chaque sorte y a-t-il dans les sacs à surprises? »

Demander aux élèves de suggérer un moyen de représenter le contenu des sacs à surprises sans utiliser les objets eux-mêmes ou sans recourir à des chiffres. La plupart des élèves suggéreront de dessiner les objets. Poursuivre la discussion afin de trouver d'autres représentations possibles.

Distribuer à chaque élève une grande feuille de papier. Leur demander de tracer une ligne au centre de la feuille pour la diviser en deux, puis d'inscrire « Sac à surprises A » et « Sac à surprises B » en haut de chaque section.

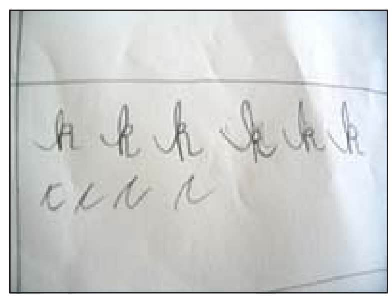
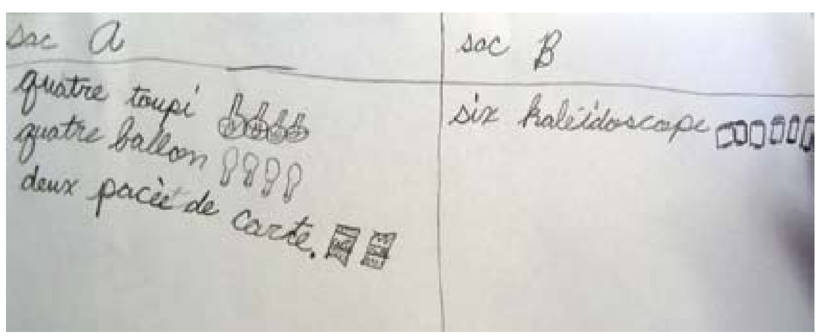
Leur demander ensuite de représenter, de différentes façons, le contenu de chacun des sacs à surprises. Si les élèves choisissent de dessiner les objets pour les représenter, souligner qu'il n'est pas nécessaire de s'attarder à l'exécution parfaite des dessins.

***Circuler et poser des questions**...*

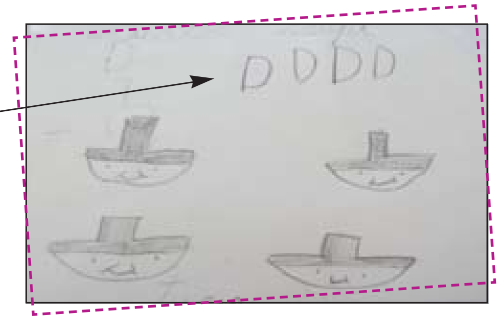
Circuler et intervenir au besoin en posant des questions telles que :

– « Tu as représenté les objets par des dessins. Pourrais-tu maintenant les représenter autrement? »

Voici quelques représentations en cours d'élaboration.

Modes de représentation	Sacs à surprises A et B	
Dessins		
Lettres	**Sac à surprises A** 	**Sac à surprises B** 
Mots et dessins		

Inviter les élèves à présenter et à expliquer leurs représentations, qu'elles soient conventionnelles ou non puisqu'elles ont un sens pour eux. Par exemple, une élève indique qu'elle a choisi de représenter les quatre toupies par la lettre « D » puisqu'il s'agit de la 4e lettre de l'alphabet. Amener cette élève à comprendre l'inefficacité de sa représentation en lui demandant comment elle symboliserait les quatre ballons.



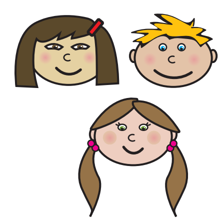
Lorsque les élèves ont complété différentes représentations, demander à quelques-uns de les présenter aux autres. Poser des questions pour comparer et établir des liens entre les diverses représentations telles que :

– « Qu'est-ce qui est semblable entre la représentation avec des dessins et celle avec des lettres? entre la représentation avec des lettres et celle avec des mots? » (*Elles représentent les mêmes quantités d'objets*.)
– « Qu'est-ce qui est différent entre les représentations? » (*Le mode de représentation diffère, soit des dessins, des lettres ou des mots*.)

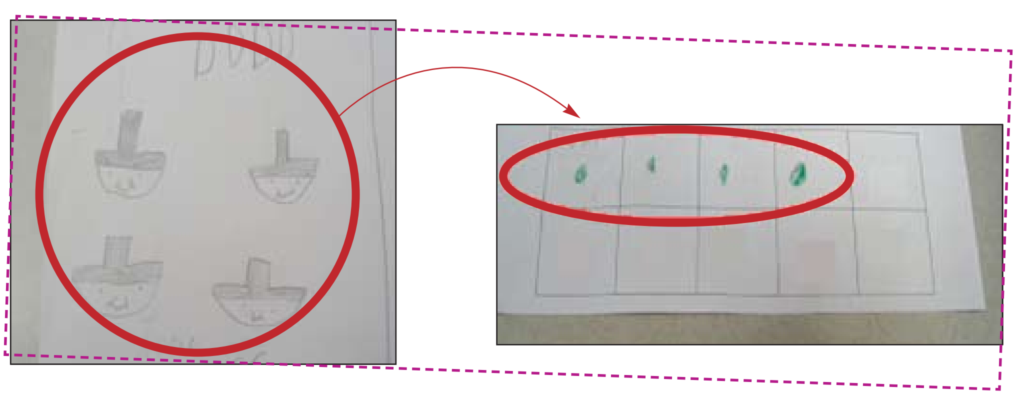
Pendant l'apprentissage (exploration)

Revoir avec les élèves le contenu de chaque sac à surprises et les représentations faites (dessins, mots, lettres) lors de la mise en train. Si le cadre à dix cases n'a pas été utilisé pour représenter les quantités d'objets dans les sacs à surprises, proposer aux élèves de l'utiliser pour représenter les quantités d'objets dans le sac à surprises A.

Pour plus de détails au sujet du cadre à dix cases, voir *Cadres à dix cases* (p. 71-73).



Modeler l'exemple suivant :
« Je représente les quatre toupies dans le sac à surprises A en dessinant un point dans quatre des cases du cadre. »



environ
45 minutes

En utilisant le cadre à dix cases, les élèves s'initient à une représentation plus symbolique d'une quantité d'objets, ce qui fait appel à leur capacité d'abstraction.

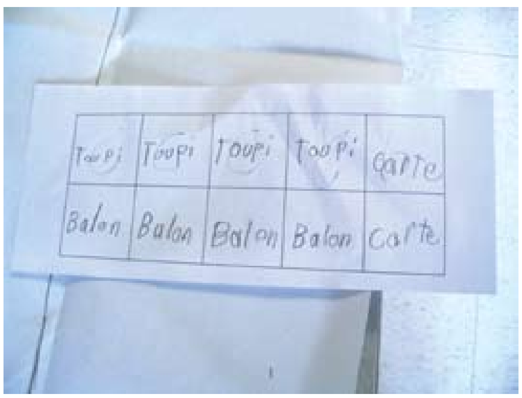
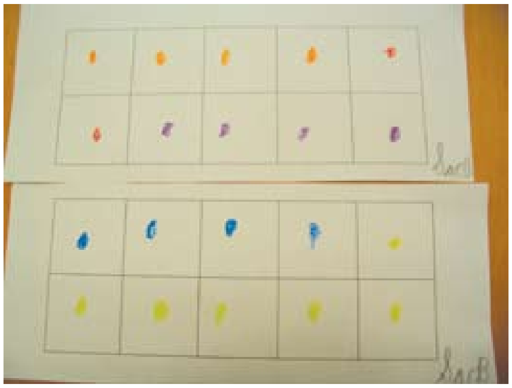
Distribuer deux cadres à dix cases à chaque élève et leur demander de représenter sur chacun le contenu d'un des sacs à surprises.

Représentation du sac à surprises A

4 toupies, 4 ballons et 2 jeux de cartes

Représentation du sac à surprises B

6 kaléidoscopes et 4 jeux de cartes

Observations possibles	Interventions possibles
Pour représenter les objets, certains élèves les dessinent ou écrivent des mots ou des lettres dans chaque case du cadre. 	Faire remarquer aux élèves qu'ils ont déjà représenté les objets de cette façon sur leur grande feuille. Les inviter à proposer une façon plus efficace de représenter les objets dans leur cadre à dix cases. Leur rappeler au besoin que les quantités peuvent être représentées dans un cadre à dix cases par des points.
Certains élèves utilisent une seule couleur pour représenter les différents objets dans le cadre à dix cases. D'autres ajoutent la 1re lettre du nom de l'objet à côté de chaque point. 	Les inciter à utiliser une couleur différente pour chaque sorte d'objets en leur faisant remarquer qu'il est difficile de distinguer les sortes d'objets s'ils sont tous représentés par la même couleur. Préciser que les points de couleur permettent de voir la quantité de chaque objet plus aisément. 

Présenter un des cadres à dix cases dont les points représentent correctement le contenu du sac à surprises A. Inciter les élèves à établir le lien entre le nombre de points dans le cadre et la quantité d'objets dans le sac à surprises A en posant des questions telles que :

– « Combien y a-t-il de points verts dans le cadre à dix cases? »
– « Quels objets du sac sont représentés par les points verts? » (*Par exemple, les ballons*.)
– « Y a-t-il la même quantité de points que de ballons? »
– « Peux-tu les identifier dans le cadre à dix cases? »
– « Combien de points est-ce qu'il y a en tout dans le cadre à dix cases? »
– « Combien d'objets est-ce qu'il y a dans le sac à surprises A? »

Faire remarquer aux élèves que le nombre de points dans le cadre à dix cases est égal au nombre d'objets dans le sac à surprises A.

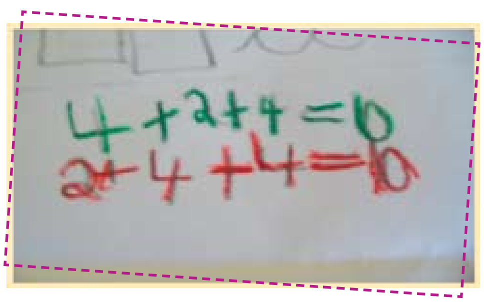
Présenter ensuite un cadre à dix cases dont les points représentent correctement le contenu du sac à surprises B et refaire le même questionnement afin d'établir à nouveau le lien entre le nombre de points dans le cadre et le nombre d'objets dans le sac.

Demander ensuite aux élèves de représenter la quantité d'objets dans chaque sac à surprises à l'aide de deux phrases mathématiques différentes.

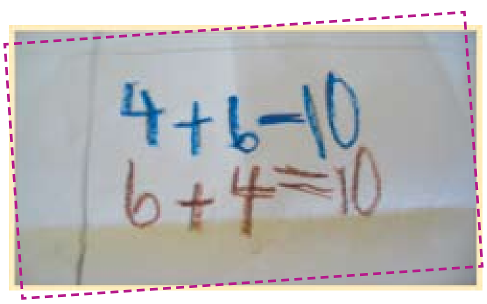
Une **phrase mathématique** est une expression symbolique qui représente une relation.

Voici quelques phrases mathématiques possibles pour chaque sac à surprises :

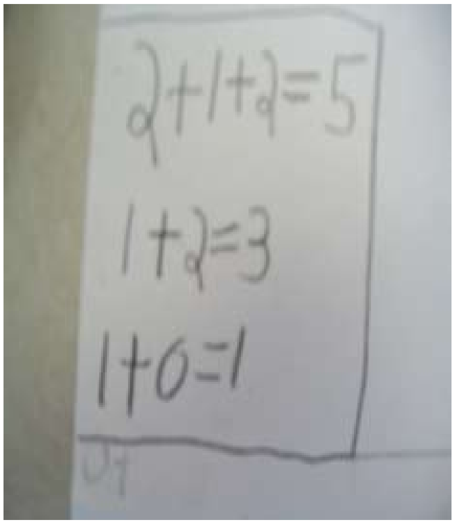
Phrases mathématiques qui représentent les objets du sac à surprises A.



Phrases mathématiques qui représentent les objets du sac à surprises B.



Il est important de représenter une même situation d'égalité par différentes phrases mathématiques. De cette façon, les élèves comprendront que le signe = ne sert pas uniquement à introduire une réponse à une opération; il exprime aussi la relation qui existe entre les nombres ou les expressions de chaque côté de ce signe. Pour plus de renseignements à ce sujet, voir *Sens du symbole de l'égalité* (p. 36-38).

Observations possibles	Interventions possibles
Une élève écrit des phrases mathématiques qui ne représentent pas les quantités d'objets contenus dans les sacs à surprises.  	Demander à l'élève ce que représentent les nombres dans ses phrases mathématiques. Lui demander de dénombrer les toupies dans le sac à surprises A et d'écrire le nombre correspondant à cette quantité. Poursuivre ce questionnement pour les ballons et les jeux de cartes. Lui demander ensuite quel signe elle doit écrire pour indiquer que ces quantités sont rassemblées dans le même sac à surprises (le signe +) et quel signe elle doit écrire pour indiquer que l'expression correspond à la somme de tous les objets rassemblés (le signe =).
Certains élèves omettent d'écrire les signes + ou =.	Demander aux élèves de lire leurs phrases mathématiques à haute voix. Souligner qu'ils ont dit *plus* et *est égal à,* mais que les symboles correspondants n'apparaissent pas dans leurs phrases mathématiques. Leur demander de les ajouter aux endroits appropriés.
Certains élèves n'écrivent qu'une seule phrase mathématique.	Leur suggérer de changer l'ordre dans lequel les objets ont été dénombrés et d'écrire une nouvelle phrase mathématique.

Après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique)

Demander à un ou une élève de présenter une de ses phrases mathématiques correspondant au contenu du sac à surprises A et d'expliquer la signification des symboles. Par exemple, dans la phrase mathématique **4 + 4 + 2 = 10** :

- le premier 4 représente le nombre de ballons;
- le deuxième 4 représente le nombre de toupies;
- le 2 représente le nombre de jeux de cartes;
- le signe + représente la réunion des objets du sac à surprises A;
- le signe = signifie que les quantités représentées de chaque côté du signe sont égales.

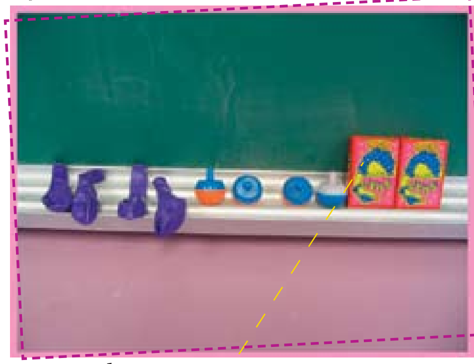


Photo A

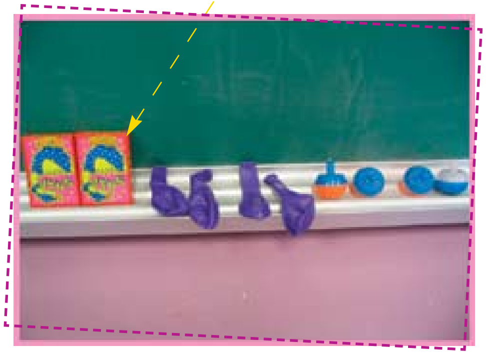
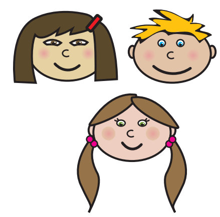


Photo B

Demander à un ou une autre élève d'écrire et d'expliquer une phrase mathématique différente pour représenter les objets contenus dans le sac à surprises A. Si personne n'a trouvé une phrase différente, déplacer les jeux de cartes comme illustré sur les photos ci-contre.

Pour des renseignements au sujet de l'échange mathématique, voir *Annexe générale* (p. 185-186).



environ

30 minutes

Demander ensuite à un ou une élève de venir écrire une phrase mathématique qui représente cette deuxième situation (voir photo B), soit **2 + 4 + 4 = 10** ou **10 = 2 + 4 + 4**.

Inciter les élèves à comparer les phrases **4 + 4 + 2 = 10** et **2 + 4 + 4 = 10** en posant des questions telles que :

– « Est-ce que les deux phrases mathématiques représentent le contenu du sac à surprises A? »

– « Est-ce que les deux phrases mathématiques sont **vraies**? Comment le savez-vous? »

Note : Cette question incite les élèves à vérifier si les expressions numériques de part et d'autre du signe représentent la relation indiquée par le signe (dans la situation présente, il s'agit du signe =). Si c'est le cas, on dit que la phrase mathématique est **vraie**.

Au besoin, suggérer à un ou une élève de recourir à une des représentations ou aux objets contenus dans le sac à surprises pour le démontrer.

Présenter d'autres phrases mathématiques ou demander à un ou une élève de changer l'ordre des objets, d'écrire la phrase mathématique correspondante et de démontrer comment elle représente les objets du sac à surprises A.

Suivre la même démarche pour écrire les phrases mathématiques qui représentent le contenu du sac à surprises B. Par exemple, selon l'objet choisi en premier (les kaléidoscopes ou les jeux de cartes), les phrases mathématiques pourraient être :

6 + 4 = 10

4 + 6 = 10

Si les élèves expliquent que les objets sont déjà réunis, ils pourraient aussi écrire les phrases mathématiques :

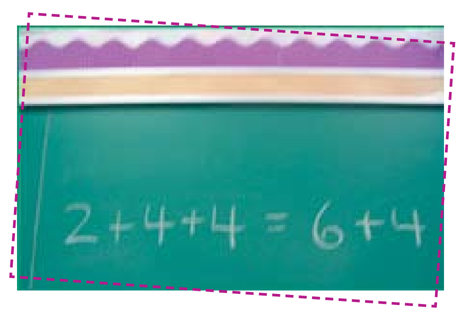
10 = 4 + 6

10 = 6 + 4

Il est important de présenter les différentes phrases mathématiques qui représentent une même situation d'égalité afin d'aider les élèves à comprendre qu'une relation peut être représentée de différentes façons.

Poser ensuite des questions reliées aux représentations concrètes et symboliques du contenu des deux sacs à surprises telles que :

– « Est-ce que les deux sacs à surprises contiennent une quantité égale d'objets? Comment le savez-vous? » (*Oui, puisque chaque sac contient 10 objets en tout.*)



Pour chacun des sacs à surprises, choisir une phrase mathématique qui représente son contenu et combiner ces deux phrases pour en former une nouvelle. Par exemple, combiner les phrases **2 + 4 + 4 = 10** et **6 + 4 = 10** pour former la phrase **2 + 4 + 4 = 6 + 4**.

Écrire cette phrase au tableau et demander aux élèves :

– « Est-ce que les expressions numériques **2 + 4 + 4** et **6 + 4** sont égales? Comment le savez-vous? » (*Parce que chacune représente le contenu d'un des sacs à surprises et que nous savons que chaque sac contient 10 objets.*)

> Lorsque les quantités des deux sacs à surprises sont comparées, la situation en est une d'équivalence. Pour plus de renseignements au sujet de la différence entre une **situation d'égalité** et une **situation d'équivalence**, voir *Vocabulaire lié aux situations d'égalité* (p. 31-33).

Pour justifier l'égalité, certains élèves pourraient souligner les relations entre les nombres de chaque côté du signe = en disant : « Il y a un chiffre 4 de chaque côté du signe =. L'expression 2 + 4 qui se trouve du côté gauche est égale au 6 qui se trouve du côté droit. »

$$\mathbf{2 + 4 + 4 = 6 + 4}$$

Prolongement

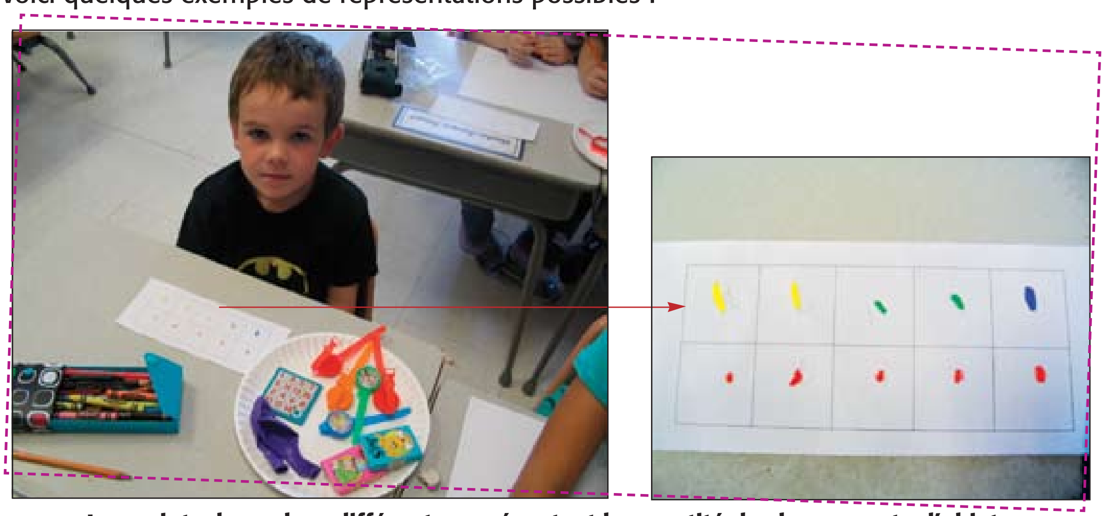
Nouvelles surprises!

Cette activité permet aux élèves d'approfondir le concept d'égalité en construisant diverses représentations d'une situation d'égalité donnée. La répétition de ce genre d'activité tout au long de l'année aide les élèves à concevoir l'égalité comme une relation entre les expressions numériques situées de part et d'autre du signe =.

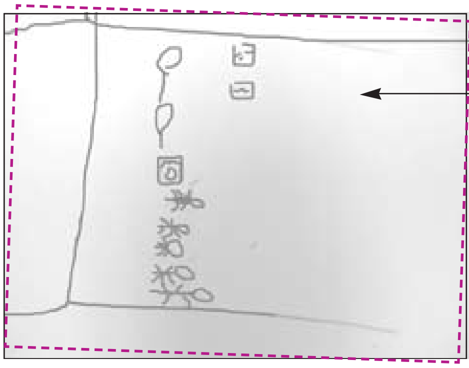
Placer à l'avance dix petits objets dans des sacs en plastique refermables en vous assurant d'inclure au moins quatre sortes d'objets différents dans chaque sac.

Former des équipes de deux. Remettre à chaque équipe un des sacs en plastique contenant dix petits objets, une assiette en carton, une grande feuille et un cadre à dix cases. Demander aux équipes de disposer le contenu de leur sac dans l'assiette et de représenter la quantité d'objets de différentes façons comme ils l'ont fait pour les sacs à surprises A et B lors de la situation d'apprentissage.

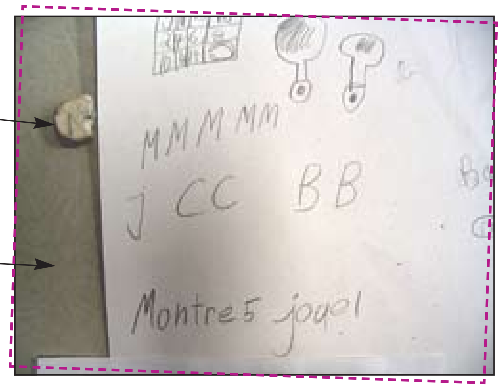
Voici quelques exemples de représentations possibles :



Les points de couleur différente représentent la quantité de chaque sorte d'objets.

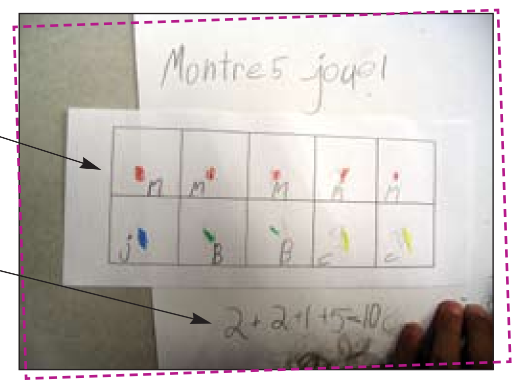


Chaque objet est dessiné, la quantité de dessins correspondant à la quantité d'objets.



Chaque objet est représenté par la première lettre de son nom, la quantité de lettres correspondant à la quantité d'objets.

Le nom de chaque objet est écrit, suivi du nombre représentant sa quantité.



Les quantités sont représentées dans un cadre à dix cases par la première lettre du nom de l'objet et par un point de couleur.

Les quantités sont représentées par une phrase mathématique.

***Circuler et poser des questions**…*

Inviter les élèves à faire part de leur raisonnement en posant des questions telles que :

– « Pourquoi avez-vous placé les objets pareils ensemble? » (*Afin que les mêmes sortes d'objets soient plus faciles à dénombrer*.)

– « Comment représentez-vous les quantités de chaque sorte d'objets? »

– « En quoi vos représentations sont-elles semblables? En quoi sont-elles différentes? »

– « Quelle phrase mathématique pourrait représenter les quantités d'objets? »

– « Cette phrase mathématique est-elle vraie? Comment le savez-vous? »

– « Pouvez-vous écrire une autre phrase mathématique pour représenter les mêmes objets? Laquelle? »

En groupe classe, faire un retour sur les divers modes de représentations utilisés par les élèves en suivant le même genre de démarche et de questionnement utilisé lors de la situation d'apprentissage. S'assurer que les élèves font le lien entre la représentation concrète et la phrase mathématique. Cibler les modes de représentation qui n'ont pas été utilisés par les élèves afin de les expliquer à nouveau.

Comparer la phrase mathématique d'une des équipes (p. ex., **2 + 2 + 1 + 5 = 10**) à la phrase mathématique qui représentait les objets contenus dans le sac à surprises B (**4 + 6 = 10**) et les écrire au tableau côte à côte.

Poser des questions telles que :

– « Qu'est-ce que les deux phrases mathématiques ont de pareil? » (*Les deux représentent une situation d'égalité comprenant 10 objets*.)

– « Qu'est-ce que les deux phrases mathématiques ont de différent? » (*L'une des phrases représente une situation d'égalité comprenant quatre sortes d'objets alors que l'autre représente une situation d'égalité comprenant deux sortes d'objets*.)

– « Est-ce que la phrase **2 + 2 + 1 + 5 = 4 + 6** est vraie? Comment le savez-vous? » (*Elle est vraie puisque les expressions numériques de chaque côté du signe = sont égales à 10*.)

Adaptations

La situation d'apprentissage peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• Demander aux élèves de représenter les situations d'égalité par des dessins; s'assurer qu'ils utilisent les expressions « est égal à » et « plus » lorsqu'ils expliquent leur représentation.	• Demander aux élèves de créer des situations d'égalité semblables et de les présenter au groupe classe. • Leur demander d'écrire des phrases mathématiques afin qu'un ou une autre élève les illustre avec du matériel concret.

Suivi à la maison

Un membre de la famille décrit une situation possible d'équivalence ou d'égalité en utilisant le vocabulaire soumis par l'enseignant ou l'enseignante. L'élève doit déterminer si l'énoncé est vrai ou faux et expliquer sa réponse. Voici deux suggestions d'énoncés :

- Le nombre de fenêtres dans la maison est égal au nombre de portes. (Il s'agit ici d'une situation possible d'équivalence.)
- Le nombre total de billes bleues et de billes rouges dans ta collection est égal à 18. (Il s'agit ici d'une situation possible d'égalité.)

Les élèves peuvent aussi jouer à représenter, à l'aide d'objets, des phrases mathématiques inscrites sur des cartes. Par exemple, un parent présente une carte sur laquelle il ou elle a préalablement écrit **5 + 3 = 8** et demande à son enfant de représenter la situation avec des boutons ronds et des boutons carrés. (Il s'agit ici d'une situation d'égalité.)

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 1

Super balançoire à bascule!

Matériel

- annexes 1.1 à 1.4 (une copie par élève)
- transparents des annexes 1.1 et 1.3
- ciseaux
- colle

SOMMAIRE : Dans cette activité, les élèves explorent des relations pour compléter une situation d'équivalence.

DÉROULEMENT : Suivre les étapes suivantes.

1re étape

Projeter la *Situation d'équivalence 1* présentée à l'annexe 1.1. Demander aux élèves de décrire la relation entre les masses des acrobates qui est représentée dans cette situation.

Distribuer une copie des annexes 1.1 et 1.2 aux élèves. Leur demander de compléter les situations 1a et 1b présentées à l'annexe 1.1 en respectant la relation entre les masses des acrobates représentée dans la *Situation d'équivalence 1*.

Poser les questions suivantes :

– « Comment savez-vous que les deux côtés sont équivalents? »

– « Y a-t-il d'autres solutions possibles? »

Lors de l'objectivation, demander aux élèves d'expliquer leur raisonnement et de justifier leur réponse.

2e étape

Projeter la *Situation d'équivalence 2* présentée à l'annexe 1.3. Demander aux élèves de décrire la relation entre les masses des acrobates qui est représentée dans cette situation.

Distribuer une copie de l'annexe 1.3 aux élèves et, au besoin, une autre copie de l'annexe 1.2. Leur demander de compléter les situations 2a et 2b présentées à l'annexe 1.3 en respectant les relations entre les masses des acrobates représentées dans la *Situation d'équivalence 1* et dans la *Situation d'équivalence 2*.

Poser des questions telles que :

– « Comment savez-vous que les deux côtés sont équivalents? »

– « Y a-t-il d'autres solutions possibles? »

Lors de l'objectivation, demander aux élèves d'expliquer leur raisonnement et de justifier leur réponse.

3e étape (facultative)

Distribuer une copie de l'annexe 1.4 aux élèves. Les mettre au défi de compléter chacune des situations 3a, 3b et 3c de deux façons différentes.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 2

Feufino le dragon

SOMMAIRE : Dans cette activité, les élèves représentent par des phrases mathématiques toutes les décompositions possibles du nombre 4.

Matériel
- annexes 1.5 et 1.6 (1 copie par élève)
- ensemble de 4 cubes emboîtables ou de gommettes d'une couleur et de 4 d'une autre couleur (1 ensemble par élève)

DÉROULEMENT : Après avoir lu des contes de dragons aux élèves, leur présenter la situation imaginaire suivante :

Un dragon nommé Feufino habite à flanc de montagne près de Coloriville. Tour à tour, tous les dragons de cette ville font peindre les quatre belles pointes sur leur queue de deux couleurs différentes. Lorsque vient le tour de Feufino, il n'arrive pas à décider du nombre de pointes à faire peindre de chaque couleur.

Présenter aux élèves l'illustration de Feufino le dragon triste (annexe 1.5) en leur disant :

Feufino a besoin de notre aide. Pour l'aider à prendre une décision, il faut trouver ensemble le plus de répartitions possible de deux couleurs que Feufino peut choisir pour faire peindre les quatre pointes sur sa queue.

Modeler une répartition de couleurs possible à l'aide d'un des ensembles de cubes emboîtables (p. ex., un cube bleu et trois cubes rouges représentent une des combinaisons de couleurs des quatre pointes). Demander ensuite aux élèves de trouver autant de répartitions qu'ils peuvent et d'écrire au fur et à mesure sur une feuille une phrase mathématique qui correspond à la répartition de couleurs trouvée (pour l'exemple modelé, il s'agit de **1 + 3 = 4** ou de **4 = 1 + 3**).

Demander aux élèves d'expliquer comment ils peuvent savoir s'ils ont toutes les répartitions possibles de deux couleurs. Certains pourraient fonder leur explication sur la régularité suivante :

4 = 3 + 1

4 = 2 + 2

4 = 1 + 3

(-1) (+1) (régularité dans chaque colonne)

La relation de changement

Dans une situation d'égalité, le changement d'un des termes de l'expression entraîne nécessairement un changement dans l'autre terme.

Faire une mise en commun de toutes les décompositions possibles du nombre 4. Poser des questions telles que :

– « Est-ce que toutes les répartitions de deux couleurs sont égales à 4? Comment le savez-vous? »

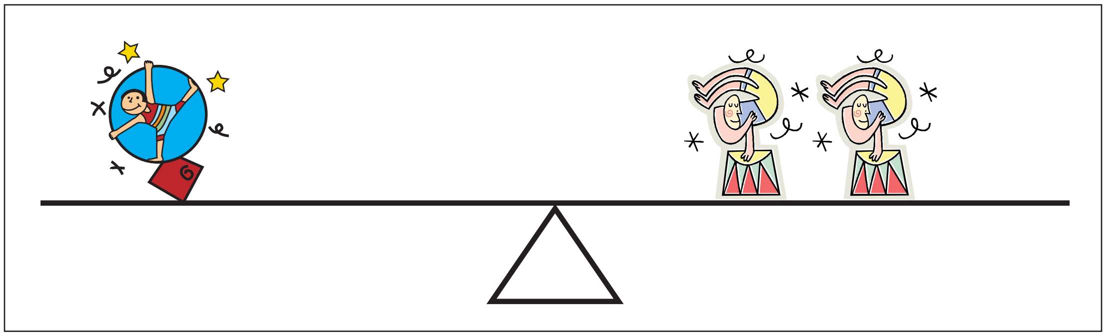
– « Est-ce que la phrase mathématique **4 = 1 + 3** représente la même répartition de couleurs que la phrase **4 = 3 +1**? »

Distribuer une copie de l'annexe 1.6 à chaque élève et leur proposer de colorier les pointes sur la queue de Feufino selon leur répartition de couleurs préférée.

Note : Cette activité peut être reprise en utilisant un nombre différent de couleurs ou de pointes.

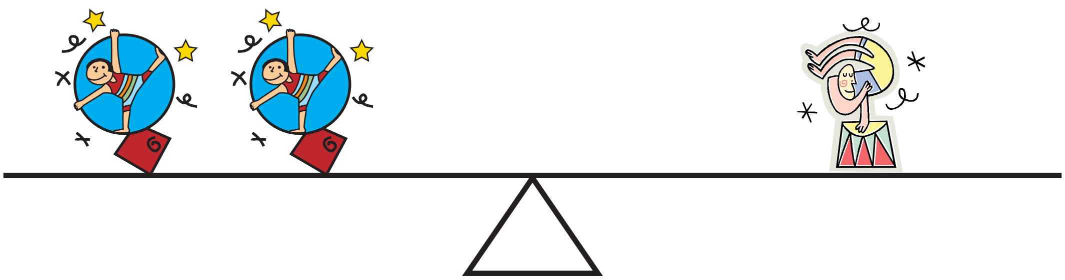
ANNEXE 1.1

Situation d'équivalence 1

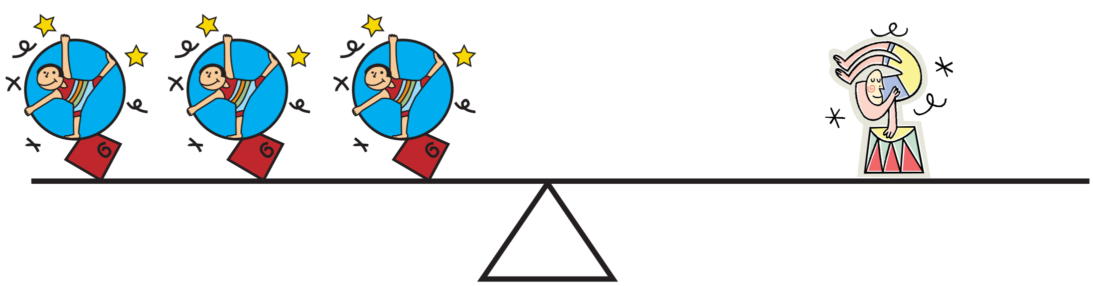


Les deux situations suivantes représentent une situation d'équivalence **incomplète**. Quels acrobates faudrait-il ajouter pour rendre chacune complète?

Situation 1a

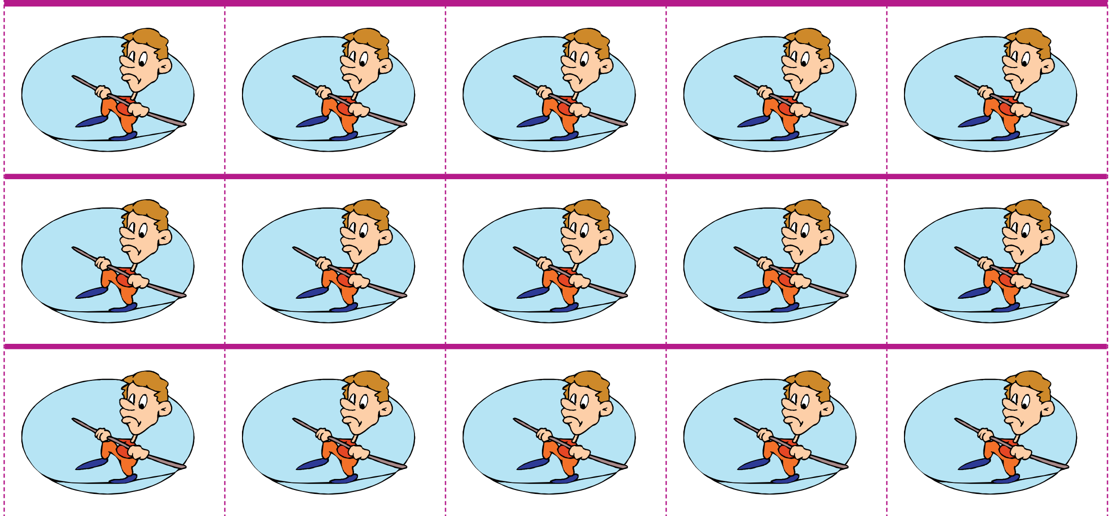


Situation 1b

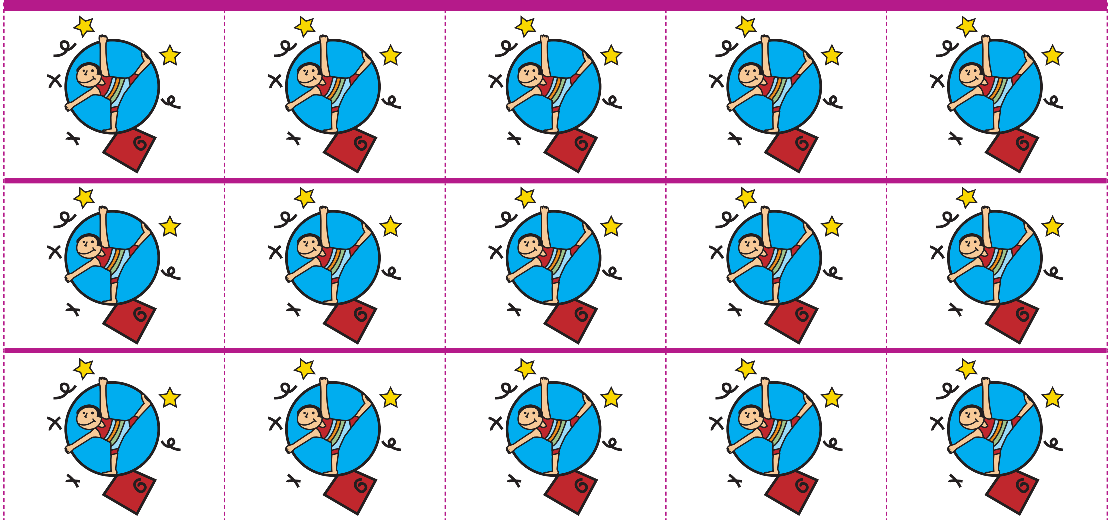


ANNEXE 1.2

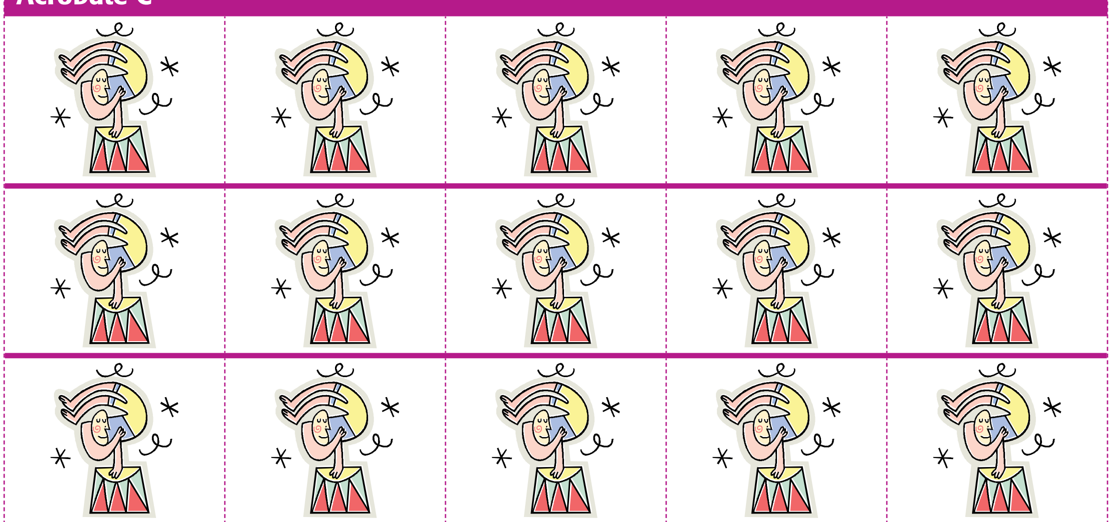
Acrobate A



Acrobate B

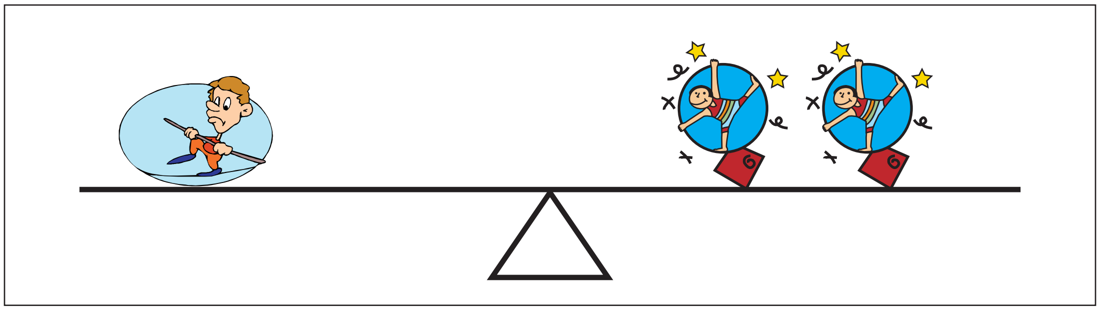


Acrobate C



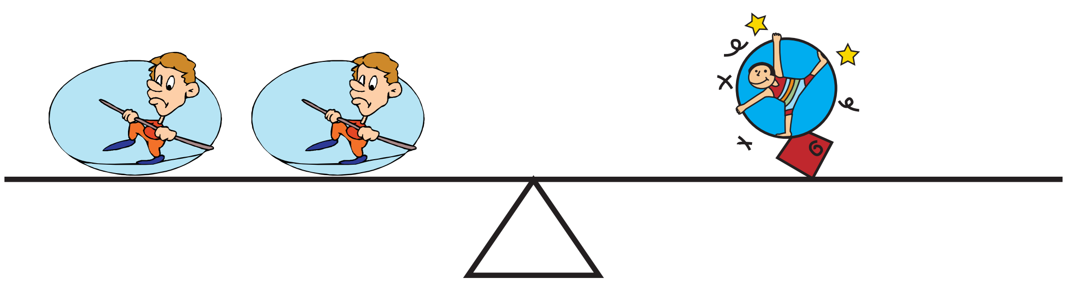
ANNEXE 1.3

Situation d’équivalence 2

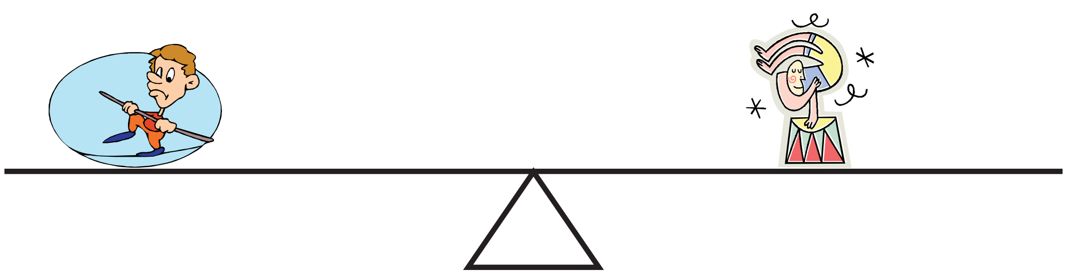


Les deux situations suivantes représentent une situation d’équivalence **incomplète**. Quels acrobates faudrait-il ajouter pour rendre chacune complète?

Situation 2a



Situation 2b

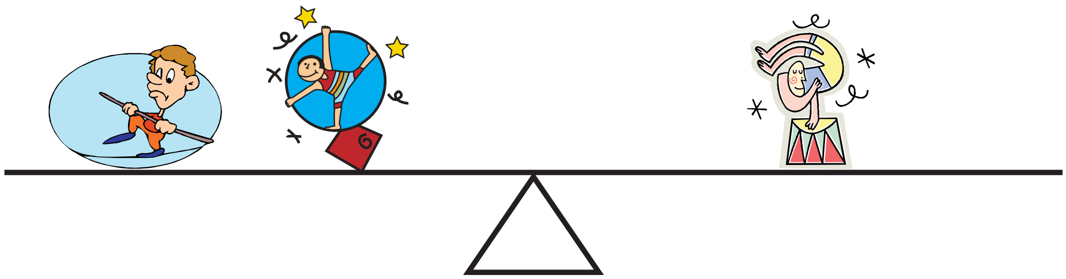


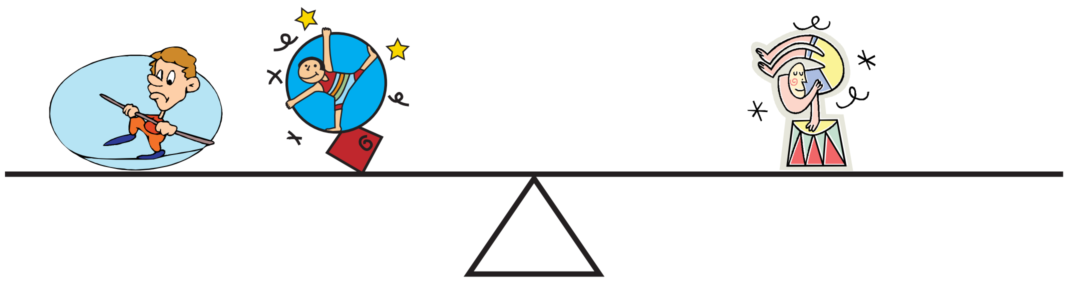
ANNEXE 1.4

Les trois situations suivantes représentent une situation d'équivalence **incomplète**.

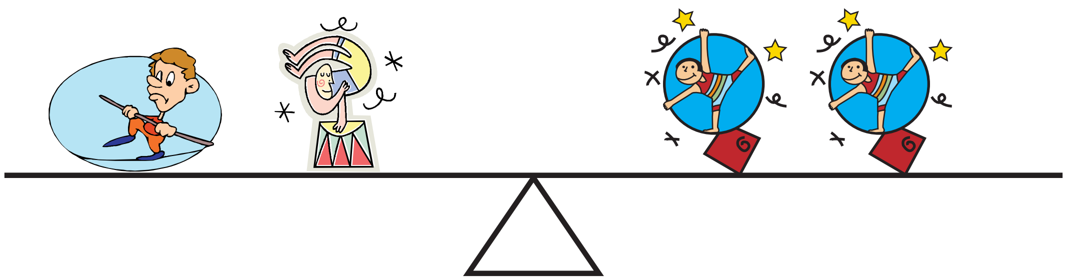
Complète chacune de deux façons différentes.

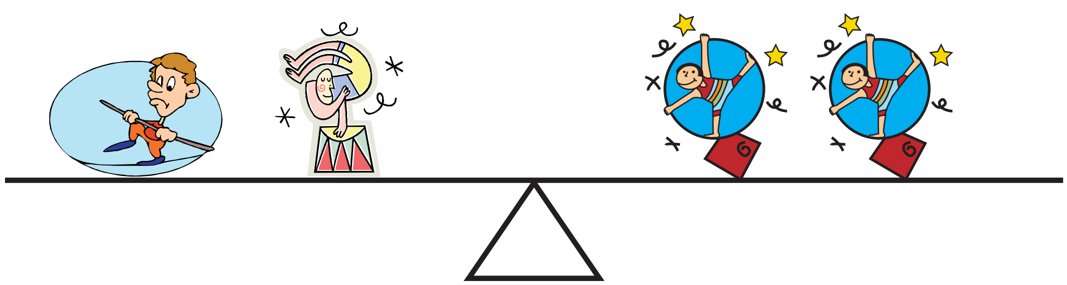
Situation 3a





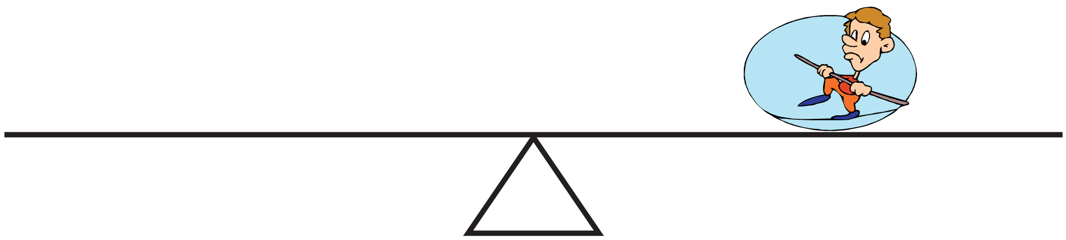
Situation 3b

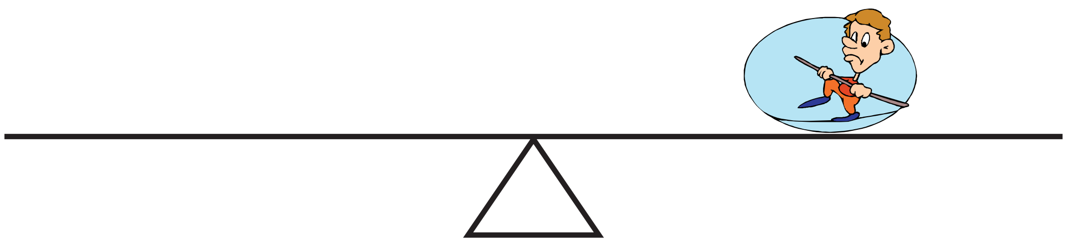




ANNEXE 1.4 (*suite*)

Situation 3c



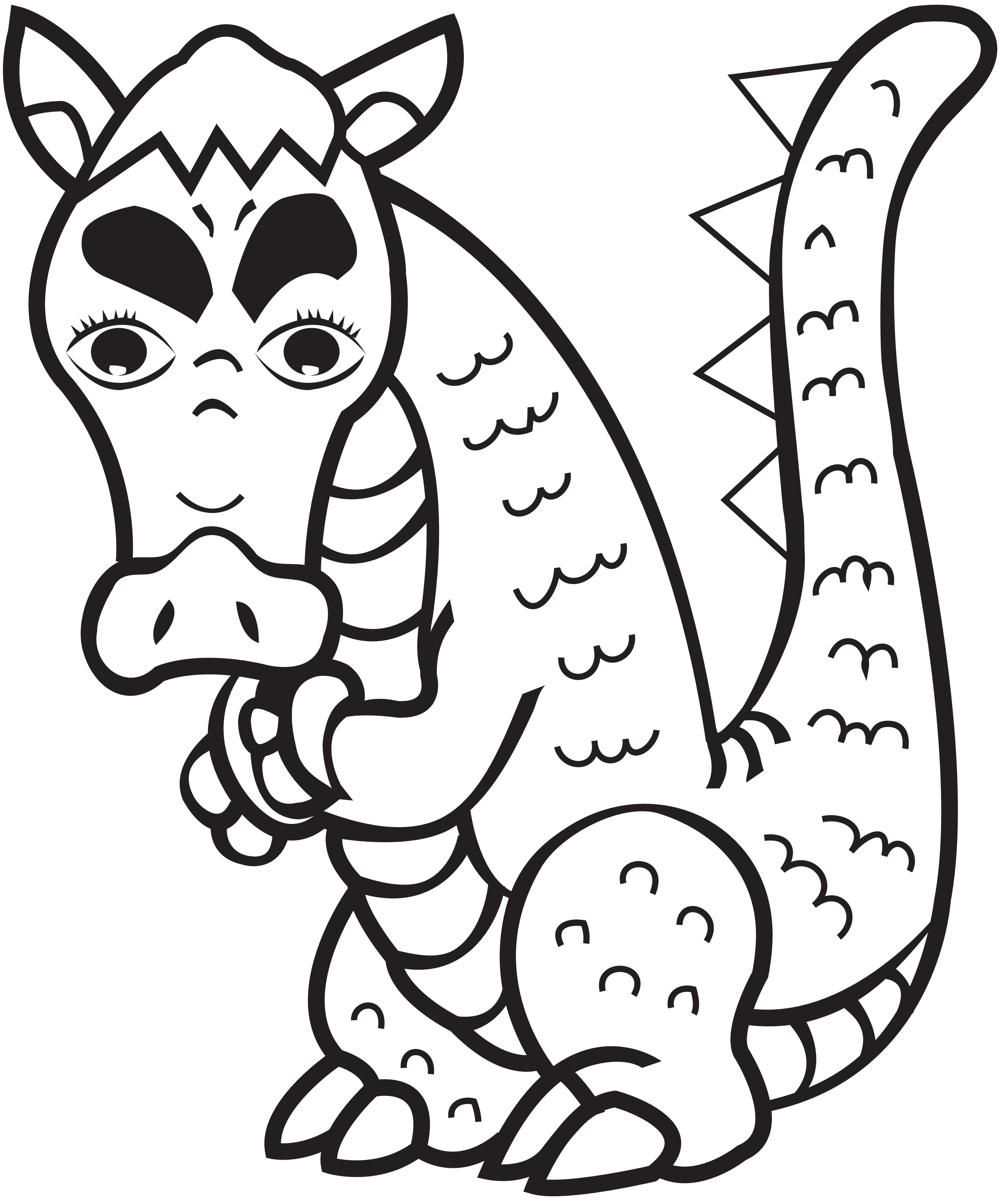


ANNEXE 1.5

Feufino le dragon triste

ANNEXE 1.6

Feufino le dragon heureux



Situation d'apprentissage, 2e année

Sautez, sautez les amphibiens!

Grande idée : Situations d'égalité

Sommaire

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves utilisent des données au sujet de la longueur de sauts d'amphibiens pour créer des situations d'équivalence et appliquent diverses stratégies afin de déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation.

Intention pédagogique

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à représenter une situation d'égalité à l'aide d'une droite numérique ouverte double;
- à déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation.

Matériel

- réglettes Cuisenaire (1 trousse par équipe de deux)
- réglettes Cuisenaire pour rétroprojecteur
- grande feuille (1 par équipe)
- marqueurs
- annexes 2.1, 2.2, et 2.3 (1 copie par élève)
- transparent de l'annexe 2.1
- transparent vierge

Attente et contenus d'apprentissage

Attente

L'élève doit pouvoir déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation à l'aide de matériel concret.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

– trouver, à l'aide ou non de matériel concret (p. ex., balance à deux plateaux, calculatrice), la valeur de l'inconnue dans une équation (p. ex., **3 + ◊ = 5**, **■ – 7 = 5**);

– expliquer le lien entre la représentation concrète et symbolique d'une équation.

Contexte pédagogique

La compréhension du concept d'égalité est essentielle au développement du raisonnement algébrique. Afin d'aider les élèves à y parvenir, il est important que l'enseignant ou l'enseignante leur présente plusieurs modèles mathématiques.

Voir le module *Modélisation et algèbre* sur le site *www.atelier.on.ca* pour une présentation de la droite numérique ouverte double.

atelier.on.ca

La présente situation d'apprentissage propose un de ces modèles, soit la droite numérique ouverte double. Ce modèle permet aux élèves d'utiliser la stratégie *comparer des termes* (voir p. 107-108) pour reconnaître deux expressions algébriques équivalentes, de leur donner un sens et, conséquemment, d'approfondir leur compréhension du concept d'égalité. De plus, ce modèle aide les élèves à organiser leur pensée et facilite l'analyse des relations.

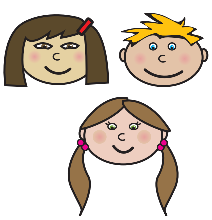
Préalables

Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent avoir déjà exploré :

- la représentation de situations d'égalité;
- le lien entre la représentation concrète et la représentation symbolique d'une équation;
- l'utilisation de la droite numérique ouverte et de la droite numérique ouverte double (voir *Droites numériques*, p. 65-70).

Vocabulaire mathématique

Situation d'égalité, autant que, est égal à, n'est pas égal à, symbole de l'égalité, inconnue, équation, expression numérique, phrase mathématique.



environ
30 minutes

Avant l'apprentissage (mise en train)

Présenter la situation en disant aux élèves :

> *Lors d'un projet de sciences, Louis compare la longueur des sauts de trois espèces d'amphibiens, soit la longueur des sauts d'un crapaud, des sauts d'une grenouille et des sauts d'une rainette. Il remarque que la longueur de chaque saut de crapaud est égale à la longueur de deux sauts de grenouille et à la longueur de quatre sauts de rainette.*

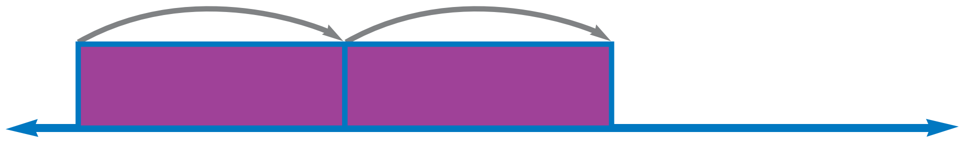
Projeter au besoin l'annexe 2.1 (*Les amphibiens*) et vérifier la compréhension qu'ont les élèves de la situation. Distribuer à chaque élève des réglettes Cuisenaire : 4 réglettes blanches, 2 réglettes rouges et 2 réglettes mauves.

Poser les questions suivantes :

– « Selon vous, quelle réglette pourrait représenter le saut du crapaud? » (*La réglette mauve*.)

– « Pourquoi? »

Sur un transparent, tracer une droite numérique ouverte et la placer au rétroprojecteur. Demander à un ou à une élève de représenter deux sauts de crapaud sur la partie supérieure de la droite numérique ouverte, à l'aide de deux réglettes mauves. Par la suite, dénombrer les sauts en traçant des bonds.

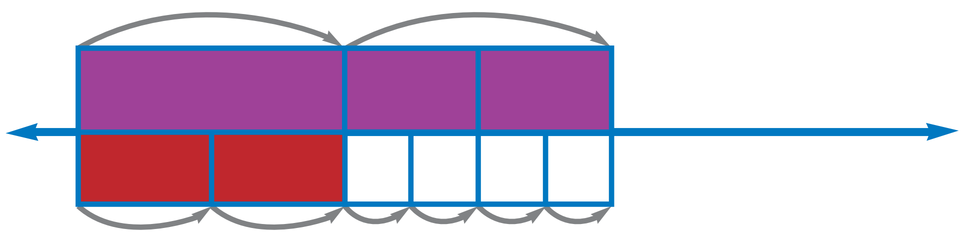


Demander aux élèves :

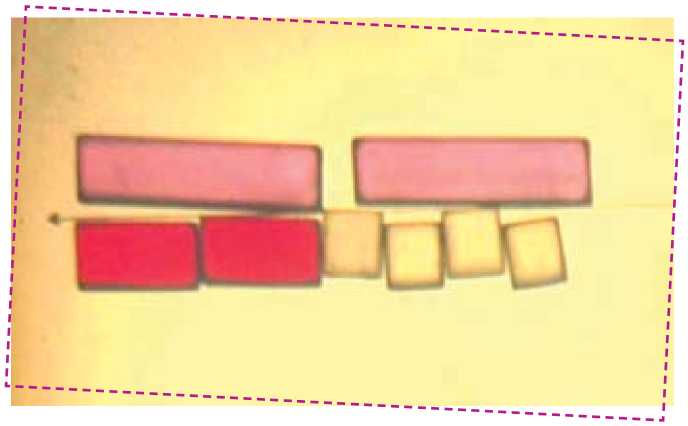
– « Quelles réglettes représenteraient la longueur des sauts de chacun des deux autres amphibiens? » (*La réglette rouge représenterait la longueur du saut de la grenouille et la réglette blanche, celle de la rainette.*)

Inviter un ou une élève à représenter deux sauts de grenouille en disposant deux réglettes rouges sous la réglette représentant le premier saut de crapaud.

Demander ensuite à un ou à une élève de représenter quatre sauts de rainette en plaçant quatre réglettes blanches sous la réglette représentant le deuxième saut de crapaud. Par la suite, dénombrer les sauts en traçant des bonds.



Demander aux élèves de décrire oralement une situation d’équivalence représentée par les réglettes. Par exemple, « La longueur d’un saut de crapaud est égale à la longueur de deux sauts de grenouille. »



Inciter les élèves à représenter cette situation d’équivalence à l’aide de chiffres et de symboles littéraux.

Un symbole littéral est une lettre qui, en vertu d'une convention ou d'une association arbitraire, correspond à une valeur ou à une grandeur.

Note : Lors de la mise à l'essai de la situation d'apprentissage, les élèves ont suggéré d'utiliser, comme symbole littéral, la première lettre du nom de chaque amphibien (p. ex., la phrase mathématique **1 C = 2 G** signifie qu'un saut de crapaud est équivalent à deux sauts de grenouille).

Suggérer aux élèves de représenter d'autres situations d'équivalence à l'aide d'une phrase mathématique et de les justifier en utilisant les réglettes. Voici quelques exemples de phrases mathématiques possibles :

1 C = 4 R

2 C = 2 G + 4 R

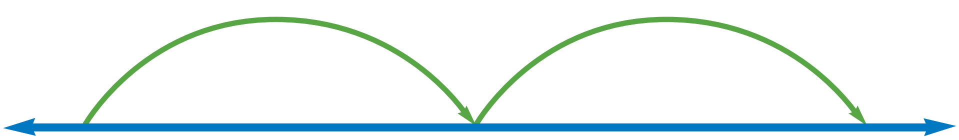
2 C = 8 R

2 C = 4 G

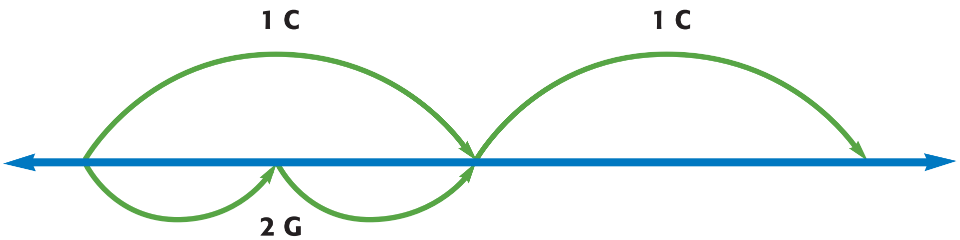
Insister auprès des élèves sur l'importance d'exprimer chaque équation par une phrase complète. Par exemple, **1 C = 4 R** se lit : « La longueur d'un saut de crapaud est égale à la longueur de quatre sauts de rainette. »

Puisque la droite numérique ouverte n'est pas graduée, les bonds représentent une quantité ou une longueur approximative. Il est toutefois important que les longueurs des bonds soient proportionnelles.

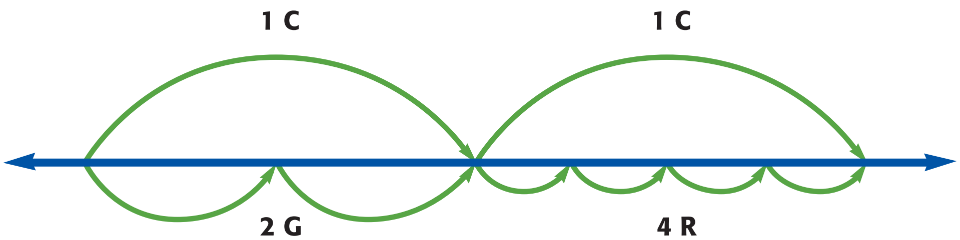
Dessiner une droite numérique ouverte au tableau. Demander ensuite à un ou à une élève de représenter deux sauts de crapaud en traçant deux bonds de longueur approximativement égale sur la partie supérieure de la droite.



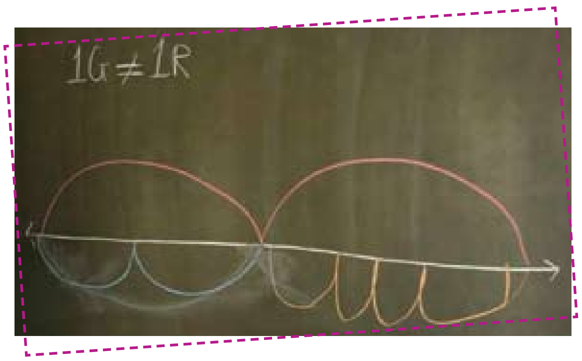
Inviter un ou une autre élève à représenter deux sauts de grenouille en traçant deux bonds sous le premier bond du crapaud. S'assurer que les deux bonds tracés sont approximativement de la même longueur et que la longueur totale des deux bonds correspond à la longueur d'un bond de crapaud. Il peut être opportun d'ajouter symboliquement ce que les bonds représentent (p. ex., 1 C, 2 G) comme l'illustration suivante le montre.



Demander à un ou à une autre élève de représenter quatre sauts de rainette en traçant quatre bonds sous le deuxième bond du crapaud. S'assurer que les quatre bonds tracés sont approximativement de la même longueur et que la longueur totale des quatre bonds correspond à la longueur d'un bond de crapaud.



Note : Lors de la mise à l'essai, un élève voulait tracer les sauts de rainette de la même longueur que ceux de la grenouille. Un autre élève lui a fait remarquer que les deux sauts n'avaient pas la même longueur et a écrit symboliquement **1 G ≠ 1 R**, comme le démontre la photo ci-contre.



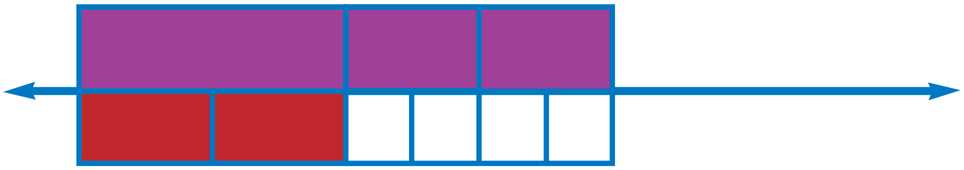
Poser des questions telles que :

– « Combien de sauts de rainette sont équivalents à un saut de grenouille? » (**2**)

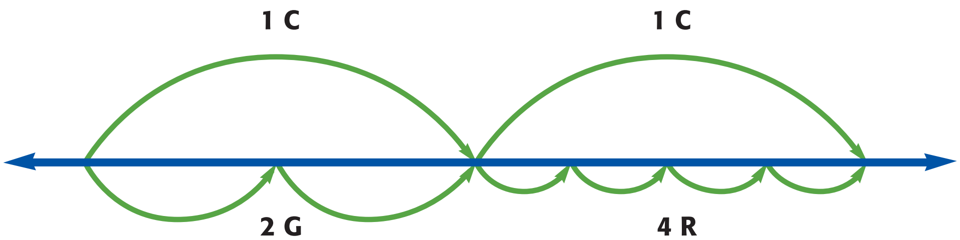
– « Quelle phrase mathématique représente cette situation d'égalité? » (**1 G = 2 R**)

Établir les liens entre :

- une phrase mathématique et sa représentation sur la droite numérique ouverte double;
- les représentations concrètes (réglettes) des situations d'égalité;



- les représentations semi-concrètes (droite numérique ouverte double) des situations d'égalité;



- les représentations symboliques des situations d'égalité;

1 C = 2 G

1 C = 4 R

2 C = 2 G + 4 R

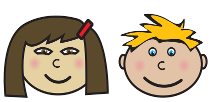
- les diverses descriptions orales;

– « La longueur d'un saut de crapaud est égale à la longueur de deux sauts de grenouille. »

– « La longueur d'un saut de crapaud est égale à la longueur de quatre sauts de rainette. »

– « La longueur de deux sauts de crapaud est égale à la somme de la longueur de deux sauts de grenouille et de quatre sauts de rainette. »

Avant de poursuivre, s'assurer que tous les élèves comprennent bien ce que signifie la phrase mathématique **2 C = 2 G + 4 R**.



équipes de 2

environ
45 minutes

Pendant l'apprentissage (exploration)

Grouper les élèves par deux et distribuer à chaque équipe une grande feuille, des marqueurs et une trousse de réglettes Cuisenaire. Puis, présenter le problème suivant :

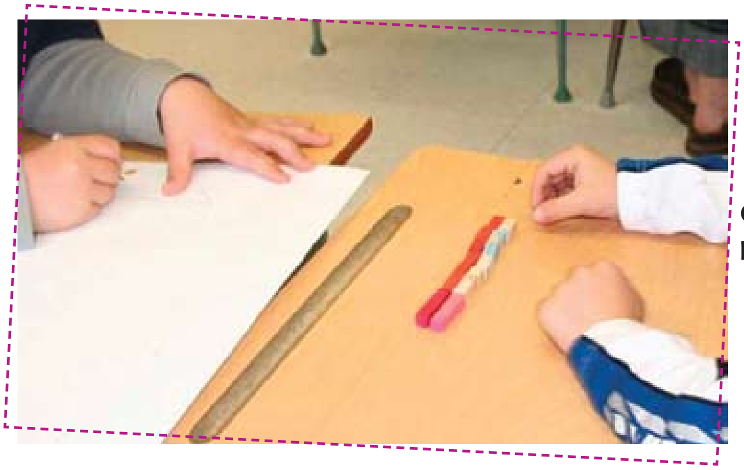
Louis a écrit les équations suivantes dans son journal de sciences, mais il semble avoir oublié certains nombres.

1 C + 6 G = 1 C + _____

1 C + 2 G + 6 R = 4 R + 1 C + ______

Peux-tu l'aider à déterminer la valeur de l'inconnue dans chacune de ces équations?

Demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue dans chacune des équations et de représenter leur solution sur la grande feuille. S'assurer qu'ils comprennent bien le problème.



Cette équipe utilise les réglettes pour représenter les bonds.

Cette équipe utilise une règle comme étalon de mesure pour représenter chacun des bonds sur la droite numérique ouverte double.

Circuler, observer et poser des questions…

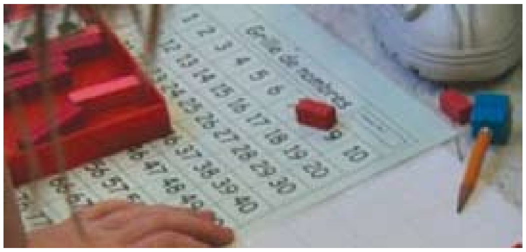
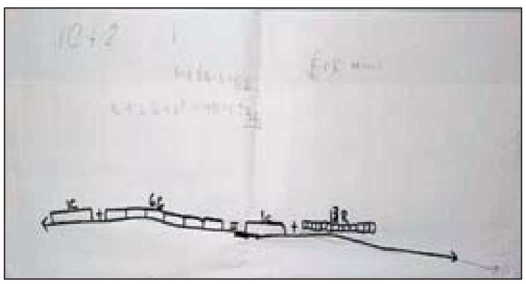
Poser aux élèves des questions telles que :

– « Comment pouvez-vous vérifier que cette équation décrit bien une situation d'égalité? »

– « Comment les réglettes sur la droite numérique ouverte double représentent-elles cette équation? »

– « Existe-t-il une autre solution ou une autre façon de représenter la solution? »

Sélectionner les solutions de quelques équipes pour l'échange mathématique de façon à faire ressortir différentes stratégies, par exemple l'utilisation de dessins, de la droite numérique ouverte double, de réglettes Cuisenaire, etc. Choisir, le cas échéant, le travail d'une équipe qui a appliqué une stratégie pour résoudre le problème et une autre stratégie pour vérifier la solution.

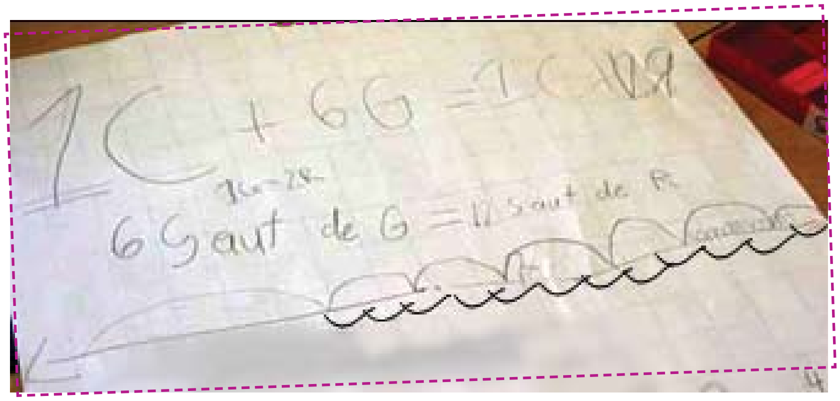
<table>
<tr><th>Observations possibles</th><th>Interventions possibles</th></tr>
<tr><td>Pour résoudre la première équation
1 C + 6 G = 1 C + ___ , des élèves utilisent la grille de nombres et effectuent une addition
1 + 6 = 7.
</td><td>Pour ces élèves, le signe = ne sert qu'à introduire une réponse; il ne représente pas une égalité entre deux expressions numériques.
Leur faire remarquer que **1 C ≠ 1 G** et qu'il faut par conséquent tenir compte des symboles numériques et littéraux.
Par vos interventions, amener ces élèves à réaliser que la grille de nombres n'est pas un outil efficace pour résoudre cette situation.
Dans le cadre d'activités ultérieures, présenter des phrases mathématiques et demander aux élèves de justifier si elles sont vraies ou fausses.</td></tr>
<tr><td>Des élèves représentent les deux parties de l'équation sur la portion supérieure de la droite numérique.
</td><td>Leur faire remarquer qu'en représentant une des expressions numériques de l'équation sur la partie supérieure de la droite numérique et l'autre sur sa partie inférieure, on arrive à les comparer plus aisément et ainsi, à confirmer une situation d'égalité ou d'inégalité.</td></tr>
<tr><td>Pour résoudre la deuxième équation
1 C + 2 G + 6 R = 4 R + 1 C + __ , des élèves ne tiennent compte que des termes à gauche du signe =. Ainsi, après avoir établi que 1 C est équivalent à 4 R et que 2 G est aussi équivalent à 4 R, ils additionnent ces termes,
4 R + 4 R + 6 R = 14 R.
Ils concluent que
1 C + 2 G + 6 R = 14 R.</td><td>Pour ces élèves, le signe = ne sert qu'à introduire une réponse; il ne représente pas une égalité entre deux expressions numériques.
Insister sur le fait qu'ils doivent déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation et non la réponse à une addition. Leur suggérer de représenter, avec des réglettes sur une droite numérique ouverte double, les expressions numériques de chaque côté du signe =.</td></tr>
<tr><td>Des élèves tracent, sur la droite numérique ouverte double, des bonds de différentes longueurs pour représenter des sauts de même longueur.</td><td>Ces élèves n'ont pas encore développé le sens des proportions. Les inciter à utiliser des réglettes comme étalon de mesure afin de leur faire comprendre l'importance de tracer des bonds de longueurs égales.</td></tr>
</table>

Après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique)

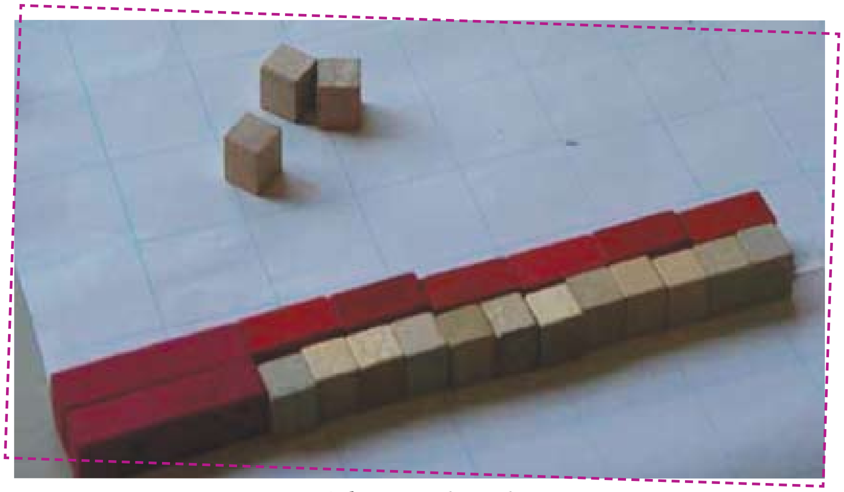
Échange au sujet de la première équation (1 C + 6 G = 1 C + ____)

Demander aux élèves qui ont appliqué différentes stratégies pour déterminer l'inconnue dans la première équation d'expliquer leur démarche.

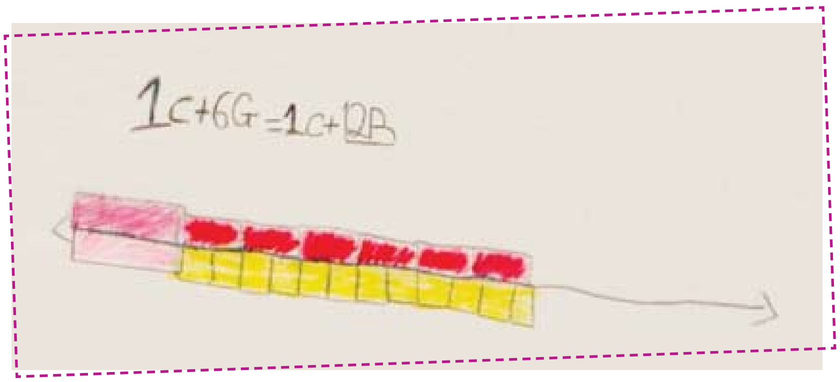
Exemples



Droite numérique ouverte double et représentation symbolique

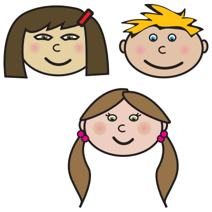


Réglettes Cuisenaire



Droite numérique ouverte double, dessins de réglettes Cuisenaire et représentation symbolique

Pour des renseignements au sujet de l'échange mathématique, voir *Annexe générale* (p. 185-186).

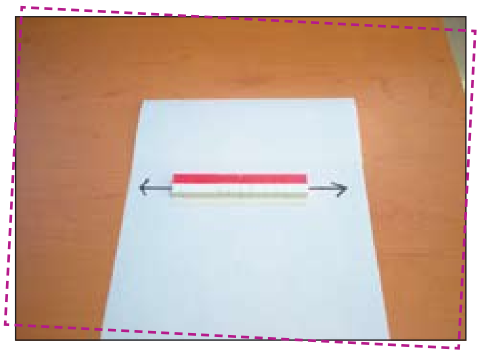


environ

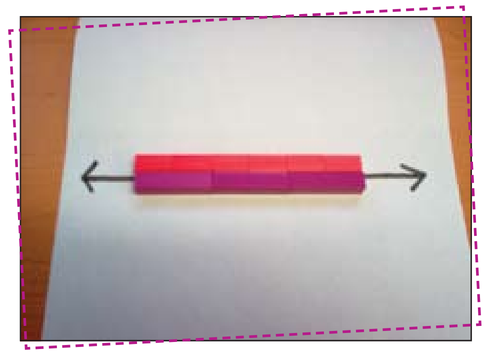
30 minutes

Encourager les élèves à poser des questions à ceux qui présentent leur démarche afin de mieux la comprendre. Leur demander aussi d'échanger leur point de vue, avec un pair, sur la démarche démontrée. Sont-ils d'accord? Pourquoi?

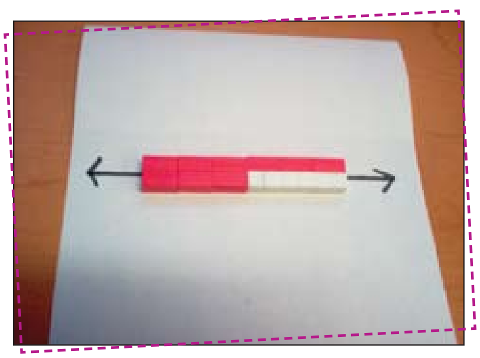
Discuter des différentes stratégies utilisées pour découvrir l'inconnue; attirer l'attention des élèves sur la stratégie *annuler des termes ou des expressions égales* de chaque côté du signe = (voir p. 105-106). Par exemple, dans la première équation, on remarque que le terme 1 C se retrouve de chaque côté du symbole de l'égalité; en appliquant cette stratégie, on annule ces termes identiques, isolant par le fait même le terme 6 G. Il est alors facile de conclure que l'inconnue qui figure à droite du signe = est nécessairement égale à 6 G. Il peut s'agir d'un terme, soit par exemple 12 R ou 3 C, ou d'une expression numérique, soit par exemple **3 G + 6 R** ou **4 G + 4 R**.



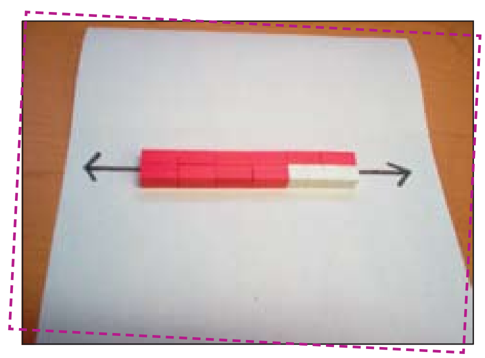
6 G = 12 R



6 G = 3 C



6 G = 3 G + 6 R



6 G = 4 G + 4 R

Échange au sujet de la deuxième équation (1 C + 2 G + 6 R = 4 R + 1 C + ___)

Demander aux élèves qui ont appliqué différentes stratégies pour déterminer l'inconnue dans la deuxième équation d'expliquer leur démarche. Afin de les aider à organiser leur pensée, demander à quelques élèves de reformuler la présentation faite par les pairs.

Discuter des différentes stratégies utilisées pour découvrir l'inconnue; attirer l'attention des élèves sur la stratégie *comparer des termes* (voir p. 107-108).

Exemple

Si on constate l'équivalence entre :

- le terme 1 C de gauche et le terme 1 C de droite;
- le terme 2 G de gauche et le terme 4 R de droite;

alors l'inconnue doit nécessairement être :

- soit un terme égal à 6 R (p. ex., 3 G);
- soit une expression numérique égale à 6 R (p. ex., 1 G + 1 C).

Demander aux élèves d'échanger et de vérifier les solutions avec la droite numérique ouverte double ou avec les réglettes et le rétroprojecteur.

Prolongement – 1

Jeux olympiques pour amphibiens!

Cette activité permet d'approfondir l'habileté à déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation.

Présenter la situation suivante :

Les Jeux olympiques pour amphibiens débuteront sous peu. Quatre amphibiens participeront à l'épreuve de sauts : Ulysse, Denise, Quinn et Hélène. Ce sont les meilleurs sauteurs au monde.

- ***U**lysse fait des sauts d'une unité*.
- ***D**enise fait des sauts de deux unités*.
- ***Q**uinn fait des sauts de quatre unités*.
- ***H**élène fait des sauts de huit unités*.

Grouper les élèves par deux. Remettre à chaque équipe des réglettes Cuisenaire et une copie de l'annexe 2.2 (*Les sauts des amphibiens*) et leur demander d'effectuer le travail.

Présenter ensuite la situation-problème suivante :

La première épreuve débute. Ulysse, Denise, Quinn et Hélène sont sur la ligne de départ. L'arbitre crie « À vos marques! Prêts! Sautez! »

Les quatre amphibiens s'élancent et arrivent tous à la ligne d'arrivée en même temps. Quinn se vante d'avoir réussi à compléter le parcours en quatre sauts.

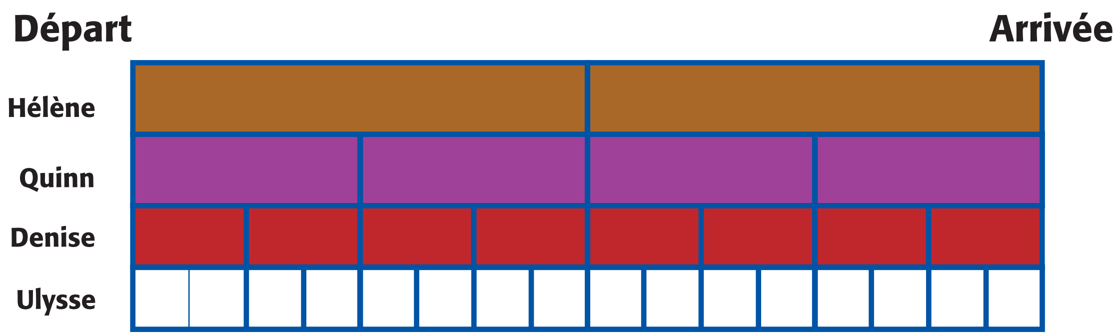
Combien de sauts les trois autres amphibiens ont-ils faits pour atteindre la ligne d'arrivée?

Demander à chaque équipe de représenter, à l'aide de réglettes Cuisenaire, le parcours de chacun des quatre amphibiens.

Poser des questions telles que :

– « Quelles réglettes représentent la longueur des sauts d'Ulysse, de Denise, de Quinn et d'Hélène? »

– « Combien de sauts Ulysse doit-il effectuer pour égaler un saut d'Hélène, un saut de Quinn, un saut de Denise? »



Remettre à chaque équipe des marqueurs et une grande feuille. Leur demander de représenter le parcours des amphibiens sur une droite numérique ouverte double.

Inciter les élèves à représenter le plus grand nombre de situations d'égalité possible avec les réglettes, sur la droite numérique ouverte double et de façon symbolique. Par exemple, voici deux situations d'égalité représentées avec des réglettes et de façon symbolique.

16 U = 2 H

16 U = 2 Q + 4 D

Prolongement – 2

Plus de sauts d'amphibiens!

Distribuer une copie de l'annexe 2.3 (*La course des amphibiens*) et demander aux élèves de résoudre les problèmes qui y figurent. Faire suivre d'un échange mathématique afin de faire ressortir les stratégies utilisées et les solutions trouvées.

Adaptations

La situation d'apprentissage peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• Modifier le problème de la façon suivante : *Louis a écrit les équations suivantes dans son journal de sciences, mais il semble avoir oublié certains nombres.* **1 C + 6 G =** ____ **1 C + 2 G = 1 C +** ____ *Peux-tu l'aider à déterminer la valeur de l'inconnue dans chacune de ces équations?*	• Présenter des équations telles que : **2 C + 6 G = 4 C + 2 G** **1 C + 2 G = 1 C + 8 R** Demander aux élèves de les analyser, de vérifier si elles sont vraies et de justifier leur réponse. • Proposer le défi suivant : Si **1 C = 2 G** et **1 C = 4 R**, alors **2 G = ?** Demander aux élèves d'expliquer leur réponse, à l'aide de matériel concret si nécessaire. Ceci devrait leur permettre de formuler la généralisation suivante. Si ▲ = ■ et ▲ = ◊, alors ■ = ◊.

Suivi à la maison

À la maison, les élèves peuvent comparer la longueur de leurs propres sauts à celle des sauts d'un ou de plusieurs membres de leur famille en utilisant des unités de mesure non conventionnelles. Leur suggérer par la suite d'écrire les équations représentant certaines des situations d'égalité.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 1

Une histoire d'ajout, de réunion et de comparaison!

SOMMAIRE : Dans cette activité, les élèves créent et représentent trois situations différentes qui correspondent à une même phrase mathématique donnée. Il s'agit d'une situation d'ajout, d'une situation de réunion et d'une situation de comparaison.

DÉROULEMENT : Présenter aux élèves une phrase mathématique impliquant une addition (p. ex., **7 + 2 = 9**).

Créer et représenter à l'aide de matériel de manipulation, trois situations qui correspondent à cette phrase mathématique : une situation d'ajout, une de réunion et une de comparaison.

Décrire chacune à l'aide de mots. Par exemple :

Situation d'ajout	Situation de réunion	Situation de comparaison
Dans mon sac, j'ai 7 cartes de joueurs de hockey. J'en ajoute 2 autres que je mets dans mon sac. J'ai maintenant 9 cartes en tout dans mon sac.	Pour une présentation en classe, j'apporte 7 cartes de joueurs de hockey et mon amie en apporte 2. Nous regroupons les cartes pour en avoir 9 à présenter.	Sur mon pupitre, il y a mes 7 cartes de joueurs de hockey et les 2 cartes de mon amie. Un autre ami a sur son pupitre 9 cartes de joueurs de baseball. Nous constatons que nous avons le même nombre de cartes.

Note : La situation d'ajout et la situation de réunion sont des exemples de situations d'égalité alors que la situation de comparaison est un exemple de situation d'équivalence (voir *Relations d'égalité*, p. 33-36).

Placer du matériel de manipulation à la disposition des élèves. Grouper les élèves par deux et distribuer à chaque équipe une carte sur laquelle est inscrite une phrase mathématique impliquant une addition.

Demander à chaque équipe de créer et de représenter à l'aide de matériel de manipulation, trois situations qui correspondent à cette phrase (une situation d'ajout, une de réunion et une de comparaison) et de décrire chacune à l'aide de mots.

Inviter quelques équipes à présenter leurs trois situations et demander aux autres élèves d'identifier la situation d'ajout, la situation de réunion et la situation de comparaison.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 2

Matériel
- annexe 2.4
- matériel de manipulation varié
- grandes feuilles (1 par équipe)

Une situation en contexte

SOMMAIRE : Dans cette activité, les élèves créent une situation qui correspond à une équation donnée et résolvent l'équation à l'aide de matériel de manipulation ou d'un dessin.

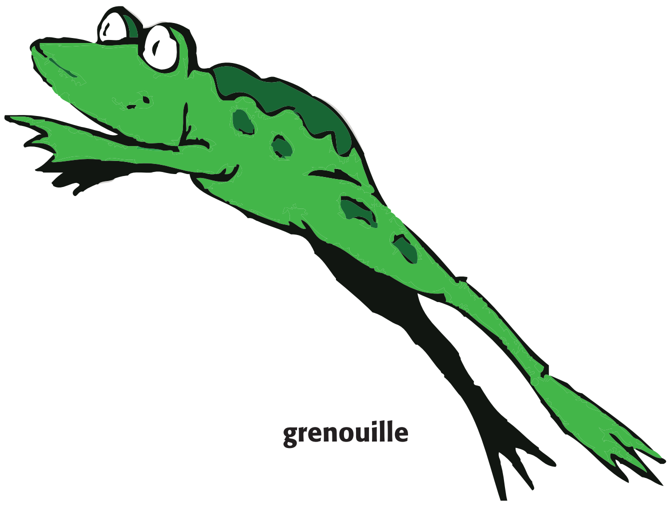
DÉROULEMENT : Grouper les élèves par deux. Distribuer à chaque équipe deux des équations figurant à l'annexe 2.4 (*Équations*) et une grande feuille.

Leur demander :
- de créer, pour chacune des équations, une situation qui lui correspond;
- de résoudre chaque équation à l'aide de matériel de manipulation ou d'un dessin.

Demander ensuite à quelques équipes de décrire leurs situations et de présenter leur solution. Inciter les élèves à comparer les différentes situations créées pour une même équation.

ANNEXE 2.1

Les amphibiens



grenouille

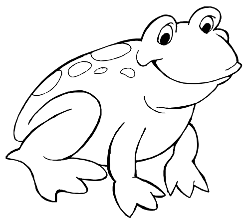
crapaud

rainette

ANNEXE 2.2

Les sauts des amphibiens

Dans la case de droite, trace et colorie la réglette qui correspond à la longueur du saut de chaque amphibien illustré.

 Ulysse	
 Denise	
 Quinn	
 Hélène	

ANNEXE 2.3

La course des amphibiens

Voici d'autres épreuves de sauts auxquelles les quatre amphibiens ont participé.

Épreuve 2

Seulement 2 des 4 amphibiens ont réussi à terminer le 2e parcours. Denise a effectué 8 sauts, Ulysse en a fait 15, tandis que Quinn et Hélène en ont effectué chacun 2. Lesquels ont terminé le parcours? Justifie ta réponse.

Épreuve 3

Peu après le début de la 3e épreuve, Quinn trébuche. Denise, inquiète, effectue 4 sauts à rebours vers la ligne de départ pour vérifier la condition de son ami. Puisque Quinn n'est pas blessé, Denise complète le parcours en effectuant 6 autres sauts. Désigne, sur la droite numérique ouverte double, l'endroit où Quinn a trébuché. Justifie ta réponse.

Épreuve 4

Hélène et Ulysse se rendent en finale et commencent la 4e épreuve. Constatant un bris sur la piste, les juges arrêtent l'épreuve avant que les amphibiens ne soient parvenus à la ligne d'arrivée. Les juges déclarent que l'on accordera la médaille d'or à l'amphibien qui s'est rendu le plus loin. Au moment de l'interruption, Hélène avait complété 1 saut et Ulysse 10. Lequel remportera la médaille d'or? Justifie ta réponse.

ANNEXE 2.4

Équations

$12 = 4 + \square + 3$	$10 + \_\_ = 11 + 2$
$8 + \triangle + \triangle = 18$	$\square + 7 = 18$
$7 + 30 = 30 + \bigcirc$	$4 + 7 + \square = 7 + 4$

Situation d'apprentissage, 3e année

En autobus!

Grande idée : Situations d'égalité

Matériel
- grande feuille (1 par équipe)
- marqueurs
- cubes emboîtables (quantité suffisante pour chaque équipe)

Sommaire

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves doivent déterminer, à partir de certaines données, le nombre de personnes qui sont montées dans un autobus et le nombre de personnes qui en sont descendues lors d'un arrêt.

Intention pédagogique

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à établir et à expliquer le lien entre la description orale et les représentations concrètes, semi-concrètes et symboliques d'une situation d'égalité donnée;
- à développer un raisonnement algébrique en appliquant diverses stratégies de résolution de problèmes (p. ex., liste ordonnée, recherche d'une régularité).

Attente et contenu d'apprentissage

Attente
L'élève doit pouvoir décrire la régularité dans une suite numérique et la prolonger.

Contenu d'apprentissage
L'élève doit représenter une équation simple à l'aide d'une balance à plateaux (ou son dessin) et à l'aide de symboles (p. ex., **3 + ♬ = 10 – 2**).

Note : Cette activité favorise l'intégration de certaines attentes et de certains contenus d'apprentissage relatifs au domaine Traitement des données et probabilité.

Contexte pédagogique

Les élèves de 3e année comprennent généralement qu'il existe plusieurs représentations concrètes possibles d'un même nombre (p. ex., un ensemble de 8 cubes rouges et de 1 cube jaune, ou un panier garni de 2 biscuits au chocolat et de 7 à la farine d'avoine sont deux représentations différentes du nombre 9). De plus, ils sont aptes à utiliser des représentations semi-concrètes et symboliques pour exprimer une situation d'égalité (p. ex., **9 = 8 + 1**; **9 = 2 + 7**).

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves doivent analyser les relations entre des quantités de façon à former une égalité. Le contexte de résolution de problème les incite à établir des liens entre diverses situations d'égalité, à rechercher des régularités et à généraliser.

Préalables

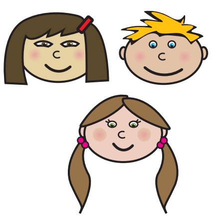
Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent pouvoir :

- représenter des équations à l'aide de matériel concret;
- établir des liens entre la description orale, la représentation concrète et la représentation symbolique d'une équation;
- utiliser une droite numérique;
- repérer des régularités dans des suites numériques.

Vocabulaire mathématique

Équation, est égal à, régularité, phrase mathématique vraie, phrase mathématique vraisemblable.

Avant l'apprentissage (mise en train)



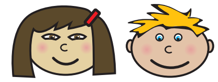
environ **10 minutes**

Présenter au tableau ou au rétroprojecteur la situation suivante :

Hier soir, lorsque j'ai pris l'autobus pour rentrer chez moi, j'ai constaté qu'il y avait 10 passagers à bord. À l'arrêt suivant, des personnes y sont montées et quelques-unes en sont descendues. Cela s'est déroulé si vite que je n'ai pu les dénombrer. J'ai néanmoins pu remarquer qu'il y avait alors 15 passagers dans l'autobus. Depuis, je me demande combien de personnes sont montées dans l'autobus, et combien en sont descendues?

Demander à quelques élèves d'encercler les mots clés et d'expliquer le problème en leurs propres mots afin de s'assurer que tous le comprennent bien.

Pendant l'apprentissage (exploration)



équipes de 2

environ

45 minutes

Grouper les élèves par deux et distribuer à chaque équipe une grande feuille, des marqueurs et des cubes emboîtables. S'assurer que d'autre matériel de manipulation courant est aussi disponible.

Demander aux élèves de trouver le plus de réponses possible au problème posé. Allouer suffisamment de temps pour leur permettre d'explorer diverses solutions.

Circuler, observer et poser des questions*…*

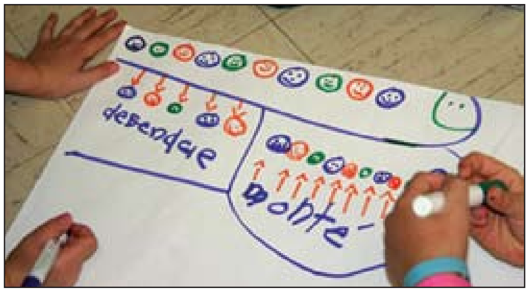
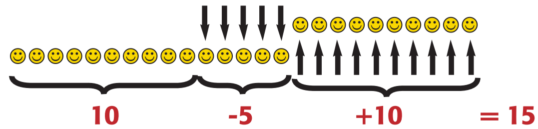
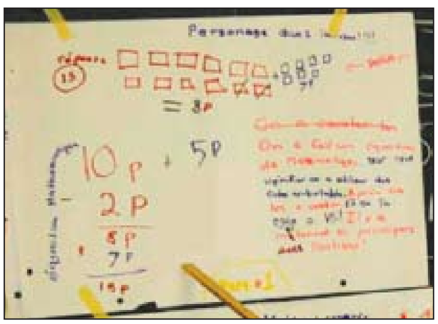
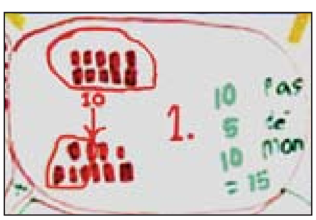
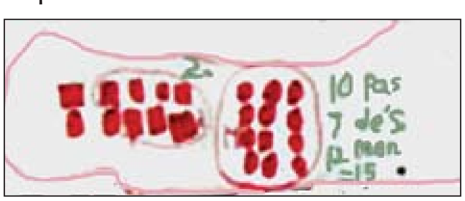
Observer les élèves sans fournir de réponses. Les inciter, par des interventions ciblées, à développer une stratégie pour faciliter la recherche de toutes les solutions possibles.

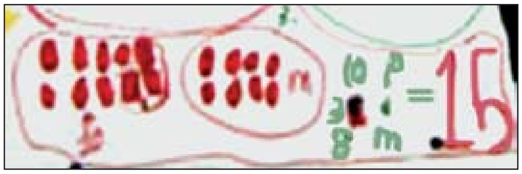
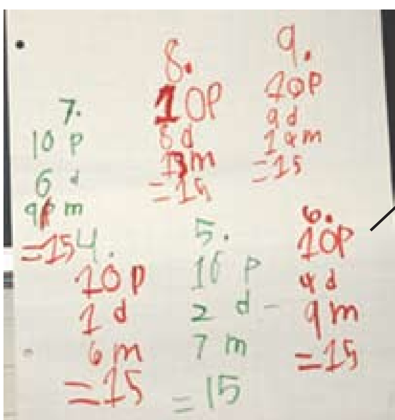
Demander aux élèves de représenter au fur et à mesure chaque solution sur la grande feuille en laissant des traces de leur démarche. Les encourager à représenter leurs solutions de façon concrète, semi-concrète et symbolique.

Poser aux élèves des questions telles que :
- « Que représentent les dessins, les cubes, les flèches, les couleurs? »
- « Quels symboles pouvez-vous utiliser pour représenter les personnes qui descendent de l'autobus, et celles qui y montent? »
- « Avez-vous trouvé toutes les solutions possibles? Comment le savez-vous? »

> Cette dernière question incite les élèves à utiliser la stratégie de résolution de problèmes *Faire une liste ordonnée* [voir le *Guide d'enseignement efficace* des mathématiques, *de la maternelle à la 6e année*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 51)].

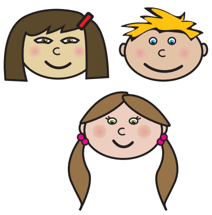
Demander aux équipes de préparer la présentation de leur démarche. Préciser qu'elles devront expliquer et justifier leurs solutions en utilisant des arguments mathématiques exacts, clairs et suffisants.

Observations possibles	Interventions possibles
Des élèves désignent de façon symbolique les personnes qui descendent et celles qui montent et ils éprouvent des difficultés à traduire cette représentation en phrase mathématique. 	Demander aux élèves d'établir un lien entre leurs symboles et les symboles mathématiques usuels (la phrase mathématique). 
Des élèves trouvent de nombreuses représentations d'une même solution, mais ne peuvent proposer plusieurs solutions. 	Demander aux élèves de décrire oralement chaque représentation; ils constateront sans doute qu'ils n'ont trouvé qu'une seule solution (p. ex., les cubes, les dessins et les équations sont autant de représentations d'une même solution, soit 2 personnes qui descendent de l'autobus et 7 qui y montent). Demander ensuite aux élèves s'il est possible, par exemple, que plus de deux personnes (ou moins de deux personnes) soient descendues de l'autobus à l'arrêt.
Des élèves trouvent trois solutions qu'ils représentent symboliquement. 5 personnes descendent 10 personnes montent  7 personnes descendent 12 personnes montent 	

Observations possibles	Interventions possibles
3 personnes descendent 8 personnes montent  En analysant ces solutions, ils constatent que la différence entre le nombre de personnes qui montent et le nombre de personnes qui descendent est toujours égale à 5. À partir de leur constatation, et sans utiliser de matériel concret, ils trouvent six autres solutions qu'ils représentent à l'aide des symboles suivants : • **« p » :** passagers au départ; • **« d » :** passagers qui descendent (une situation de soustraction); • **« m » :** passagers qui montent (une situation d'addition); • **« = 15 » :** nombre total de passagers après l'arrêt. 	Demander aux élèves de faire le lien entre leurs symboles et les symboles mathématiques usuels. **10 p ↓ 10** **4 d ↓ -4** **9 m ↓ +9** **= 15 ↓ = 15**

Pour l'échange mathématique, sélectionner des travaux qui recourent à différentes stratégies et représentations, en gardant en mémoire l'intention pédagogique, soit d'amener les élèves à appliquer diverses stratégies de résolution de problèmes et à expliquer le lien entre la description orale et les représentations concrètes, semi-concrètes et symboliques d'une situation d'égalité donnée. Idéalement, choisir aussi des travaux qui démontrent des stratégies pour vérifier que les solutions présentées sont vraies et que toutes les solutions possibles sont trouvées.

Pour des renseignements au sujet de l'échange mathématique, voir *Annexe générale* (p. 185-186).



environ

35 minutes

Après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique)

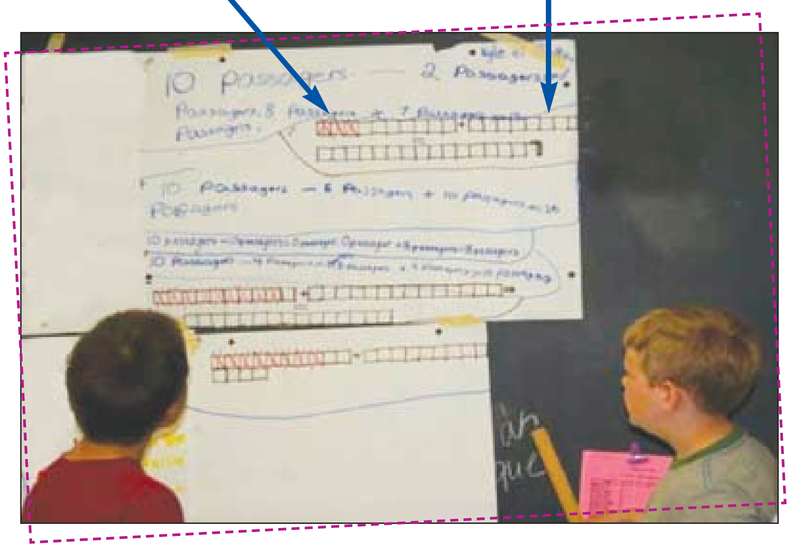
Demander à chacune des équipes sélectionnées d'afficher sa grande feuille et d'expliquer sa démarche et ses solutions. Voici quelques exemples.

Exemple 1

Cette équipe a d'abord représenté les 10 personnes par une suite de carrés illustrés, puis a marqué 3 carrés d'un X pour représenter les personnes qui descendent de l'autobus. Ensuite, elle a ajouté des carrés aux 7 carrés restant jusqu'à concurrence de 15 carrés.

Les carrés marqués d'un X rouge représentent les 3 personnes qui descendent de l'autobus.

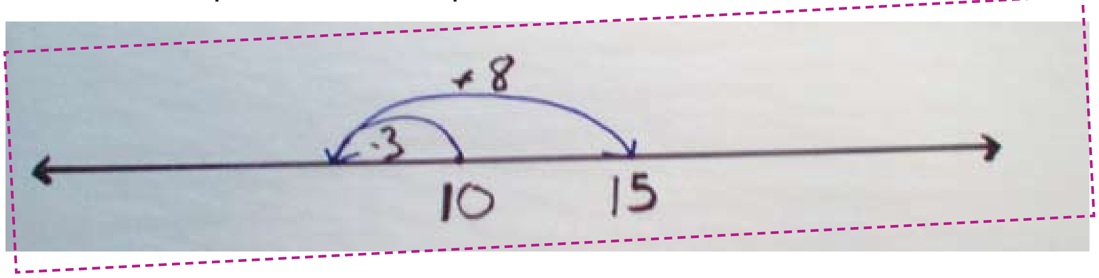
Les carrés ajoutés au bout de la suite jusqu'à concurrence de 15, et dénombrés par les élèves, représentent le nombre de personnes qui sont montées, soit 8.



Note : Choisir cette même solution, soit 3 personnes qui descendent de l'autobus et 8 qui y montent, présentée par d'autres équipes et attirer l'attention des élèves sur la diversité des représentations (p. ex., cubes, dessins, droites numériques, mots, phrases mathématiques).

Exemple 2

Cette équipe a représenté la solution à l'aide d'une droite numérique ouverte. Elle a tracé un bond de 3 vers la gauche pour illustrer les personnes qui descendent de l'autobus et un bond de 8 vers la droite pour illustrer celles qui sont montées dans l'autobus.

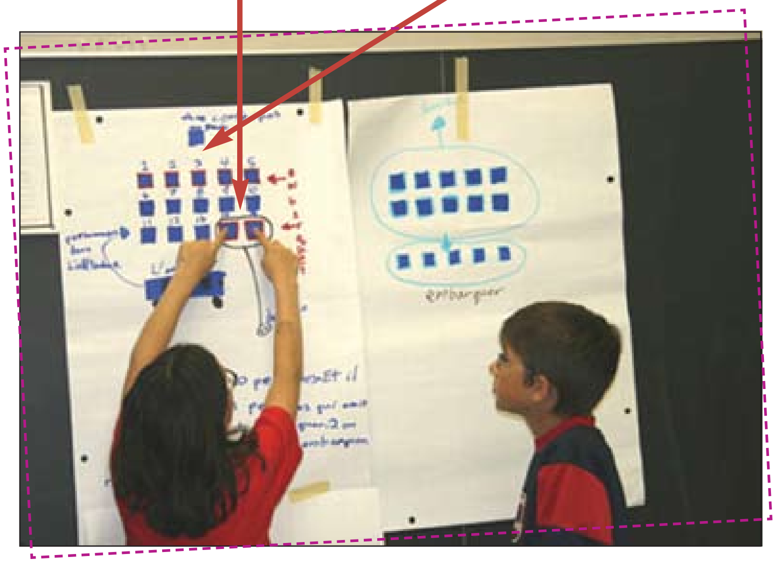


Exemple 3

Cette équipe a représenté les 10 passagers par des carrés bleus disposés sur deux rangées.

Les élèves ont encerclé 2 carrés bleus (les personnes qui descendent). Ils ont ensuite encadré ces mêmes carrés en rouge (les personnes qui occupent les 2 sièges laissés vacants).

Puis, ils ont ajouté une troisième rangée de carrés bleus encadrés de rouge, jusqu'à concurrence de 15. Après avoir dénombré tous les carrés bleus encadrés de rouge, ils ont conclu que 7 personnes étaient montées.



Insérer les données d'une des solutions dans un tableau et faire découvrir la phrase mathématique qui correspond aux données.

Passagers avant l'arrêt	Personnes qui descendent	Personnes qui montent	Passagers après l'arrêt	Phrase mathématique	Phrase vraie	Phrase vraisemblable
10	2	7	15	10 – 2 + 7 = 15		

Note : L'utilisation d'un tableau facilite la découverte de la régularité.

Discuter des différentes représentations symboliques de la même solution.

Exemples

10 – 2 + 7 = 15

10 + 7 – 2 = 15

10 – 2 = 8 et 8 + 7 = 15

Préciser aux élèves que l'on doit éviter d'écrire, **10 – 2 = 8 + 7 = 15** puisqu'il est faux de dire que **10 – 2 = 8 + 7**.

Présenter aux élèves les énoncés suivants :

Une phrase mathématique décrivant une situation d'égalité est dite **vraie** lorsque les expressions numériques de chaque côté du signe = représentent la même quantité.

Une phrase mathématique décrivant une situation d'égalité est dite **vraisemblable** si l'égalité qu'elle exprime est envisageable dans le contexte de la situation-problème.

Demander aux élèves de déterminer, en discutant avec un pair, si la phrase mathématique insérée dans le tableau est vraie et vraisemblable. Inviter un ou une élève à cocher la ou les cases appropriées du tableau.

À mesure que les équipes présentent leurs solutions, leur suggérer d'insérer les données correspondantes dans le tableau, de les traduire en phrases mathématiques et d'indiquer si chacune est vraie et vraisemblable.

Exemples

- La phrase **10 – 1 + 6 = 15** est vraie mais elle n'est pas vraisemblable, puisque la situation-problème spécifie que *quelques-unes* des personnes sont descendues.
- La phrase **10 – 10 + 15 = 15** est vraie mais elle n'est pas vraisemblable, puisque si les 10 passagers sont descendus, la personne qui doit dénombrer les 15 passagers après l'arrêt n'est forcément plus à bord pour le faire.

Poser la question suivante aux élèves :

– « Avons-nous trouvé toutes les solutions possibles? Comment le savez-vous? »

Les élèves peuvent indiquer que le nombre de personnes qui montent dans l'autobus est toujours 5 de plus que le nombre de personnes qui en descendent. Par exemple, si 1 personne descend, 6 montent; si 2 personnes descendent, 7 montent; si 3 personnes descendent, 8 montent, et ainsi de suite. Donc, en faisant une liste ordonnée, c'est-à-dire en ajoutant toujours 1 au nombre de personnes qui descendent, on s'assure d'obtenir toutes les possibilités.

Exemple d'un tableau présentant les solutions selon un ordre croissant du nombre de personnes qui descendent de l'autobus à l'arrêt

Passagers avant l'arrêt	Personnes qui descendent	Personnes qui montent	Passagers après l'arrêt	Phrase mathématique	Phrase vraie	Phrase vraisemblable
10	1	6	15	10 – 1 + 6 = 15	√	X
10	2	7	15	10 – 2 + 7 = 15	√	√
10	3	8	15	10 – 3 + 8 = 15	√	√
10	4	9	15	10 – 4 + 9 = 15	√	√
10	5	10	15	10 – 5 + 10 = 15	√	√
10	6	11	15	10 – 6 + 11 = 15	√	√
10	7	12	15	10 – 7 + 12 = 15	√	√
10	8	13	15	10 – 8 + 13 = 15	√	√
10	9	14	15	10 – 9 + 14 = 15	√	√
10	10	15	15	10 – 10 + 15 = 15	√	X

Adaptations

La situation d'apprentissage peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• Modeler une solution, avec les élèves, étape par étape : – disposer 20 chaises en 2 colonnes et demander à 10 élèves de s'y asseoir, comme s'ils se trouvaient dans un autobus; – dénombrer les passagers et inscrire 10 au tableau; – inviter, par exemple, 7 élèves à monter dans l'autobus et demander à un ou à une élève de représenter cet ajout de façon symbolique au tableau (**10 + 7**); – demander aux élèves de dénombrer de nouveau les passagers et de déterminer combien de passagers doivent descendre pour qu'il n'en reste que 15 dans l'autobus; – représenter cette solution de façon symbolique au tableau (**10 + 7 – 2 = 15**).	• Modifier les données du problème de façon à ce que le nombre de passagers avant l'arrêt soit plus grand que le nombre de passagers après l'arrêt (p. ex., avant l'arrêt, il y a 15 passagers dans l'autobus et après, il y en a 10).

Suivi à la maison

À la maison, les élèves peuvent résoudre des problèmes d'ajout et de retrait en suivant le même modèle que la situation-problème de l'autobus.

Exemple

Jean a 20 $. À la fin de la semaine, il lui faut 25 $ pour faire une excursion avec sa famille. Pendant la semaine, il a l'habitude d'acheter des paquets de cartes de hockey au coût de 1 $. D'autre part, il peut gagner 2 $ chaque fois qu'il promène le chien du voisin. Comment Jean peut-il s'assurer d'avoir 25 $ à la fin de la semaine tout en s'achetant au moins un paquet de cartes de hockey?

Voici deux solutions possibles que les élèves pourraient présenter à leur retour en classe.

- Jean peut promener le chien du voisin 3 fois (6 $) et s'acheter 1 paquet de cartes de hockey (1 $).

20 $ + 6 $ – 1 $ = 25 $

- Jean peut promener le chien du voisin 6 fois (12 $) et s'acheter 7 paquets de cartes de hockey (7 $).

20 $ + 12 $ – 7 $ = 25 $

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 1

La collection de timbres

SOMMAIRE : Dans cette activité, les élèves représentent des situations d'égalité de différentes façons et vérifient si elles sont vraies.

DÉROULEMENT : Présenter la situation suivante.

*Kaya et son amie se rendent à la boutique Philatérium pour se procurer des timbres à ajouter à leur collection. Elles veulent se procurer des timbres de la **C**olombie, du **D**anemark, de l'**U**kraine et du **V**enezuela.*

Voici la valeur des timbres :

Colombie	**C**inq cents
Danemark	**D**ix cents
Venezuela	**V**ingt-cinq cents
Ukraine	**U**n dollar

Présenter le problème suivant :

Dans la boutique, Kaya et son amie observent une affiche qui présente les égalités suivantes :

5 C = 1 V

9 D + 2 C = 1 U

4 V + 3 D = 1 U + 6 C

3 V + 5 C = 1 U

- *Que représentent les symboles numériques et les symboles littéraux?*
- *Comment Kaya et son amie peuvent-elles vérifier si les égalités sont vraies? Explique ton raisonnement.*

Demander aux élèves de représenter chaque situation d'égalité de plusieurs façons (p. ex, avec des centicubes, sur une droite numérique ouverte double, sur du papier quadrillé, avec des dessins de timbres, avec des pièces de monnaie). Leur demander ensuite de trouver et de représenter d'autres égalités en lien avec les données du problème.

Matériel

- grandes feuilles (1 par équipe)
- marqueurs (1 par équipe)
- feuilles quadrillées (1 par équipe)
- pièces de monnaie (quantité suffisante pour chaque équipe)
- centicubes (quantité suffisante pour chaque équipe)

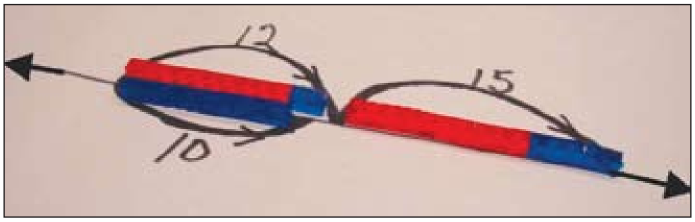
ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE – 2

Est-ce égal?

Matériel
- cubes emboîtables de différentes couleurs (60 par équipe)
- feuilles (1 par équipe)
- marqueurs (1 par équipe)

SOMMAIRE : Dans cette activité, les élèves déterminent, à l'aide de matériel concret, la valeur de l'inconnue en utilisant les stratégies *annuler des termes ou des expressions égales* (voir p. 105-106) et *comparer des termes* (voir p. 107-108).

DÉROULEMENT : Tracer une droite numérique ouverte double. Sur sa partie supérieure, placer 12 cubes emboîtables (10 cubes d'une couleur et 2 d'une autre couleur). Disposer ensuite 15 autres cubes (10 cubes d'une couleur et 5 d'une autre) sur la partie supérieure, à droite des 12 premiers cubes. Enfin, sur la partie inférieure de la droite, placer 10 cubes d'une même couleur.



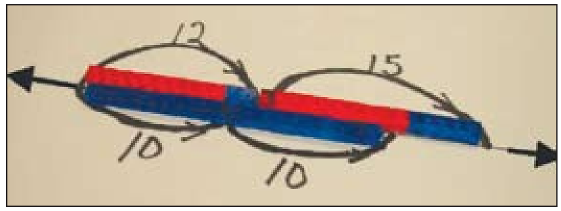
Demander aux élèves s'il y a la même quantité de cubes sur la partie supérieure que sur la partie inférieure de la droite. (*Non, la suite de cubes sur la partie supérieure est plus longue. Elle contient donc plus de cubes*.)

Leur demander ensuite d'écrire symboliquement la relation entre le nombre de cubes sur la partie supérieure de la droite et le nombre de cubes sur la partie inférieure. (**12 + 15 = 10 + ___**)

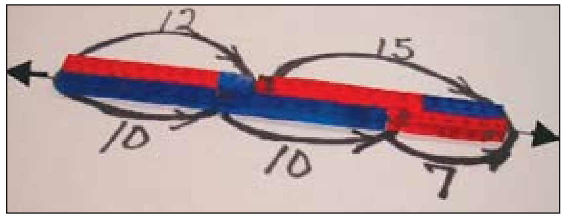
Enfin, demander aux élèves de déterminer comment faire pour qu'il y ait le même nombre de cubes sur chacune des deux parties de la droite, sans toutefois retirer de cubes. Demander à un ou à une élève d'expliquer sa démarche.

Exemple

« En comparant les dizaines sur chaque portion de la droite, j'ai constaté qu'il y en avait deux sur la partie supérieure et seulement une sur la partie inférieure. J'ai donc ajouté une dizaine sur la partie inférieure de la droite.



Les deux parties de la droite n'étant pas encore égales, en comparant les unités, j'ai découvert qu'il y avait 7 unités sur la partie supérieure de la droite et aucune sur sa partie inférieure. J'ai donc ajouté 7 unités sur la partie inférieure de la droite.



Les deux parties de la droite étant égales, je peux conclure que la valeur de l'inconnue est d'une dizaine et de sept unités, donc de 17. »

Par la suite, demander aux élèves de discuter des différentes stratégies qui peuvent les aider à déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation, sans recourir au calcul, mais bien en analysant les relations entre les quantités. Les inciter à explorer les stratégies *annuler des termes ou des expressions égales* et *comparer des termes*.

ANNEXE GÉNÉRALE

Échange mathématique

L'échange mathématique est un temps d'objectivation, pendant ou après l'apprentissage, qui va au-delà du simple partage des idées et des stratégies employées par les élèves. Pendant l'échange, les élèves cherchent à défendre leurs idées et à convaincre les autres élèves du bien-fondé de leurs stratégies et de leur solution.

L'échange mathématique est un moment pédagogique fort au cours duquel l'enseignant ou l'enseignante dirige les discussions de façon stratégique afin de faire ressortir des idées mathématiques importantes. L'échange se prête bien à une approche pédagogique fondée sur la vision que les élèves forment une communauté d'apprentissage.

Points à considérer

- Afin de faciliter la discussion pendant l'échange mathématique, organiser une **aire de rencontre**. Cette aire permet aux élèves de partager des idées et de présenter des exposés et crée un sentiment d'appartenance à la communauté qu'ils forment. L'aire de rencontre doit être :
  - spacieuse et bien définie pour que les élèves puissent s'y rassembler pour partager, discuter et faire des présentations;
  - assez grande pour que chaque élève puisse bouger ou remuer un peu sans déranger les autres;
  - éloignée des étagères de rangement qui pourraient être une source de distraction pendant la rencontre;
  - près des référentiels pour pouvoir s'y référer régulièrement;
  - près des outils de présentation.
- Lors de l'exploration, l'enseignant ou l'enseignante a circulé parmi les élèves, a observé la démarche des équipes et a écouté leurs discussions. Ses observations lui permettent de **choisir l'ordre** des présentations des équipes pour l'échange. Ce choix est guidé par l'objectif que l'enseignant ou l'enseignante s'est fixé (p. ex., application d'une stratégie, utilisation d'un modèle mathématique) pour assurer un échafaudage au niveau de la compréhension des concepts.

- La présentation du travail de chaque élève n'est pas nécessaire; il est préférable de se limiter à présenter les démarches ou les solutions qui se distinguent. Demander aux élèves de montrer leur solution ou leur démarche si elle est semblable à celle présentée, sans toutefois l'expliquer. S'assurer de choisir des élèves différents d'un échange à l'autre.
- Pendant l'échange, chaque membre de l'équipe doit être prêt à présenter sa réflexion relative au travail accompli en préparant des arguments clairs et convaincants.
- Pendant l'échange, permettre aux élèves de poser des questions sur la démarche et les explications de ceux qui présentent. Ce questionnement favorise la vérification de leur propre compréhension tout en permettant aux présentateurs d'ajuster eux aussi leur compréhension.
- Créer dans la classe un climat de confiance et de respect où tous les élèves sont encouragés à participer et où tous les propos sont valorisés. Par exemple, un élève doit se sentir à l'aise de présenter une erreur dans son travail afin de démontrer un non-exemple qui aidera à la compréhension de tous.
- Poser des questions stratégiques afin d'aider les élèves à construire une bonne compréhension des concepts. En voici des exemples :
  - « Est-ce que quelqu'un peut résumer l'idée présentée? »
  - « Comment as-tu procédé pour…? »
  - « Comment as-tu surmonté cette difficulté? »
  - « Pourquoi as-tu employé cette stratégie? »

Pour de plus amples renseignements au sujet de l'échange mathématique, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 3 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 44-46).

RÉFÉRENCES

ARCAVI, Abraham. Novembre 1994. « Symbol and Sense Making in Formal Mathematics », *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, nº 3, Vancouver, FLM Publishing Association, 32 p.

BAROODY, Arthur J., et Ronald T. COSLICK. 1998. *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*, Mahwah (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, p. 16-3.

BARUK, Stella. 1995. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires : pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosité*, nouv. éd. enrichie de trois index, coll. « Science ouverte », Paris, Éditions du Seuil, p. 1162 et 1271.

BLANTON, Maria L., et James J. KAPUT. Octobre 2000. *Generalizing and Progressively Formalizing in a Third-Grade Mathematics Classroom: Conversations about Even and Odd Numbers*, [En ligne], [www.west.asu.edu/cmw/pme/resrepweb/PME-rr-blanton.htm] (Consulté le 12 octobre 2007).

BLANTON, Maria L., et James J. KAPUT. Octobre 2003. « Developing Elementary Teachers' "Algebra Eyes and Ears" », *Teaching Children Mathematics*, vol. 10, nº 2, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 70-77.

CHAMPLAIN, Denis de, Pierre MATHIEU, Paul PATENAUDE et Hélène TESSIER. 1996. *Lexique mathématique enseignement secondaire,* Beauport (QC), Les Éditions du Triangle d'Or, p. E 63, S 72 et S 73.

CHAMPLAIN, Denis de, Pierre MATHIEU et Hélène TESSIER. 1999. *Petit lexique mathématique,* Mont-Royal (QC), Modulo Éditeur, p. 97.

CONSEIL DES ÉCOLES CATHOLIQUES DE LANGUE FRANÇAISE DU CENTRE-EST, et coll. 2003. *Les mathématiques… un peu, beaucoup, à la folie : Guide pédagogique, Modélisation et algèbre, 1re année,* Ottawa, Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, p. 6.

DRISCOLL, Mark. 1999. *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10*, Portsmouth (NH), Heinemann, 168 p.

FENNELL, Francis. Septembre 2006. « Representation—Show me the Math! », *NCTM News Bulletin*, vol. 43, nº 2, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 3.

FOSNOT, Catherine Twomey, et Maarten DOLK. 2001. *Young Mathematicians at Work: Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction,* Portsmouth (NH), Heinemann, p. 77 et 79-81.

Le nouveau petit Robert. 2006. Nouv. Éd. Amplifiée et remaniée, Paris, Dictionnaires Le Robert, p. 1353.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 94.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2000. *MA-P-5, Modélisation et algèbre, Cycle primaire*, Toronto, le Ministère, p. 26.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2003. *Stratégie de mathématiques au primaire : Rapport de la table ronde des experts en mathématiques*, Toronto, le Ministère, 90 p.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2004. *Politique d'aménagement linguistique de l'Ontario pour l'éducation en langue française,* Toronto, le Ministère, 100 p.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005a. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année : Numération et sens du nombre*, Toronto, le Ministère, p. 13.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005b. *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques, Révisé,* Toronto, le Ministère, 101 p.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006a. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année,* Toronto, le Ministère, 5 fascicules.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006b. *Jardin d'enfants*, Révisé, Toronto, le Ministère, p. 41.

PICCIOTTO, Henri, et Anita WAH. Mars 1993. « A New Algebra: Tools, Themes, Concepts », *Journal of Mathematical Behaviour*, vol. 12, nº 1, Elsevier, p. 42, [En ligne], [www.picciotto.org/math-ed/new-algebra/new-algebra.html] (Consulté le 12 octobre 2007).

QUÉBEC. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2001. *Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, Québec, le Ministère, p. 128.

RADFORD, Luis. 2001. *Document Signs and Meaning in Student's Emergent Algebraic Thinking,* Educational Studies in Mathematics, Norwell (MA), Kluwer Academic Publishers, p. 241.

RADFORD, Luis, et Serge DEMERS. 2004. *Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*, Toronto, le Ministère, p. 32.

RAYNAL, Françoise, et Alain RIEUNIER. 2003. *Pédagogie : dictionnaire des concepts clés apprentissage, formation, psychologie cognitive*, coll. « Pédagogies/Outils », 4e éd., Paris, ESF éditeur, p. 13, 156 et 347.

ROEGIERS, Xavier. 2000. *Les mathématiques à l'école élémentaire : Tome 1*, Belgique, De Boeck, p. 77.

SPEER, William R., David T. HAYES et Daniel J. BRAHIER. Février 1997. « Addition Using Algebra Networks », *Teaching Children Mathematics*, vol. 3, nº 6, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 305 et 306.

SQUALLI, Hassane. Automne 2002. « Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques », *Instantanés mathématiques*, vol. XXXIX, p. 4-13.

SQUALLI, Hassane, et Laurent THEIS. Novembre 2005. *Le développement de la pensée algébrique au primaire et chez des élèves en difficulté grave d'apprentissage*, atelier de formation à l'UQAM, 41 p.

TAYLOR-COX, Jennifer. Janvier 2003. « Algebra in the Early years? Yes! », *Young Children: Teaching and Learning about MATH*, Washington (DC), National Association for the Education of Young Children, p. 17 et 19, [En ligne], [www.journal.naeyc.org/btj/200301/Algebra.pdf.] (Consulté le 15 octobre 2007).

THEIS, Laurent. 2005. *Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse,* Baie-Jolie, Éditions des Bandes Didactiques, p. 132.

USISKIN, Zalman. Février 1997. « Doing Algebra in Grades K-4 », *Teaching Children Mathematics,* vol. 3, nº 6, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 346.

VAN DE WALLE, John A., et Sandra FOLK. 2005. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally,* éd. canadienne, Toronto, Pearson Education Canada, p. 401.

VANCE, James H. Janvier 1998. « Number Operations from an Algebraic Perspective », *Teaching Children Mathematics*, vol. 4, nº 5, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 282.

Le ministère de l'Éducation tient à remercier les enseignants, les enseignantes et les élèves qui ont participé à la mise à l'essai des situations d'apprentissage.

Imprimé sur du papier recyclé
07-042
ISBN 978-1-4249-4592-4 (fasc. 2)
ISBN 978-1-4249-4590-0 (série)