Guide d'enseignement efficace des mathématiques

de la 4e à la 6e année

Modélisation et algèbre

2008

appuyer chaque élève

Ontario

Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année
Modélisation et algèbre

Le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année – Modélisation et algèbre* comprend notamment une introduction, une description de la grande idée Relations ainsi qu'une situation d'apprentissage pour chaque année d'études au cycle moyen.

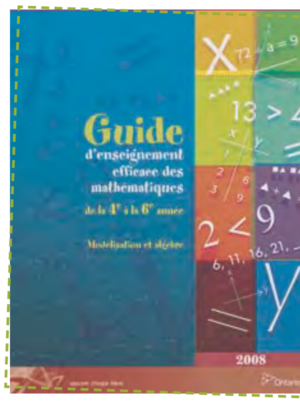
Guide d'enseignement efficace des mathématiques

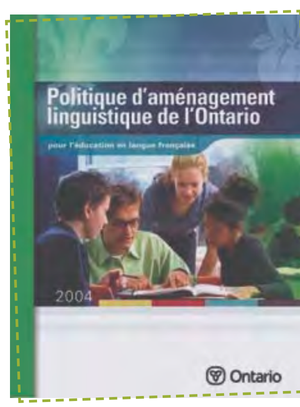
de la 4^e à la 6^e année

Modélisation et algèbre

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE





Le document intitulé *Enseigner et apprendre les mathématiques : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année* souligne que « l'enseignement joue un rôle central dans l'apprentissage et la compréhension des mathématiques chez les élèves du cycle moyen » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 35) et il en définit les principales composantes. Pour appuyer la mise en œuvre des recommandations présentées dans ce rapport, le ministère de l'Éducation de l'Ontario a entrepris l'élaboration d'une série de guides pédagogiques composée d'un guide principal et de guides d'accompagnement.

Le **guide principal**, publié en cinq fascicules et intitulé *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a), propose des stratégies précises pour l'élaboration d'un programme de mathématiques efficace et la création d'une communauté d'apprenants et d'apprenantes chez qui le raisonnement mathématique est développé et valorisé. Les stratégies portent essentiellement sur les grandes idées inhérentes aux attentes du programme-cadre de mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005), sur la résolution de problèmes comme principal contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication comme moyen de développement et d'expression de la pensée mathématique. Ce guide contient également des stratégies d'évaluation, de gestion de classe et de communication avec les parents[1].

Les **guides d'accompagnement**, rédigés par domaine en tenant compte des attentes et des contenus d'apprentissage du programme-cadre de mathématiques, suggèrent des applications pratiques des principes et des fondements présentés dans le guide principal. Ils sont conçus pour aider l'enseignant ou l'enseignante à s'approprier la pédagogie propre à chaque domaine mathématique afin d'améliorer le rendement des élèves en mathématiques.

Le guide principal et les guides d'accompagnement ont été élaborés en conformité avec la *Politique d'aménagement linguistique de l'Ontario pour l'éducation en langue française* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004b) pour soutenir la réussite scolaire des élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition par chaque élève de compétences en communication orale.

1. Dans le présent document, *parents* désigne père, mère, tuteur et tutrice.

INTRODUCTION

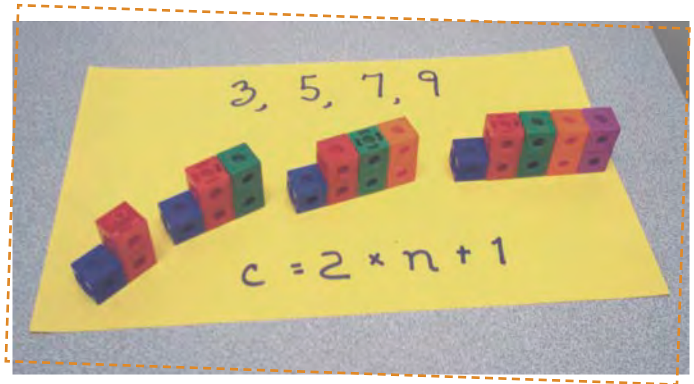
> *Le domaine de l'algèbre est une composante qui prend de plus en plus d'importance dans l'évolution des mathématiques. Chaque jour, nous sommes confrontés à une multitude de problèmes composés d'une variété d'inconnues. C'est en essayant de voir des patrons, des régularités, que des solutions seront trouvées.*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2000, p. 15)

Le domaine Modélisation et algèbre regroupe des concepts essentiels aux mathématiques pour représenter et analyser des relations que l'on trouve dans plusieurs situations de la vie courante.

L'étude de l'algèbre s'est développée à partir du besoin de comprendre et de représenter le monde réel, par exemple, la position des planètes, le mouvement des marées, le déplacement des objets en chute libre. Les mathématiciens et les mathématiciennes ont tenté de résoudre ces questions par l'observation des régularités et la modélisation des phénomènes par des équations et des représentations graphiques. Ces travaux ont contribué au développement de symboles mathématiques et de méthodes de calcul. Or, « dans ce nouveau millénaire, l'algèbre n'est plus une discipline qui s'attarde à la manipulation de symboles. L'algèbre devient un mode de pensée, une façon de voir et d'exprimer des relations » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2000, p. 26).

> *Au cours de la dernière décennie, des éducateurs en mathématiques de plus en plus nombreux proposent de commencer l'étude de l'algèbre dès le primaire. Ils précisent qu'il ne s'agit pas d'un enseignement précoce de l'algèbre du secondaire, ni d'une « préalgèbre » […]. Il s'agit plutôt d'amener les élèves à développer la pensée algébrique sans nécessairement utiliser le langage littéral de l'algèbre.*
>
> (Squalli, 2002, p. 4)

La **modélisation** est une des fins de l'étude de l'algèbre. En effet, l'algèbre sert surtout à représenter des phénomènes, c'est-à-dire à les modéliser. Au cycle moyen, les élèves sont amenés à observer les changements dans le monde qui les entoure, à les décrire et à les représenter d'abord de façon concrète et semi-concrète, puis de façon symbolique. Par exemple, la suite de figures ci-après est utilisée afin de modéliser une situation. Les élèves apprennent à décrire la régularité que l'on peut voir d'une figure à l'autre, à exprimer la relation entre le numéro de la figure et le nombre de cubes qui la composent et à représenter cette relation par une table de valeurs et par une équation.



Note : *n* représente le numéro de la figure
et *c*, le nombre de cubes qui la composent.

Un peu d'histoire

Le mot *algèbre* vient de l'arabe. Au IX^e siècle, le mathématicien Al-Khwarizmi « publie un traité, *Al-kitab al-jabr w'al-muqabala* (bref traité sur le calcul de réparation [al-jabr] et d'équilibre [al-muqabala]). Dans ce traité, il présente les principes pour résoudre des équations du premier et du second degré. Son ouvrage semble avoir été présenté en Europe pour la première fois, en 1202, dans le livre *Liber Abaci* de Léonard de Pise (Fibonacci). Le nom *Al-Khwarizmi*, traduit en latin, devient *Algorismus* ou *Algorismi*. Plus tard, le nom est transformé en nom commun, *algorithme*, qui signifie une suite de calculs menant à un résultat » (Conseil des écoles catholiques de langue française du Centre-Est et coll., 2003, p. 11).

L'algèbre, telle qu'on la connaît, a évolué graduellement au cours des siècles. Son origine remonte probablement au mathématicien Diophante (III^e siècle) qui cherchait à résoudre des problèmes numériques. Or, on retrouve aussi de tels problèmes dans des écrits babyloniens et égyptiens de l'Antiquité. Les mathématiciens arabes ont poursuivi l'étude de l'algèbre qui a pris la forme que l'on connaît aujourd'hui grâce à la contribution de mathématiciens européens, du XII^e siècle jusqu'au XVIII^e siècle.

ENSEIGNEMENT EFFICACE DE L'ALGÈBRE

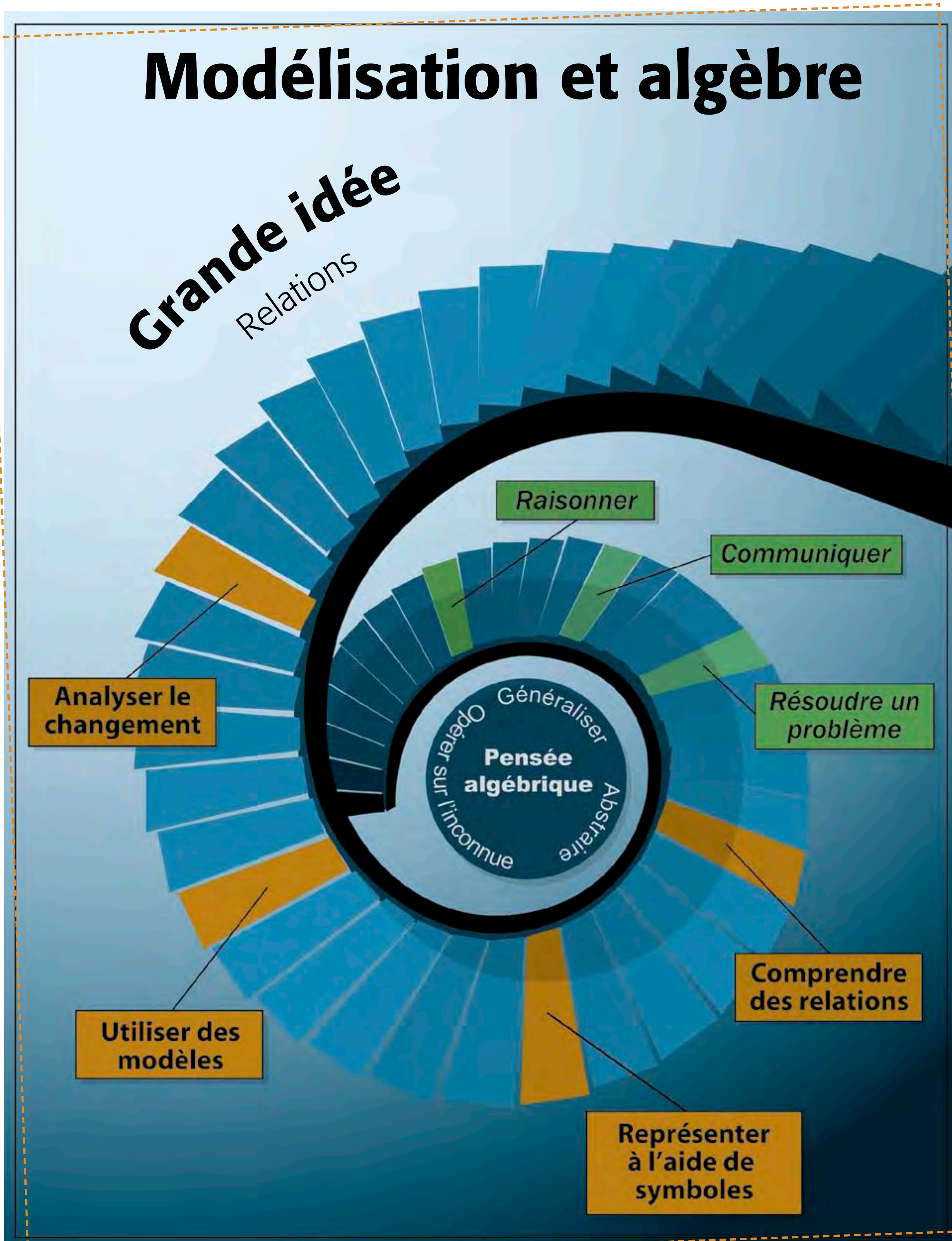
Aux cycles primaire et moyen, le domaine Modélisation et algèbre a pour but principal de développer chez les élèves la pensée algébrique. Dans la recherche d'une définition de ce qu'est la **pensée algébrique**, plusieurs auteurs privilégient une perspective que chacun juge essentielle en algèbre. En voici trois exemples qui reflètent trois perspectives différentes :

- *L'algèbre est quelquefois définie comme la généralisation de l'arithmétique ou comme un langage pour généraliser l'arithmétique. Mais l'algèbre c'est plus qu'un ensemble de règles pour manipuler des symboles, c'est une manière de penser* (Vance, 1998, p. 282, traduction libre).
- *L'algèbre est un langage. Ce langage comprend entre autres : les relations, les inconnues et les variables, ainsi que la généralisation des régularités. Chaque fois qu'une de ces idées est discutée, que ce soit à la maternelle ou à un autre niveau, c'est une occasion de travailler le langage de l'algèbre* (Usiskin, 1997, p. 346, traduction libre).
- *L'algèbre peut être un outil puissant pour résoudre des problèmes. Elle permet d'accéder à des solutions beaucoup plus facilement. […] Elle peut devenir un outil indispensable pour représenter et résoudre des situations complexes du monde qui nous entoure* (Baroody et Coslick, 1998, p. 16-3, traduction libre).

Parmi les nombreux éléments qui contribuent à l'efficacité de l'enseignement en modélisation et algèbre, certains ont une incidence plus grande sur le développement de la pensée algébrique. Ainsi, il est important de reconnaître particulièrement les éléments suivants :

- les processus fondamentaux pour accéder à des niveaux d'abstraction supérieurs (abstraire, généraliser et opérer sur l'inconnue);
- les habiletés mathématiques développées selon une perspective algébrique (résoudre un problème, raisonner et communiquer);
- les composantes de l'apprentissage de l'algèbre (comprendre des relations, représenter à l'aide de symboles, utiliser des modèles et analyser le changement);
- les concepts algébriques regroupés selon une grande idée (relations).

L'affiche suivante illustre l'interaction entre ces éléments. Par la suite, chaque élément est expliqué plus en détail.



Processus fondamentaux

Dans une classe de mathématiques visant à développer la pensée algébrique chez les élèves, l'objectif traditionnel de l'enseignement, apprendre à calculer, n'est pas omis; il est largement dépassé. Développer la pensée algébrique est un cheminement complexe qui mise sur trois processus fondamentaux : abstraire, généraliser et opérer sur l'inconnue.

ABSTRACTION

Faire abstraction de, c'est « écarter par la pensée, ne pas tenir compte de » (*Le nouveau petit Robert*, 2006, p. 11). L'abstraction est une des caractéristiques de la pensée algébrique. Au cycle primaire, les élèves apprennent que peu importe les objets en question, 2 objets plus 2 objets donnent 4 objets. Pour comprendre ce concept, ils ne tiennent pas compte des objets en soi; ils se concentrent sur leur nombre. Abstraire, c'est se détacher de l'aspect sensoriel des choses pour raisonner à un niveau plus général (Raynal et Rieunier, 2003, p. 13, adaptation), c'est se représenter mentalement une situation concrète, c'est passer à un niveau de conceptualisation plus profond. Piaget considère l'abstraction comme un des processus de base de la construction des savoirs. Pour sa part, Roegiers (2000, p. 77) explique que l'appropriation d'un concept généralise la réalité. Le concept se situe donc sur un autre plan que la réalité. C'est là le domaine de l'abstraction. En modélisation et algèbre, l'abstraction est surtout reliée à la généralisation.

GÉNÉRALISATION

Généraliser, c'est tirer des conclusions valables, vraies dans tous les cas, à partir de l'observation et de l'analyse de quelques exemples (Squalli, 2002, p. 9, adaptation). Il s'agit de raisonner par généralisation, en allant du particulier au général.

Généraliser [...] *est particulièrement important, car chez l'homme, il est à la base de l'acquisition des concepts et des possibilités d'abstraction* (Raynal et Rieunier, 2003, p. 156). La généralisation est alors au cœur de l'activité mathématique. En modélisation et algèbre, elle permet de développer la pensée algébrique de l'élève.

Une **conjecture** est l'expression d'une idée perçue comme étant vraie dans toute situation semblable.

Proposer une conjecture

↓

Vérifier une conjecture

↓

Formuler une généralisation

Pour arriver à une généralisation, les élèves observent et analysent des situations pour ensuite proposer des conjectures. Lorsqu'ils proposent une conjecture, ils doivent être en mesure d'exprimer leur raisonnement dans leurs propres mots. Ils doivent ensuite vérifier si leur conjecture est valable dans d'autres situations. Ils appuient leurs conjectures au moyen de représentations concrètes et semi-concrètes et d'arguments mathématiques. Ce processus, parfois informel, permet aux élèves d'apprendre à formuler plus clairement leurs généralisations.

Exemple

Les élèves étudient la relation entre le numéro des figures dans la suite ci-dessous et le nombre de carrés qui les composent. Un élève **propose une conjecture**, soit que le nombre de carrés dans chaque figure est toujours deux de plus que dans la figure précédente. Un autre élève mentionne que le nombre de carrés est toujours deux fois le numéro de la figure.

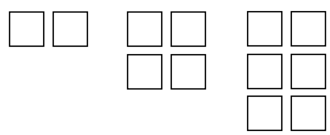


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Numéro de la figure	1	2	3	...
Nombre de carrés	2	4	6	...

Pour **vérifier sa conjecture**, le premier élève peut vérifier que la figure 2 a bien 2 carrés de plus que la figure 1 et que la figure 3 a bien 2 carrés de plus que la figure 2. Sa conjecture l'autorise à prédire qu'à la 4^e figure, il y aura 2 carrés de plus que 6, soit 8 carrés et peut le vérifier en construisant la figure 4. Le deuxième élève peut vérifier sa conjecture en vérifiant que la figure 1 contient 2 colonnes de 1 carré (soit 2 × 1 carré), que la figure 2 contient 2 colonnes de 2 carrés (soit 2 × 2 carrés) et que la figure 3 contient 2 colonnes de 3 carrés (soit 2 × 3 carrés). Cette conjecture lui permet de prédire qu'à la 4^e figure, il y aura 8 carrés (soit 2 × 4 carrés) et que la figure 20 contiendra 40 carrés (soit 2 × 20 carrés). La construction de la 4^e figure et d'autres figures subséquentes permettent d'appuyer sa conjecture. Notons que la conjecture doit être revue si on découvre un contre-exemple.

Reconnaissant que leur conjecture semble s'appliquer à toutes les situations similaires dans un contexte donné, les **élèves formulent leur généralisation** en ayant recours à des mots ou à l'aide de symboles. Dans l'exemple précédent, le premier élève formule sa généralisation en disant : « Le nombre de carrés qui composent une figure est toujours 2 de plus que le nombre de carrés qui composent la figure précédente ». L'autre élève peut formuler sa généralisation de façon symbolique au moyen de l'équation $n = f \times 2$, où f est le numéro de la figure et n, le nombre de carrés qui la composent.

L'enseignant ou l'enseignante doit amener les élèves à généraliser dans des situations variées.

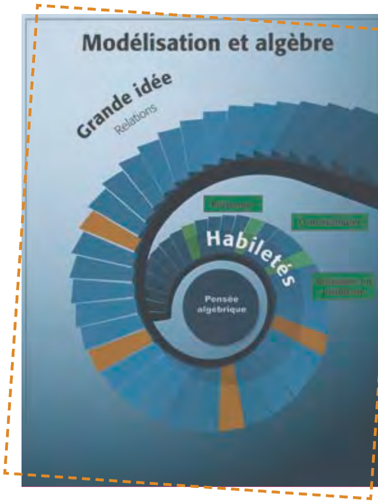
OPÉRATION SUR L'INCONNUE

Opérer sur l'inconnue, c'est traiter et examiner ce qui est inconnu. C'est raisonner de manière analytique, c'est réfléchir sur les opérations, les généralisations et non sur les objets (Squalli et Theis, 2005, adaptation). Selon plusieurs chercheurs, c'est ce qui distingue l'algèbre de l'arithmétique (Driscoll, 1999, p. 1; Squalli, 2002, p. 8). Les inconnues et les variables sont généralement représentées de façon symbolique par des lettres. Toutefois, dans bien des situations, elles peuvent l'être par d'autres symboles (p. ex., un carré, un point d'interrogation, un trait à remplir) ou du matériel concret. Elles peuvent aussi être exprimées oralement.

L'algèbre commence par la prise de conscience des opérations, opérations dans le sens large du mot, c'est-à-dire une série d'actes intellectuels supposant réflexion et combinaison de moyens en vue d'obtenir un résultat ou de résoudre un problème. L'algèbre est […] *présentée comme une « arithmétique généralisée », comme un outil de résolution de problèmes plus puissant que l'arithmétique* (Squalli et Theis, 2005, p. 5).

Habiletés mathématiques

> ***Raisonner** à l'aide de concepts et de processus mathématiques ne peut logiquement se faire que si l'on **communique** avec le langage mathématique et le raisonnement mathématique s'exerce le plus généralement en **situation de résolution** de situations-problèmes.*
>
> (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001, p. 125)



La pensée algébrique des élèves se développe en relation avec le développement d'habiletés mathématiques. Ainsi, les élèves doivent développer leur habileté à raisonner et à résoudre des problèmes de façon algébrique, puis à communiquer leur raisonnement algébrique.

HABILETÉ À RAISONNER DE FAÇON ALGÉBRIQUE

> *Raisonner […] c'est faire des inférences. Et faire des inférences, c'est penser d'une certaine manière : c'est produire de l'information nouvelle à partir d'informations existantes.*
>
> (Raynal et Rieunier, 2003, p. 315)

L'habileté à raisonner de façon algébrique permet aux élèves d'examiner des situations et d'organiser leur pensée. Alors que l'arithmétique est généralement perçue comme un calcul sur des quantités connues, misant à trouver la bonne réponse, le raisonnement algébrique vise à mieux comprendre la numération en permettant d'analyser les relations entre les nombres pour trouver la valeur d'une inconnue. C'est pourquoi il est primordial de développer à l'élémentaire, l'habileté à raisonner de façon algébrique, plus particulièrement dans des situations de résolution de problèmes.

Selon Driscoll (1999, p. 1-19), le raisonnement algébrique inclut l'habileté à « faire et défaire », l'habileté à créer des règles pour représenter des relations entre deux quantités en changement et l'habileté à formuler des généralisations au sujet des propriétés des opérations arithmétiques.

L'habileté à « faire et défaire » se manifeste lorsque les élèves réussissent à procéder à rebours. Ils peuvent, par exemple, faire appel aux liens entre l'addition et la soustraction et entre la multiplication et la division. Étant donné l'équation $\square + 3 = 11$, l'élève qui peut procéder à rebours comprend que l'on peut soustraire 3 de la somme ($11 - 3 = 8$) pour déterminer la valeur de l'inconnue, car on a ajouté 3 à l'inconnue pour obtenir une somme de 11. Il s'agit d'un raisonnement algébrique puisque l'action est effectuée en fonction d'une réflexion et d'une compréhension, et non d'une procédure pour laquelle l'élève ne peut en expliquer le sens.

L'habileté à créer des règles pour représenter des relations fait appel à l'habileté à généraliser à partir de régularités. Par exemple, étant donné la suite de figures ci-dessous, l'élève qui raisonne algébriquement peut d'abord reconnaître que la figure 1 est composée de 1 colonne de 2 points, que la figure 2 est composée de 2 colonnes de 3 points… Ainsi, il ou elle peut généraliser et représenter la relation entre le nombre de points (p) et le numéro de la figure (n) par une équation [p. ex., $p = n \times (n + 1)$].

Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

L'habileté à généraliser les propriétés des opérations arithmétiques démontre aussi un raisonnement algébrique (p. ex., savoir que l'on peut changer l'ordre de deux nombres que l'on veut additionner sans affecter la somme ou que le produit d'un nombre et de 1 est toujours égal au nombre).

Le raisonnement algébrique se distingue aussi du raisonnement arithmétique de la façon suivante. Le raisonnement arithmétique porte plutôt sur des situations statiques, alors que le raisonnement algébrique porte davantage sur des situations en changement. En développant le raisonnement algébrique des élèves, on leur permet de voir et d'analyser des situations plus englobantes et de développer leur répertoire de stratégies de résolution de problèmes.

Pour stimuler le raisonnement algébrique de ses élèves, l'enseignant ou l'enseignante peut utiliser un problème arithmétique existant et lui donner une perspective algébrique en ajoutant une situation en changement. Ces situations favorisent la recherche de régularités et de relations, l'utilisation de variables et d'inconnues ainsi que l'expression de justifications, de conjectures et de généralisations. Le tableau suivant fait ressortir la différence entre un problème qui suscite un raisonnement arithmétique et un problème qui suscite un raisonnement algébrique.

<table>
<tr><th>Raisonnement arithmétique</th><th>Raisonnement algébrique</th></tr>
<tr>
<td>On travaille à partir d’une situation statique.

Exemple
Isabelle doit débourser 5 $ plus 3 $ par heure pour la location d’un vélo. Pendant combien d’heures pourra-t-elle louer un vélo si elle dispose de 35 $?

Ce problème présente une situation statique. Il admet une seule réponse qu’il faut déterminer à l’aide d’opérations arithmétiques.</td>
<td>On travaille à partir d’une situation en changement.

Exemple
Isabelle doit débourser 5 $ plus 3 $ par heure pour la location d’un vélo. On s’intéresse à la relation entre le nombre d’heures de location et le coût de location.

a) Représente la relation par une table de valeurs.
<table>
<tr><td>Nombre d’heures</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Coût ($)</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td><td>17</td></tr>
</table>
b) Décris la relation entre le nombre d’heures et le coût de location.
c) Combien coûte une location de 6 heures?
d) Si Isabelle dépense 14 $, pendant combien de temps a-t-elle loué le vélo?
e) Si elle dispose de 35 $, pendant combien d’heures peut-elle louer un vélo?

Ce problème présente une situation en changement. Il porte sur l’étude de régularités et de la relation entre deux quantités en changement.</td>
</tr>
</table>

Lorsque les élèves **raisonnent algébriquement**, ils analysent les nombres, les symboles, les quantités et les opérations, et ensuite ils généralisent.

La capacité de raisonner algébriquement ne se développe pas de façon simple et naturelle. C’est pourquoi l’enseignant ou l’enseignante doit faire cheminer les élèves en les incitant :

- à expliciter leur raisonnement;
- à travailler à rebours;
- à analyser les liens entre les quantités et à organiser l’information pour représenter une situation d’une autre façon;
- à proposer des conjectures et à généraliser.

Dans le cadre de situations d'apprentissage, l'enseignant ou l'enseignante doit poser des questions qui mettent l'accent sur des concepts algébriques et qui amènent les élèves à réfléchir. En voici quelques exemples :

– « Est-ce que ça fonctionne si je fais la même chose avec d'autres nombres? »

– « Qu'est-ce qui change? Qu'est-ce qui ne change pas? »

– « Est-ce que l'information recueillie me permet de prédire le résultat? »

– « Est-ce que la régularité peut être appliquée à n'importe quel cas? »

– « Est-ce que je suis toujours les mêmes étapes? Quelles sont-elles? »

HABILETÉ À RÉSOUDRE UNE SITUATION-PROBLÈME DE FAÇON ALGÉBRIQUE

> *La compétence à résoudre des situations-problèmes est une démarche de l'esprit exploitée dans un très large éventail de situations. Sur le plan pratique, on y a spontanément recours pour trouver réponse à différents défis de la vie quotidienne. Sur le plan plus abstrait, elle s'avère un outil intellectuel puissant au service du raisonnement et de l'intuition créatrice.*
>
> (Ministre de l'Éducation du Québec, 2001, p. 126)

Situation-problème

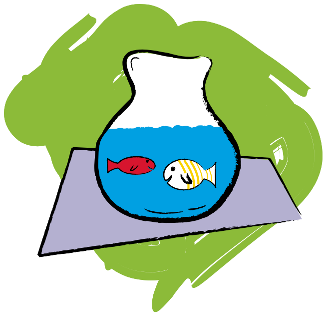
Dans ce document, une situation-problème désigne un problème qui :

- est en contexte;
- permet d'utiliser différentes stratégies;
- représente un défi pour l'élève.

La résolution d'une situation-problème vise à engager les élèves dans un processus où ils auront à utiliser différentes stratégies. Ceux et celles qui ont développé des stratégies ont plus de facilité à amorcer la résolution d'une situation-problème, à anticiper et à prédire des résultats, à raisonner et à trouver une solution.

Voici une situation-problème qui peut être résolue de façon arithmétique ou algébrique.

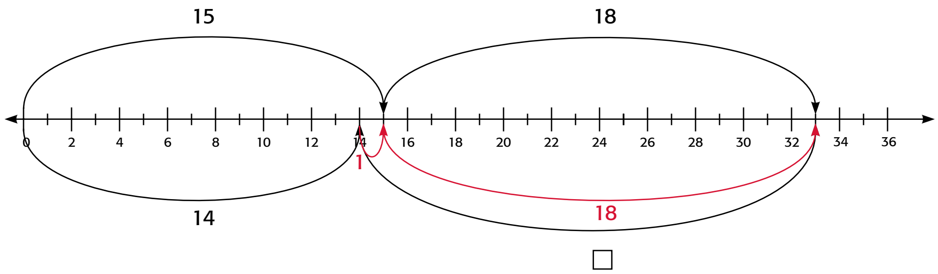
> *Sylvia a 15 poissons rouges et 18 poissons à rayures jaunes. Jacob a le même nombre de poissons, mais seulement 14 de ses poissons sont rouges. Combien Jacob a-t-il de poissons à rayures jaunes?*



Résolution à l'aide d'un raisonnement arithmétique	Résolution à l'aide d'un raisonnement algébrique
Je sais que Sylvia a 33 poissons en tout, car 15 plus 18, c'est 33. $15 + 18 = 33$ Jacob a le même nombre de poissons. Alors s'il a 14 poissons rouges, il en a 19 qui ont des rayures jaunes, car 33 moins 14, c'est 19. $33 - 14 = 19$ On effectue des opérations arithmétiques pour résoudre le problème.	Je sais que Sylvia et Jacob ont le même nombre de poissons. $15 + 18 = 14 + \square$ Si Sylvia a 15 poissons rouges et Jacob en a 14, alors Jacob a 1 poisson rouge de moins que Sylvia. $15 + 18 = 14 + \square$ -1 Puisque Jacob a le même nombre de poissons que Sylvia, il doit avoir 1 poisson à rayures jaunes de plus que Sylvia. +1 $15 + 18 = 14 + \square$ -1 Donc $\square = 19$. Donc, Jacob a 19 poisons à rayures jaunes. Au lieu d'effectuer des calculs, on interprète le problème et on compare les quantités. On peut représenter la situation par une équation. Pour la résoudre, on compare les quantités de chaque côté du signe =.

En général, les élèves sont portés à résoudre un tel problème de façon arithmétique. L'enseignant ou l'enseignante peut alors varier les paramètres du problème en lui donnant une perspective algébrique, par exemple, en demandant aux élèves de représenter la situation-problème à l'aide d'une équation. Pour résoudre l'équation, les élèves peuvent utiliser une droite numérique, ce qui peut les aider à *réfléchir* au calcul et non à *faire* le calcul. L'important n'est pas d'effectuer un calcul, mais de bien saisir la relation d'égalité entre les deux expressions numériques.

$15 + 18 = 14 + \square$



Note : D'autres façons de représenter des relations entre des quantités sont présentées à l'annexe C (p. 210-239).

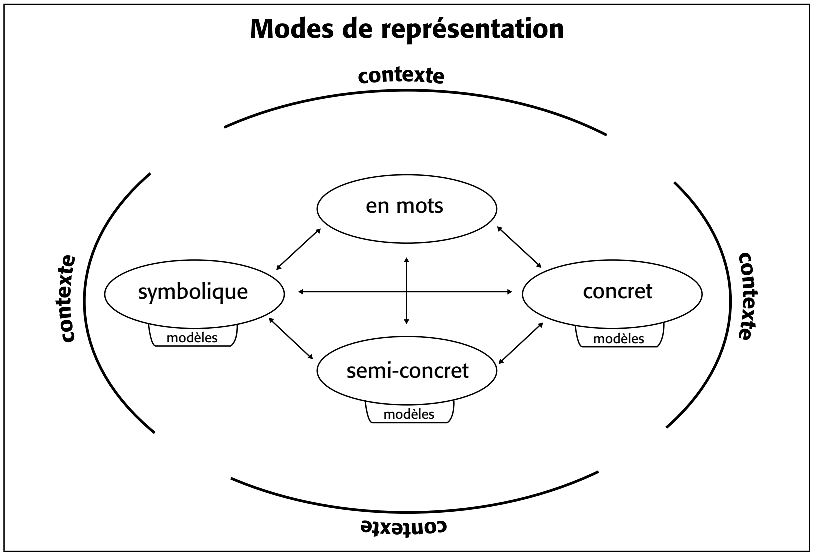
HABILETÉ À COMMUNIQUER UN RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE

> *La communication bénéficie à tous ceux qui participent à l'échange […]. L'obligation de faire part de sa compréhension d'une situation ou d'un concept contribue souvent à l'amélioration ou à l'approfondissement de cette compréhension.*
>
> (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001, p. 132)

L'habileté à communiquer un raisonnement algébrique se développe lorsque les élèves expriment leur compréhension d'une situation-problème ou d'un concept, et défendent leurs idées en utilisant différents **modes de représentation** :

- le mode **concret**, relié à l'exploration, à la manipulation et à la création à l'aide de matériel concret;
- le mode **semi-concret**, relié à une illustration, à un dessin ou à toute autre représentation sur papier;

- le mode **symbolique**, relié à toute représentation faite à partir de chiffres ou de symboles;
- le mode **« en mots »**, relié à une explication ou à une description verbale ou écrite.



Afin d'acquérir une solide compréhension, les élèves doivent vivre des expériences en contexte en explorant des situations-problèmes. La mise en contexte permet aux élèves d'établir des liens entre diverses représentations et de développer une compréhension des concepts algébriques explorés.

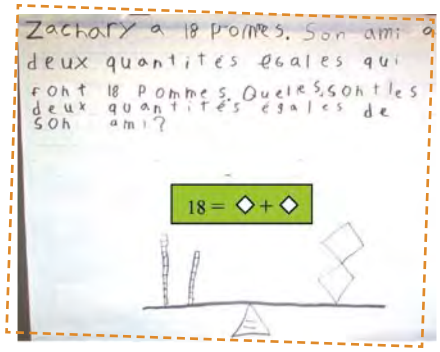
L'enseignant ou l'enseignante utilise aussi diverses représentations afin d'aider les élèves à s'approprier les concepts mathématiques et à établir des liens entre les représentations (voir l'annexe C, p. 210-239).

Argument mathématique :
Justification orale ou écrite d'un raisonnement dans le but de démontrer ou de réfuter une idée mathématique.

L'**argument mathématique** est un outil essentiel de communication en mathématiques. Les élèves doivent parvenir à justifier leurs représentations, leurs idées et leur compréhension à l'aide d'arguments mathématiques, en se servant d'un vocabulaire de relations causales (p. ex., *si… donc, parce que, puisque*). Les arguments mathématiques permettent aux élèves de présenter leur compréhension de façon beaucoup plus juste et réfléchie. Pour plus de renseignements à ce sujet, consulter le document intitulé *Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques* (Radford et Demers, 2004, p.15-25).

Voici un exemple d'un argument mathématique tiré de la situation d'apprentissage *Club vidéo* (p. 145-171). Un élève justifie sa représentation de la relation entre le nombre de films loués et la somme déboursée en disant : « **Puisque** j'ajoute toujours 5 tampons d'une carte à l'autre, je sais **alors** que ce nombre de tampons sera ajouté après chaque location. **Donc**, il y a une régularité de + 5 pour chaque film loué. »

Dans la situation d'apprentissage *Quel problème?* (p. 123-143), une élève justifie son équation en disant : « Mon équation correspond bien à la situation et au dessin de la balance **parce que** dans la situation, on parle de deux quantités égales et de 18 pommes et que la balance illustre deux symboles identiques (♢) d'un côté et 18 carrés de l'autre. **Donc**, en écrivant 18 = ♢ + ♢, je respecte les données des deux représentations qui m'ont été fournies. »



L'**échange mathématique** est le moment idéal pour partager des représentations et des arguments mathématiques. Lorsque les élèves résolvent une situation-problème en algèbre, ils formulent des conjectures, présentent leurs pistes de solution, confrontent leurs idées ou justifient leurs résultats à l'aide de différentes représentations. Bref, ils communiquent.

Composantes de l'apprentissage de l'algèbre

Les composantes de l'apprentissage de l'algèbre sont les éléments fondamentaux que l'apprentissage en algèbre doit viser, peu importe l'année d'étude (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 37-40). Ces composantes font partie de la toile de fond du programme-cadre. Ainsi, en modélisation et algèbre, on doit reconnaître que l'on cherche à faire progresser les élèves dans leur apprentissage en les amenant à comprendre des relations, à utiliser des modèles mathématiques, à analyser le changement et à représenter des situations-problèmes à l'aide de symboles.

Chacune de ces composantes est abordée ci-après. Par la suite, on analyse une situation-problème de façon à illustrer l'intégration de ces composantes dans l'apprentissage en modélisation et algèbre.

COMPRÉHENSION DES RELATIONS

Comprendre des relations est une habileté importante en résolution de problèmes en modélisation et algèbre puisqu'elle permet l'appropriation de concepts et la formulation de conjectures menant à des généralisations. Lorsque les élèves perçoivent et décrivent des régularités dans des suites, qu'ils comparent, représentent et créent des situations ou des suites à partir de régularités, ils cheminent vers l'établissement de relations entre des quantités. Au cycle moyen, les élèves explorent des relations entre des quantités en changement, particulièrement dans des situations présentées par des suites non numériques à motif croissant (voir *Énoncé 1 – Exploration de relations*, p. 32-66). Pour développer leur sens du symbole, les élèves observent, analysent et représentent des nombres dans des phrases mathématiques (voir *Énoncé 2 – Sens du symbole*, p. 67-97).

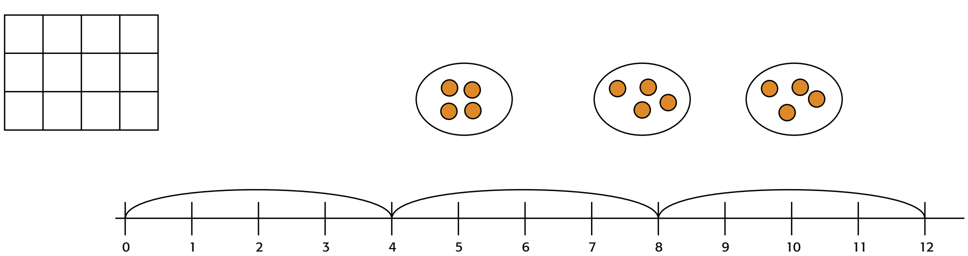
UTILISATION DE MODÈLES MATHÉMATIQUES

> *Quand les mathématiques sont perçues comme la mathématisation du monde qui nous entoure – l'activité humaine qui organise et décrit la réalité de façon mathématique – plutôt qu'un système de contenus à apprendre et à transmettre, les modèles mathématiques deviennent très importants. C'est impossible de parler de mathématisation sans parler simultanément de modèles.*
>
> (Fosnot et Dolk, 2001, p. 77, traduction libre)

L'habileté à utiliser des modèles est une partie intégrante du programme-cadre de mathématiques comme en fait foi le nom même du domaine Modélisation et algèbre. Les modèles mathématiques permettent de représenter des situations afin de pouvoir étudier les relations entre les nombres et les quantités. Au fil du temps, les mathématiciens et les mathématiciennes ont créé, utilisé et généralisé certaines idées, stratégies et représentations pour faciliter l'appropriation de concepts. À l'usage, certaines représentations sont devenues des **modèles** reconnus (p. ex., la droite numérique et la disposition rectangulaire). Il est important que les élèves utilisent des modèles différents dans une variété d'activités pour pouvoir passer aisément d'une représentation à une autre.

Exemple

La multiplication 3×4 est ici modélisée de trois façons différentes.



Devant une situation-problème à résoudre, plusieurs représentations sont possibles; certains élèves utilisent leur corps, du matériel de manipulation ou des dessins, alors que d'autres représentent les données de façon plus schématique. La façon de s'approprier les données et de les organiser à l'aide de modèles reflète le niveau de développement de la pensé algébrique. Les modèles explorés au cycle primaire diffèrent souvent de ceux explorés au cycle moyen. Par exemple, en modélisation et algèbre au cycle moyen, on utilise davantage la table de valeurs et l'équation qu'au cycle primaire.

Selon Fosnot et Dolk (2001), les modèles, à l'instar des grandes idées et des stratégies, ne peuvent être transmis par automatisme. Pour se les approprier, les élèves doivent les construire eux-mêmes. Puisqu'ils n'interprètent pas tous une situation de la même façon, il importe de leur soumettre des situations-problèmes qui favorisent la modélisation, de sorte qu'ils puissent créer leurs propres symboles et leurs représentations personnelles. Il ne faut pas leur proposer systématiquement les algorithmes usuels ou les stratégies composées de règles et de conventions. Toutefois, certains modèles font partie intégrante des mathématiques et ils devront être explorés en classe dans un contexte plus structuré. La découverte de nouvelles représentations s'assimile à l'aide des trois apprentissages : **partagé, guidé et autonome**. Pour plus de renseignements au sujet des trois apprentissages en mathématiques, consulter la section *Approche pédagogique* dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 77-94).

Pour aider les élèves à raisonner, l'enseignant ou l'enseignante doit proposer une variété de modèles et de représentations et inciter les élèves à les utiliser fréquemment. L'annexe C (p. 210-239) présente des exemples de l'utilisation de représentations dans un contexte de modélisation et algèbre. En représentant une situation-problème, les élèves analysent les relations à l'aide de modèles, tirent des conclusions et les expliquent à l'aide de mots. Les modèles sont des outils qui aident à reconnaître les relations et à développer la pensée algébrique. Ils favorisent l'analyse et initient les élèves à un niveau d'abstraction qui facilite les prédictions et les généralisations. Le dialogue, l'échange mathématique sur les données du problème représenté par différents modèles, ainsi que les questions de l'enseignant ou de l'enseignante sont autant de moyens de susciter la réflexion chez les élèves.

ANALYSE DU CHANGEMENT

Les élèves vivent dans un monde en changement. Comprendre que le changement fait partie de la vie, que la majorité des choses changent avec le temps (p. ex., chaque année pendant la période de croissance, la taille croît, le poids augmente, les pieds allongent) et que les changements peuvent être étudiés constitue une composante du développement de la pensée algébrique. Les changements observés peuvent être décrits de façon *qualitative* (p. ex., je suis *plus grand* que l'an dernier, mes cheveux sont *plus longs*, le seau s'est rempli d'eau *rapidement* pendant l'orage, il fait *plus froid* que ce matin) ou de façon *quantitative* (p. ex., j'ai grandi de *2 cm* cette année, le seau d'eau s'est rempli de *50 ml* en *30 minutes*, la température a chuté de *6 °C* en *3 heures*). Les élèves apprennent à observer et à comprendre le changement dans les suites, dans les situations d'égalité et dans les situations-problèmes.

Le **changement** et les **régularités** sont deux concepts indissociables dans l'exploration des relations entre deux quantités en changement. Les élèves réalisent que le changement d'une quantité influe sur une autre. Par exemple, en observant la suite non numérique à motif croissant ci-après, les élèves peuvent reconnaître le changement d'une figure à l'autre, soit que le nombre de carrés augmente d'une figure à l'autre. En poussant l'analyse du changement, ils peuvent reconnaître que le nombre de carrés double à chaque figure.

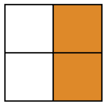


Figure 1

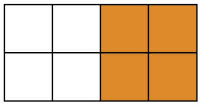


Figure 2

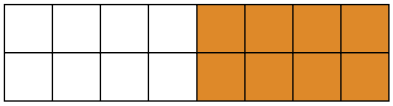


Figure 3

Certains pourront même constater que le nombre de carrés qui composent une figure est égal à 2 × 2 × 2 × … × 2, où le nombre de multiplications est égal au numéro de la figure.

L'étude d'une quantité en changement est un saut important dans la façon de voir les choses. Par exemple, dans un problème qui implique les longueurs de 5 cm, 7 cm, 9 cm…, au lieu de voir *plusieurs* quantités, on considère qu'il s'agit d'une seule longueur qui est en changement, d'où le besoin de faire intervenir le concept de la variable. L'analyse du changement est présentée dans *Énoncé 1 – Exploration de relations* (p. 32-66).

REPRÉSENTATION DE SITUATIONS-PROBLÈMES À L'AIDE DE SYMBOLES

> *Les symboles, surtout ceux retrouvés dans les équations, sont une façon d'exprimer des généralisations qui expliquent des relations et des régularités.*
>
> (Van de Walle et Folk, 2005, p. 401, traduction libre)

La représentation de situations-problèmes à l'aide de symboles est une composante fondamentale de la pensée algébrique. Il est important de faire cheminer les élèves vers une représentation plus abstraite et plus formelle des situations à l'aide de symboles; ils développent ainsi leur sens du symbole. La section *Énoncé 2 – Sens du symbole* (p. 67-97) traite particulièrement des symboles et présente une progression pédagogique qui permet le développement du sens du symbole chez les élèves.

EXEMPLE D'INTÉGRATION DES COMPOSANTES DANS UNE SITUATION-PROBLÈME

L'exemple suivant illustre l'intégration des composantes de l'apprentissage de l'algèbre dans une situation-problème.

> *Dans la ville où Jessie et Boukar habitent, il y a deux clubs vidéo (Méga et Extra) qui ont des modalités de location différentes. Jessie va au club Méga, où il y a un coût d'abonnement de 25 $ et les films coûtent 2 $ chacun. Boukar est abonné au club Extra, où il y a un coût d'abonnement de 4 $ et les films coûtent 5 $ chacun. En te servant de ces renseignements, détermine à quel moment Jessie et Boukar auront déboursé la même somme d'argent pour un même nombre de films loués.*

À la suite de l'exposé du problème, l'enseignant ou l'enseignante pose des questions et invite les élèves à effectuer diverses tâches afin d'intégrer les composantes de l'apprentissage de l'algèbre.

Comprendre des relations

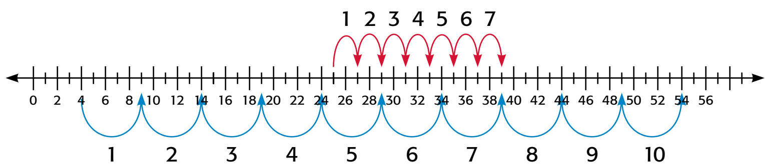
L'enseignant ou l'enseignante fait ressortir les régularités et les relations en invitant les élèves à analyser la situation-problème et à la représenter d'une autre façon.

En général, les élèves relèvent qu'au club Méga, la somme déboursée augmente de 2 $ chaque fois qu'un film est loué tandis qu'au club Extra, elle augmente de 5 $. En analysant davantage la situation, ils peuvent reconnaître qu'il y a une relation entre la somme déboursée et le nombre de films loués à chaque club.

Utiliser des modèles mathématiques

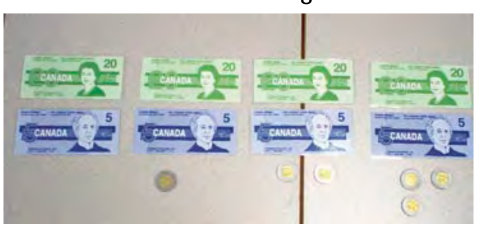
Voici quelques modèles qui peuvent être utilisés pour explorer cette situation-problème.

Droite numérique



Matériel de manipulation

Club vidéo Méga



Club vidéo Extra

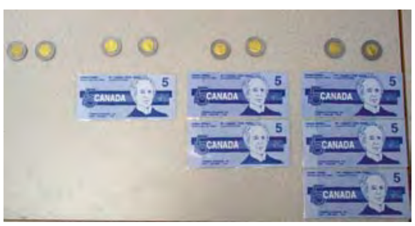


Table de valeurs

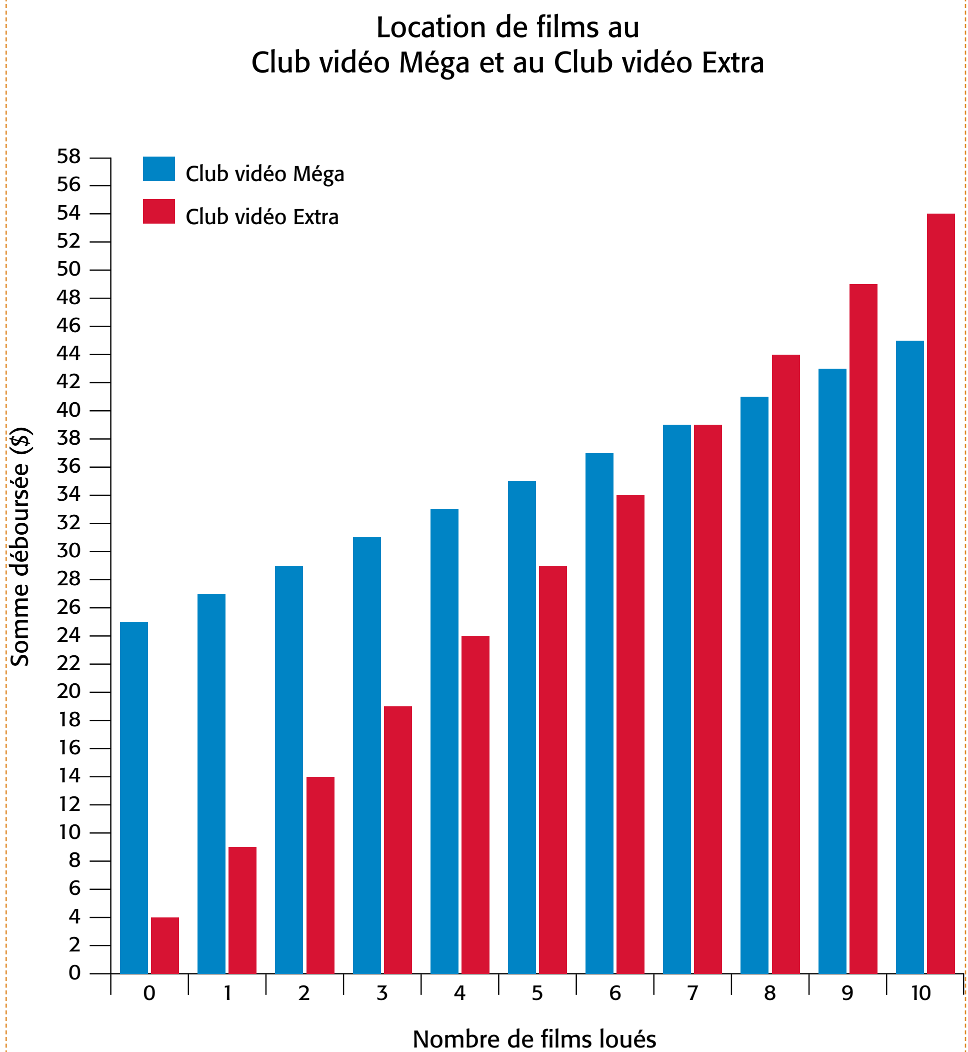
Club vidéo Méga

Nombre de films loués	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Somme déboursée ($)	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45

Club vidéo Extra

Nombre de films loués	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Somme déboursée ($)	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54

Diagramme



Analyser le changement

Voici quelques questions qui peuvent être posées afin d'analyser le changement dans cette situation :

– « Quelle information te permet de prédire (d'extrapoler) ce qui arrivera? »

– « Quelle(s) étape(s) doit-on répéter pour trouver la somme déboursée? »

– « Lorsque des nombres différents sont utilisés, qu'est-ce qui change? Qu'est-ce qui ne change pas? »

– « En quoi cette représentation (p. ex., avec le matériel de manipulation) ressemble-t-elle à celle-ci (p. ex., la table de valeurs)? »

– « Est-ce que cette démarche fonctionnerait toujours avec d'autres nombres? Comment le savez-vous? »

Représenter des situations-problèmes à l'aide de symboles

En ayant recours à des interventions stratégiques (voir *Énoncé 1 – Exploration de relations*, p. 32-66), l'enseignant ou l'enseignant peut amener les élèves à représenter la situation en utilisant des symboles.

Exemples

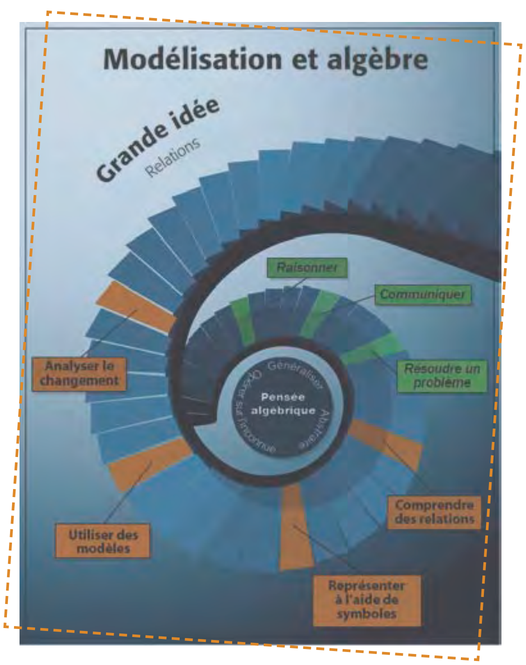
Au Club vidéo Méga : $s = 2 \times f + 25$, où s est la somme déboursée et f, le nombre de films loués.

Au Club vidée Extra : $s = 5 \times f + 4$, où s est la somme déboursée et f, le nombre de films loués.

Concepts algébriques regroupés selon une grande idée

> *Lorsque les enseignantes et enseignants disposent d'un programme-cadre structuré, axé sur les concepts essentiels en mathématiques et, en outre, fondé sur les grandes idées, ils peuvent déterminer la composition de leçons susceptibles de favoriser l'apprentissage de ces concepts mathématiques importants.*

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2004a, p. 21)



Une grande idée est l'énoncé d'une idée fondamentale pour l'apprentissage des mathématiques, une idée qui lie de nombreuses connaissances mathématiques en un tout cohérent.

(Charles, 2005, p. 10, traduction libre)

Les attentes et les contenus d'apprentissage en modélisation et algèbre font appel à un grand nombre de concepts. Le regroupement de ces concepts sous la grande idée de relations permet à l'enseignant ou l'enseignante de planifier une programmation plus efficace de l'enseignement. Ce faisant, il ou elle est en mesure d'élaborer des situations d'apprentissage cohérentes qui permettent aux élèves :

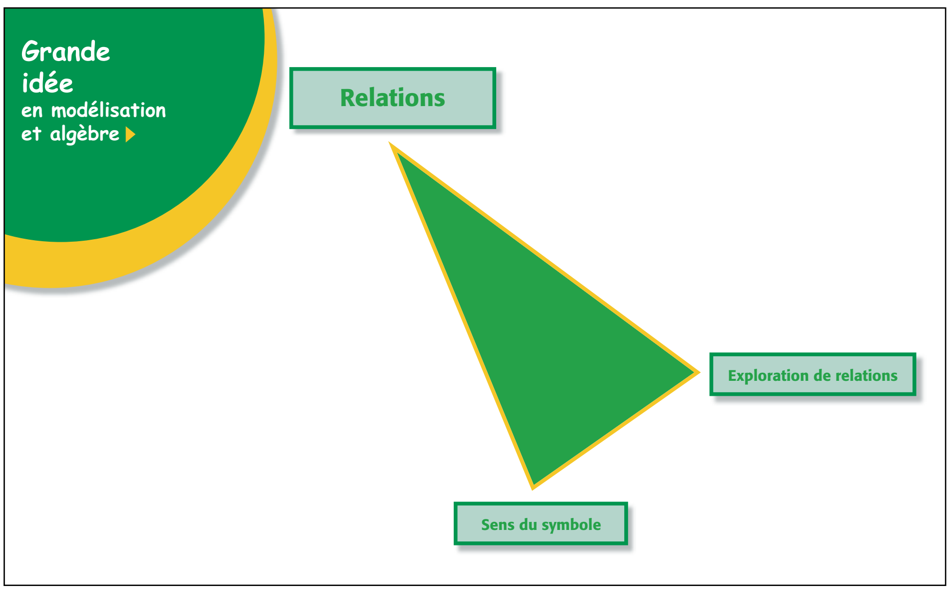
- d'explorer les concepts en profondeur;
- d'établir des liens entre ces concepts;
- de développer une pensée algébrique.

Dans la section qui suit, la grande idée de relations est présentée en détail.

GRANDE IDÉE - RELATIONS

L'un des thèmes les plus importants des mathématiques est l'étude des régularités et des relations. […] L'accent de l'enseignement se déplace de l'exploration des régularités à celles des relations. Quand les élèves utilisent des graphiques, des tables de valeurs, des expressions, des équations ou des descriptions verbales pour représenter une relation, ils voient plus facilement différents aspects d'une situation. Grâce à ces activités, les élèves développent une compréhension des concepts d'inconnue et de variable et des effets des changements d'une variable sur une autre.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 10)



Aperçu

La grande idée de relations constitue la base des attentes du domaine Modélisation et algèbre de la 4e à la 6e année. Cette grande idée place la compréhension des relations entre des quantités ou des nombres au centre de tous les apprentissages en modélisation et algèbre. Son développement en fonction des deux énoncés qui la sous-tendent, soit l'exploration de relations et le sens du symbole, aide l'enseignant ou l'enseignante à définir et à prioriser les concepts clés et à mettre en œuvre des stratégies d'enseignement efficaces et cohérentes.

Grande idée – Relations

La compréhension des relations entre des quantités ou des nombres dans des situations mathématiques avec ou sans contexte constitue la base de la pensée algébrique.

Énoncé 1 – Exploration de relations
L'analyse de situations impliquant des quantités en changement dans le but d'établir la relation entre ces quantités permet de développer la pensée algébrique.

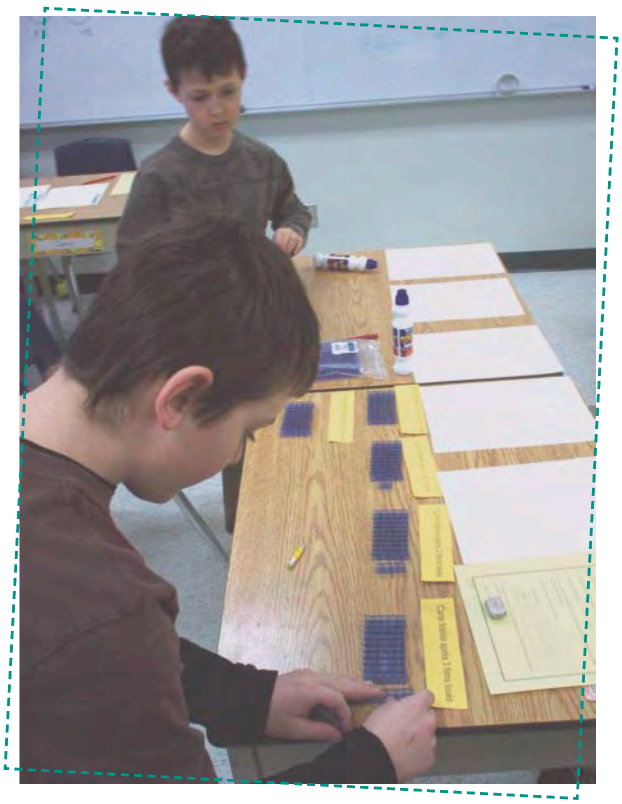
Énoncé 2 – Sens du symbole
Le sens du symbole permet d'interpréter diverses relations mathématiques et de représenter un raisonnement algébrique.

Au cycle primaire, les élèves utilisent du matériel varié et diverses représentations pour explorer le concept de régularité dans des suites non numériques et numériques et pour communiquer leurs observations et leurs perceptions des relations entre les termes de ces suites. Ils développent le concept d'égalité en représentant et en analysant des relations d'égalité entre deux quantités.

Au cycle moyen, les élèves étudient, dans le cadre de situations mathématiques, les relations entre deux quantités en changement. Une situation est souvent représentée par une suite non numérique à motif croissant. Les élèves sont alors amenés à analyser la relation entre le numéro de la figure dans la suite et une quantité qui y est associée (p. ex., le nombre de carrés qui la composent) et à la représenter par une table de valeurs, une règle et une équation. De plus, les élèves explorent et représentent des relations d'égalité de diverses façons et déterminent les valeurs inconnues dans des équations, ce qui leur permet de développer leur sens du symbole.

Dans ce qui suit, on retrouve pour la grande idée de relations en modélisation et algèbre :

- une analyse des deux énoncés qui sous-tendent la grande idée;
- des exemples d'activités qui permettent aux élèves d'établir des liens entre les concepts en modélisation et algèbre et des expériences de la vie quotidienne, des concepts dans les autres domaines de mathématiques et des concepts dans les autres matières;
- des exemples de professions qui nécessitent une bonne compréhension des concepts en modélisation et algèbre;
- le cheminement de l'élève en matière de vocabulaire et d'habiletés relatifs aux concepts en modélisation et algèbre.



Énoncé 1 - Exploration de relations

L'analyse de situations impliquant des quantités en changement dans le but d'établir la relation entre ces quantités permet de développer la pensée algébrique.

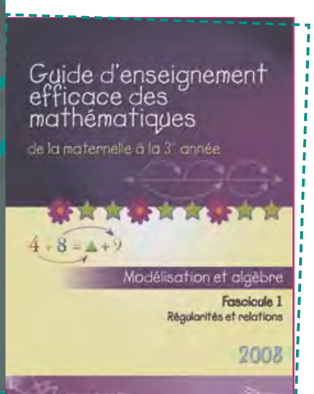
On caractérise souvent l'algèbre comme une généralisation de l'arithmétique. Il est vrai que la pensée algébrique est un prolongement naturel de la pensée arithmétique. L'arithmétique et l'algèbre sont utiles pour décrire des relations importantes que l'on retrouve autour de nous. Or, bien que l'arithmétique soit un outil efficace pour décrire des situations statiques, l'algèbre est dynamique et elle est un outil indispensable pour décrire un monde en changement.

(National Council of Teachers of Mathematics, 2001, p. 1, traduction libre)

Régularité : Phénomène uniforme qui définit une suite et qui permet de déterminer chacun de ses termes.

Au cycle primaire, en modélisation et algèbre, les élèves explorent des régularités dans des suites numériques et non numériques. Ils représentent, prolongent et créent des suites non numériques à motif répété, des suites non numériques à motif croissant et des suites numériques. L'annexe A (p. 198-199) résume le vocabulaire lié aux différents types de suites.

La reconnaissance de régularités est un des fondements de l'algèbre. Le prolongement de suites permet aux élèves de concrétiser leur compréhension du concept de régularité. En outre, la description de régularités, à l'oral et à l'écrit, leur permet d'apprendre à préciser leur pensée algébrique et d'accroître leur habileté à communiquer. Pour plus de renseignements au sujet de l'apprentissage des suites au cycle primaire, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année, Modélisation et algèbre*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a).

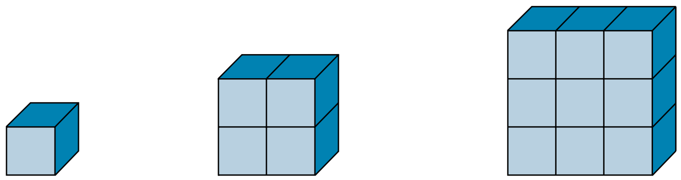


Au cycle moyen, le domaine Modélisation et algèbre entreprend un virage important en misant davantage sur l'exploration de *relations*, c'est-à-dire de situations dans lesquelles le changement d'une quantité a un effet sur une autre quantité. Le monde qui nous entoure présente un grand nombre de relations reliées aux changements de deux quantités. Il suffit de penser, par exemple, à la relation entre le nombre d'heures de travail et le salaire, à la relation entre le périmètre d'un carré et la longueur de ses côtés ou encore, à la relation entre le nombre de pas effectués et la distance parcourue.

Voici deux exemples de situations dans lesquelles on compare deux quantités en changement. Le premier exemple présente une situation reliée à une suite non numérique, tandis que le deuxième présente en mots une situation de la vie courante.

Exemple 1

Voici une suite de solides.



Solide 1 Solide 2 Solide 3

Afin de déterminer le nombre de cubes qui composent un solide, on peut analyser la relation entre les deux quantités en changement que constituent le numéro du solide et le nombre de cubes qui le composent.

Exemple 2

Lorsqu'on achète des disques compacts de musique sur un site Internet, on doit payer 10 $ de frais de manutention plus 15 $ par disque.

Afin de déterminer le coût total pour l'achat d'un nombre quelconque de disques, on peut préciser la relation entre les deux quantités en changement que constituent le nombre de disques compacts achetés et le coût total de l'achat.

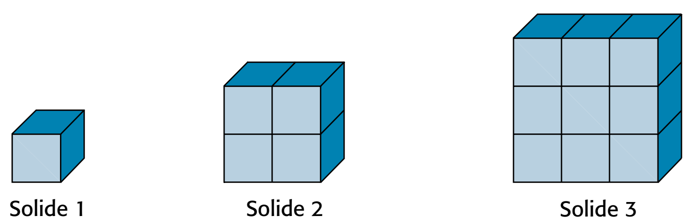
Dans ce qui suit, il sera question de l'importance de l'exploration de relations dans le développement de la pensée algébrique, des différentes sortes de régularités que les élèves du cycle moyen peuvent observer, des relations de proportionnalité et des différentes façons de représenter une relation.

POURQUOI L'EXPLORATION DE RELATIONS?

Trop souvent, l'enseignement de l'algèbre porte sur la manipulation d'expressions abstraites (p. ex., simplifier $3x + 2x - x$) et sur la résolution d'équations présentées sans contexte (p. ex., résoudre $6x - 5 = 3x + 23$). L'apprentissage des élèves se résume alors à utiliser une série de règles sans vraiment en comprendre le sens et à résoudre des problèmes artificiels qui sont censés vérifier s'ils peuvent mettre en pratique ce qu'ils ont appris (p. ex., « Le père de Carla a 26 ans de plus qu'elle. Dans 8 ans, son père sera 3 fois plus âgé qu'elle. Quel âge ont-ils aujourd'hui? »).

Or, de nombreuses études ont démontré l'échec de cette approche dans l'enseignement de l'algèbre, notamment celles de Confrey et Lanier (1980), Clement (1982), Kieran (1982), Lanier (1981), Rosnick et Clement (1980) et Wagner (1981). Par la suite, d'autres chercheurs, notamment Kenney et Silver (1997) et Kieran et Chalouh (1993), ont développé une approche plus concrète fondée sur l'étude de régularités et de relations qui permet d'exposer les élèves à plusieurs concepts algébriques dès le palier élémentaire.

Par l'exploration des relations entre deux quantités en changement, les élèves du cycle moyen apprennent à généraliser des situations et, petit à petit, à exprimer ces relations par une équation. Cette approche contribue au développement de la pensée algébrique et donne un sens aux équations et aux variables (voir *Énoncé 2 – Sens du symbole*, p. 67-97). Par exemple, dans la suite de solides suivante, l'étude de la relation entre le numéro du solide et le nombre de cubes qui le composent permet aux élèves d'établir que ce dernier nombre varie selon le numéro du solide.



Les élèves constatent en effet que le solide 2 est composé de 2 rangées de 2 cubes et que le solide 3 est composé de 3 rangées de 3 cubes. Ils peuvent alors conclure, de façon générale, que le solide numéro n sera composé de n rangées de n cubes. Cette règle en mots, qui décrit une façon de générer chaque terme de la suite, peut éventuellement être exprimée par une équation qui met en évidence la relation entre les deux quantités en changement. En utilisant, par exemple, la variable n pour représenter le numéro du solide et la variable c pour représenter le nombre de cubes qui le composent, ils peuvent exprimer la relation à l'aide de l'équation $c = n \times n$. Cette équation ainsi que les variables utilisées ont un sens pour les élèves, car l'équation provient de leur travail et elle correspond à une règle qu'ils ont déjà exprimée oralement.

SORTES DE RÉGULARITÉS DANS LES RELATIONS

En 4e année, il y a une transition entre l'étude des suites et des régularités effectuée au cycle primaire et l'étude des relations qui a lieu au cycle moyen. En 5e et 6e année, les élèves continuent à reconnaître et à analyser des régularités associées aux relations à l'étude. Ils le font en généralisant des situations et en développant des règles. Certaines régularités peuvent servir à renforcer le sens du nombre chez les élèves, tout en développant leur pensée algébrique. Il est préférable d'utiliser des situations contextuelles, car elles sont moins abstraites. Les situations peuvent présenter une variété de régularités. Voici quelques exemples.

Règle d'une relation :

Expression qui permet de générer les termes d'une suite selon le rang. Elle peut être exprimée en mots ou à l'aide d'une équation (p. ex., $c = n \times n$).

Note : Ces situations où l'on s'intéresse d'abord à l'analyse des régularités peuvent être utilisées dans un contexte de résolution de problèmes ou comme prolongement de l'apprentissage. Il est important de choisir des situations d'apprentissage qui ne sont pas nécessairement orientées vers la recherche d'une règle puisque dans plusieurs cas, cette règle n'est pas à la portée des élèves (voir *Régularité de multiplication*, p. 37).

Régularité d'addition

Dominique fait des économies pour acheter un jeu vidéo dont le prix est de 74,25 $ (taxes incluses). Or, dans son portefeuille, il n'a que 35 $. Chaque semaine, ses parents lui donnent 5 $ qu'il conserve précieusement dans son portefeuille. On peut représenter la relation entre le nombre de semaines qui passent et le nombre de dollars dans le portefeuille de Dominique par une table de valeurs.

Nombre de semaines	1	2	3			
Nombre de dollars dans le portefeuille	40	45	50			

a) Combien d'argent Dominique aura-t-il dans son portefeuille après 5 semaines s'il ne dépense aucun dollar? (*J'ai prolongé la table de valeurs et j'ai déterminé qu'il aura 60 $.*)

Nombre de semaines	1	2	3	4	5	
Nombre de dollars dans le portefeuille	40	45	50	55	60	

+ 5 + 5 + 5 + 5

b) Après combien de semaines Dominique aura-t-il assez d'argent pour acheter le jeu vidéo? (*J'ai prolongé la table de valeurs jusqu'à ce qu'il y ait 75 $ dans le portefeuille et j'ai déterminé que ce sera après 8 semaines.*)

Note : Autrefois, une telle situation aurait été présentée dans le cadre d'activités de résolution de problèmes et seule la deuxième question aurait été posée. La résolution du problème aurait porté sur une méthode arithmétique, par exemple : Dominique gagne 5 $ par semaine et il lui manque 39,25 $. Puisque 39,25 ÷ 5 = 7,85, soit environ 8, ça lui prendra 8 semaines. Or, l'approche préconisée ici est plus algébrique puisqu'elle mise sur la comparaison de deux quantités en changement.

Régularité de soustraction

Un camelot doit livrer 45 journaux dans son quartier. La table de valeurs suivante représente la relation entre le nombre de minutes écoulées depuis le début de la livraison et le nombre de journaux qu'il lui reste à livrer.

Nombre de minutes écoulées	0	1	2	3	4
Nombre de journaux à livrer	45	42	39	36	33

a) Combien lui reste-t-il de journaux à livrer après 7 minutes? Explique ta réponse. (*J'ai constaté qu'il lui reste 3 journaux de moins à livrer chaque minute. Ça veut dire que le camelot livre 3 journaux chaque minute. J'ai prolongé la table de valeurs en maintenant cette régularité, ce qui m'a permis de conclure qu'après 7 minutes, il lui reste 24 journaux à livrer.*)

Nombre de minutes écoulées	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de journaux à livrer	45	42	39	36	33	30	27	24
	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	

b) Combien de temps le camelot prend-il pour livrer tous ses journaux? *(J'ai prolongé la table de valeurs jusqu'à ce qu'il reste 0 journal et j'ai constaté que le camelot prend 15 minutes pour livrer tous ses journaux.)*

Régularité de multiplication

Émilie garde régulièrement des enfants. Un couple lui demande de garder leur enfant 6 heures par jour pendant 10 jours et lui offre de la payer selon la table de valeurs suivante.

Numéro du jour	1	2	3	4	...
Salaire pour la journée ($)	1	2	4	8	...

Si elle accepte l'offre, combien d'argent Émilie gagnera-t-elle en tout?
(*J'ai remarqué que le salaire double chaque jour. J'ai prolongé la table de valeurs jusqu'à 10 jours. J'ai ensuite additionné les salaires et j'ai trouvé qu'Émilie gagnerait au total 1 023 $ pour 10 jours de gardiennage.*)

Numéro du jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Salaire pour la journée ($)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2

Régularité de division

Lors d'un tournoi de soccer, 64 équipes sont présentes. Le premier jour, toutes les équipes jouent un match et les équipes perdantes sont éliminées. Le deuxième jour, les 32 équipes qui restent jouent un match et les équipes perdantes sont éliminées. Il en est de même chaque jour qui suit.

a) Construis une table de valeurs qui représente la relation entre le numéro du jour et le nombre d'équipes qui jouent un match ce jour-là.

Numéro du jour	1	2	3	4	5	6
Nombre d'équipes qui jouent un match	64	32	16	8	4	2

÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2

b) Quel jour aura lieu le dernier match?
(*Le dernier match aura lieu au cours de la 6e journée.*)

Régularité cyclique

Les Jeux olympiques d'été ont lieu tous les 4 ans, soit en 1992, 1996, 2000…, et les Jeux olympiques d'hiver ont lieu tous les 4 ans, soit en 1994, 1998, 2002… Remplis le tableau suivant en plaçant un E dans la 2e rangée s'il y a des jeux d'été, un H s'il y a des jeux d'hiver et un X s'il n'y a pas de jeux.

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Jeux olympiques										

La régularité est cyclique, puisque la même séquence de résultats est répétée tous les 4 ans (le cycle étant : jeux d'été, pas de jeux, jeux d'hiver, pas de jeux).

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Jeux olympiques	E	X	H	X	E	X	H	X	E	X

On peut faire un rapprochement avec une *suite non numérique à motif répété* puisqu'en partant de 1992, on obtient la suite $\underbrace{E\ X\ H\ X}\ E\ X\ H\ X\ E\ X\ H\ X$.

a) Après 2008, en quelle année auront lieu les prochains jeux d'été? Et ceux d'hiver? (*En prolongeant la suite, je vois que les prochains jeux d'été après 2008 auront lieu en 2012 et ceux d'hiver, en 2010.*)

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Jeux	H	X	E	X	H	X	E	X	H	X	E

b) Y aura-t-il des Jeux olympiques en 2016, en 2040 et en 2031? Si oui, lesquels?

Ayant reconnu la régularité, les élèves peuvent proposer des conjectures et généraliser en disant que si l'année est paire, il y a des Jeux olympiques et si l'année est impaire, il n'y en a pas. De plus, lors des années paires, il y a des jeux d'été si l'année est divisible par 4; sinon, ce sont les jeux d'hiver.

RELATIONS DE PROPORTIONNALITÉ

Il y a une relation de proportionnalité entre deux quantités lorsque ces quantités peuvent augmenter ou diminuer simultanément selon le même facteur. Par exemple, si une des deux quantités est triplée, l'autre est triplée aussi. Le rapport entre les deux quantités est alors constant (p. ex., $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$). Une telle égalité entre deux rapports s'appelle une **proportion.**

Les élèves ont été exposés au raisonnement proportionnel dans le cadre de l'étude des nombres naturels. Pour plus de renseignements à ce sujet, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année, Numération et sens du nombre*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008c, p. 49-54). Ils peuvent utiliser ce type de raisonnement pour analyser une relation de proportionnalité entre deux quantités et décrire cette relation par une règle exprimée en mots ou à l'aide d'une équation.

La situation suivante présente une **relation de proportionnalité.**

Au club vidéo du quartier, la location d'un film coûte 6 $ (taxes incluses). La relation entre le nombre de films loués et le coût peut être représentée par la table de valeurs suivante.

Nombre de films loués	1	2	3	4
Coût ($)	6	12	18	24

Dans cette situation, on constate qu'il y a une relation de proportionnalité entre le nombre de films loués et le coût, car si le nombre de films loués est triplé, le coût est aussi triplé. De plus, la relation entre le nombre de films loués et le coût peut être représentée par l'égalité entre deux des rapports (p. ex., $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$).

Note : Le coût est toujours égal à 6 fois le nombre de films loués. Cette relation peut être représentée par l'équation $c = 6 \times n$, où n est le nombre de films loués et c, le coût en dollars.

La situation suivante, en revanche, **ne présente pas une relation de proportionnalité.**

Lorsqu'on commande des CD de musique par Internet, on doit payer 10 $ de frais de manutention plus 15 $ par CD acheté. La relation entre le nombre de CD achetés et le coût peut être représentée par la table de valeurs suivante.

Nombre de CD achetés	1	2	3	4
Coût ($)	25	40	55	70

Dans cette situation, on constate qu'il n'y a pas de relation de proportionnalité entre le nombre de CD achetés et le coût, car si le nombre de CD est triplé, le coût ne l'est pas. De plus, la relation entre le nombre de CD achetés et le coût ne peut pas être représentée par l'égalité entre deux des rapports (p. ex., $\frac{1}{25} \neq \frac{3}{55}$).

Les situations impliquant une relation de proportionnalité peuvent être résolues par **extrapolation**, par **interpolation** ou en utilisant intuitivement un raisonnement proportionnel.

Extrapolation : Procédé qui consiste à trouver des valeurs situées en dehors de la série de valeurs présentées dans une suite, une table de valeurs ou un graphique.

Interpolation : Procédé qui consiste à trouver des valeurs intermédiaires situées entre des valeurs présentées dans une suite, une table de valeurs ou un graphique.

Exemple

La table de valeurs suivante représente la relation entre le nombre d'ananas achetés à l'épicerie et le coût total. On constate que le coût augmente de 3 $ chaque fois qu'on ajoute 2 ananas.

Nombre d'ananas	2	4	6	8	10
Coût ($)	3	6	9	12	15

Pour déterminer, par exemple, le coût de 14 ananas, les élèves peuvent prolonger la table de valeurs jusqu'à 14 et déterminer que le coût sera de 21 $. Ils font alors appel à l'extrapolation.

Ils peuvent aussi utiliser un raisonnement proportionnel comme suit : « Chaque groupe de 2 ananas coûte 3 $. Pour 14 ananas, il faut 7 groupes de 2 ananas. On calcule donc 7 × 3 $ et on obtient un coût de 21 $. »

Pour déterminer, par exemple, le coût de 5 ananas, les élèves peuvent noter que même si on ne retrouve pas 5 ananas dans la table de valeurs, le coût doit se situer à mi-chemin entre le coût de 4 ananas et celui de 6 ananas. Donc, 5 ananas coûtent 7,50 $. Ils font alors appel à l'interpolation.

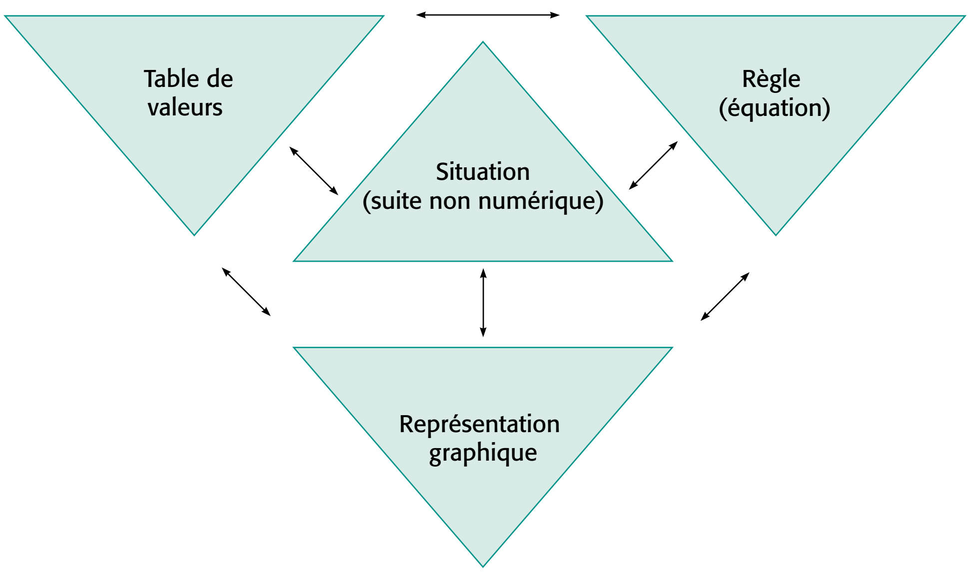
Ils peuvent aussi utiliser un raisonnement proportionnel comme suit : « Puisque 2 ananas coûtent 3 $, un ananas coûte 1,50 $. Donc, 5 ananas coûtent 5 × 1,50 $, soit 7,50 $ ».

REPRÉSENTATIONS DES RELATIONS

> *Les enseignants et les enseignantes doivent amener les élèves à faire un lien entre les raisonnements fondés sur des nombres et ceux fondés sur des dessins. Pour cela, il faut encourager les élèves à discuter des multiples représentations d'une relation.*
>
> (Rivera et Becker, 2005, p. 203, traduction libre)

Au cycle moyen, les élèves sont amenés à explorer les relations et à les représenter de différentes façons. Une relation peut être représentée par une situation (suite non numérique), une table de valeurs, une équation (règle) ou une représentation graphique. Les flèches dans le schéma ci-après indiquent les liens entre les diverses représentations usuelles d'une relation.

Représentations d'une relation



L'étude de ces représentations s'effectue progressivement tout au long des cycles moyen et intermédiaire. Les élèves explorent d'abord les relations à partir de situations exprimées à l'aide de suites non numériques ou de mots. Ensuite, ils représentent les relations par des tables de valeurs, puis par des règles exprimées en mots et avec des équations. Quant aux représentations graphiques d'une relation, elles sont davantage à l'étude au cycle intermédiaire.

Situation

Une relation peut être représentée par une situation qui est exprimée à l'aide d'une suite de figures concrètes ou semi-concrètes (voir *Exemple* 1, p. 33) ou à l'aide de mots (voir *Exemple 2*, p. 33). L'étude des relations devrait d'abord passer par des situations exprimées à l'aide de suites non numériques parce que ces situations possèdent une dimension visuelle et kinesthésique qui rend les relations qu'elles représentent moins abstraites.

Exemple d'une suite non numérique à motif croissant

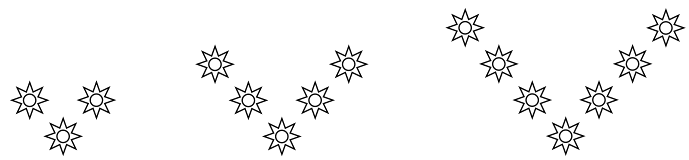


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Les suites non numériques à motif croissant ont les caractéristiques suivantes :

- Les éléments qui composent chaque figure de la suite sont disposés selon un ordre et une régularité. Par exemple, d'une figure à l'autre dans la suite ci-dessus, on ajoute un soleil au bout de chaque branche.
- Le motif est repérable dans chaque figure, de manière que chaque figure provient de la croissance de la figure précédente. Par exemple, dans la suite ci-dessus, le motif de base est formé de 3 soleils placés en forme de V.

Note : On peut utiliser de la couleur afin de faire ressortir le motif de base.

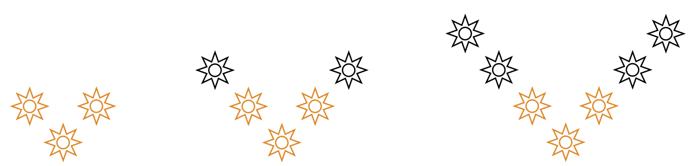


Figure 1 Figure 2 Figure 3

- Le nombre et l'emplacement des éléments qui composent chaque figure sont prévisibles. Par exemple, dans la suite ci-dessus, on peut prévoir que la figure 5 sera composée du motif de base, soit 3 soleils placés en forme de V, et de 4 soleils de plus sur chaque branche. Elle sera donc composée de 11 soleils en tout.

Une bonne connaissance des caractéristiques d'une suite non numérique à motif croissant permet aux élèves de reconnaître et de créer ce type de suite. Ils peuvent en effet reconnaître, par exemple, que la suite suivante **n'est pas** une suite non numérique à motif croissant, même si chaque figure est composée de la même quantité de soleils que dans la suite précédente, soit 3, 5, 7…, car ceux-ci ne sont pas disposés selon un ordre et une régularité qui permettent de prévoir l'emplacement des soleils qui composeront la prochaine figure.

Figure 1 Figure 2 Figure 3

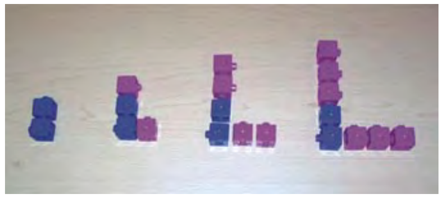
Afin d'aider les élèves à développer une compréhension de ces caractéristiques, l'enseignant ou l'enseignante peut leur proposer de créer une suite non numérique à motif croissant qui correspond à une suite numérique donnée. Ensuite, il ou elle questionne les élèves afin de les inciter à analyser leur création. Par exemple, voici deux suites que des élèves ont créées à l'aide de matériel concret pour correspondre à la suite numérique 2, 4, 6, 8...

Suite de l'élève 1

Suite de l'élève 2

La première suite est une suite non numérique à motif croissant mais la deuxième n'en est pas une, car elle ne possède pas toutes les caractéristiques d'une telle suite. Le tableau suivant présente une série de questions que l'enseignant ou l'enseignante pourrait poser aux élèves pour les amener à analyser leur suite et à la modifier au besoin.

Élève 1 (Suite à motif croissant)



– « Quel est le motif de base? »
(Les 2 cubes bleus.)

– « Comment as-tu placé ces 2 cubes? »
(L'un au-dessus de l'autre, à la verticale.)

– « Est-ce que ces 2 cubes bleus, qui forment le motif de base, sont placés de la même façon dans chaque figure? »
(Oui.)

– « Combien de cubes as-tu ajoutés d'une figure à l'autre? »
(*J'ai ajouté 2 cubes chaque fois.*)

– « Où les cubes ont-ils été ajoutés? »
(*Dans chaque figure, j'ai ajouté 1 cube à la verticale et 1 cube en bas à l'horizontale.*)

Élève 2 (Pas une suite à motif croissant)

– « Quel est le motif de base? »
(*Les 2 cubes bleus.*)

– « Comment as-tu placé ces 2 cubes? »
(*L'un au-dessus de l'autre, à la verticale.*)

– « Est-ce que ces 2 cubes bleus, qui forment le motif de base, sont placés de la même façon dans chaque figure? »
(*Non.*)

– « Que pourrais-tu changer pour que l'on voie le motif de base dans chacune des 4 figures? »
(*Je pourrais placer les 2 premiers cubes à l'horizontale.*)

– « Combien de cubes as-tu ajoutés d'une figure à l'autre? »
(*J'ai ajouté 2 cubes chaque fois.*)

– « Où les cubes ont-ils été ajoutés? »
(*En bas à l'horizontale, puis à gauche à la verticale, puis à droite à la verticale.*)

– « Peux-tu me le montrer? »
(*Oui, les voici.*)

– « Décris comment tu construirais la prochaine figure (la 5e). »
(*Je placerais 2 cubes bleus à la verticale et j'ajouterais 4 cubes à la verticale et 4 cubes en bas à l'horizontale.*)

– « De quoi aurait l'air la 10e figure? »
(*J'aurais mon motif de 2 cubes, l'un au-dessus de l'autre avec 9 autres cubes à la verticale et 9 autres cubes en bas à l'horizontale.*)

– « Sont-ils toujours disposés de la même façon? »
(*Non.*)

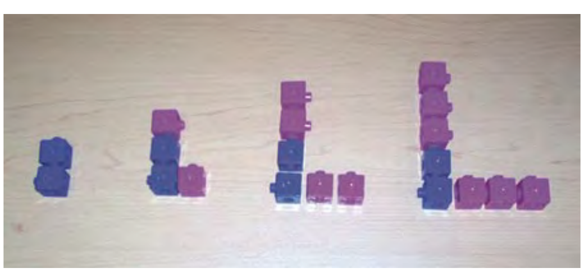
– « Comment pourrais-tu réorganiser les cubes dans ta suite afin qu'on puisse prévoir l'emplacement des cubes qui composeront la prochaine figure? »
(*Je pourrais toujours ajouter les deux cubes en bas à l'horizontale.*)

Note : Il s'agit maintenant d'une suite non numérique à motif croissant.

– « Décris la prochaine figure (la 5e). »
(*J'aurais 2 cubes bleus placés horizontalement, suivis de 8 autres cubes.*)

– « De quoi aurait l'air la 10e figure? »
(*J'aurais 10 groupes de 2 cubes placés horizontalement.*)

Peu importe la suite non numérique qu'ils examinent, les élèves commencent habituellement par repérer, examiner et utiliser la régularité qui définit le changement d'une figure à l'autre. On peut alors les amener à décrire la suite en utilisant cette régularité.



Par exemple, l'élève 1 peut expliquer que pour créer sa suite, il faut commencer avec 2 cubes placés à la verticale et que pour créer la figure suivante, on ajoute toujours 2 cubes, soit l'un à l'horizontale et l'autre à la verticale.

Une même suite peut représenter plusieurs relations différentes. L'enseignant ou l'enseignante doit donc choisir la relation à étudier en fonction de son niveau de difficulté pour les élèves.

Prenons, par exemple, la suite non numérique suivante construite à l'aide de cure-dents.

Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

L'enseignant ou l'enseignante peut choisir d'étudier la relation entre :

- le numéro de la figure et le nombre de cure-dents qui la composent.

  Voici la table de valeurs qui correspond à cette relation.

Numéro de la figure	1	2	3	4
Nombre de cure-dents	4	7	10	13

  D'après la table de valeurs, le nombre de cure-dents augmente de 3 d'une figure à l'autre. On peut le voir dans la suite non numérique, car pour passer d'une figure à la suivante, il faut ajouter 3 cure-dents, soit .

- le numéro de la figure et son périmètre (chaque cure-dent a une longueur de 1 unité).

  Voici la table de valeurs qui correspond à cette relation.

Numéro de la figure	1	2	3	4
Périmètre de la figure, en unités	4	6	8	10

  D'après la table de valeurs, le périmètre augmente de 2 unités d'une figure à l'autre. On peut le voir dans la suite non numérique, car pour passer d'une figure à la suivante, les côtés verticaux mesurent toujours 1 unité chacun, tandis que les côtés horizontaux s'allongent de 1 unité chacun.

- le numéro de la figure et son aire (chaque carré représente 1 unité carrée).

Voici la table de valeurs qui correspond à cette relation.

Numéro de la figure	1	2	3	4
Aire de la figure, en unités carrées	1	2	3	4

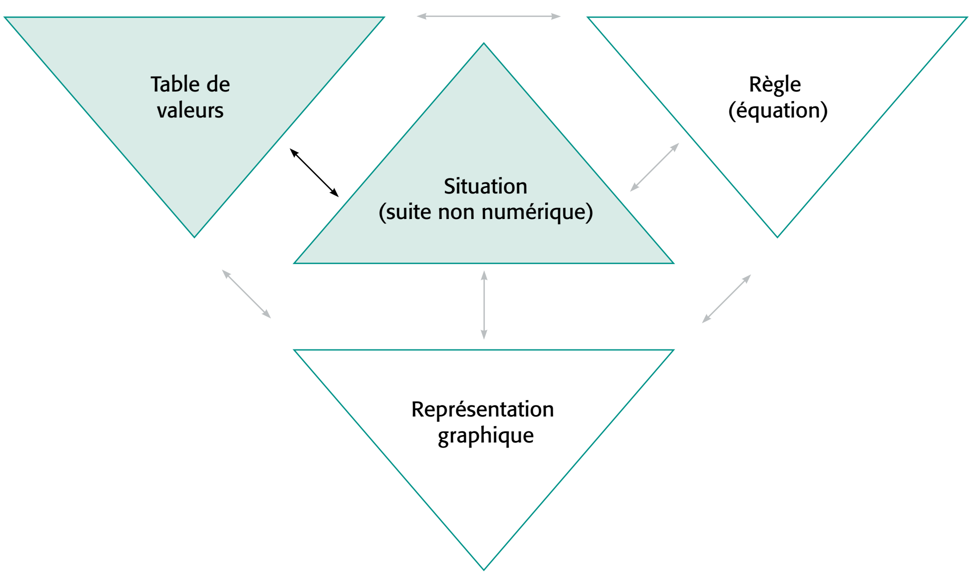
D'après la table de valeurs, l'aire augmente de 1 unité carrée d'une figure à l'autre. On peut le voir dans la suite non numérique, car pour passer d'une figure à la suivante, on ajoute 1 carré (1 unité carrée) chaque fois.

Après avoir développé une bonne compréhension du concept de relation à partir de situations exprimées à l'aide de suites non numériques, les élèves peuvent explorer, dans un contexte de résolution de problèmes, des relations représentées par des situations exprimées en mots.

Table de valeurs

En 4e année, les élèves représentent des relations par des tables de valeurs. Ils prolongent ces tables en utilisant la régularité et ils les interprètent par rapport aux relations étudiées.

Représentations d'une relation en 4e année



Voici un exemple de traitement d'une situation en 4[e] année. L'enseignant ou l'enseignante présente les trois premières figures d'une suite non numérique à motif croissant.

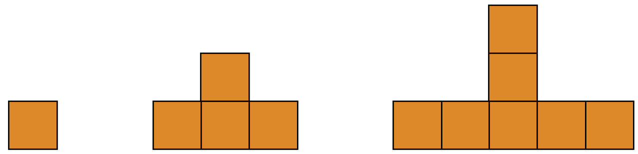


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Il ou elle demande aux élèves de les reproduire et de construire les deux prochaines figures, soit de façon concrète (p. ex., en utilisant des carrés de carton qu'ils collent sur une grande feuille de papier) ou de façon semi-concrète (p. ex., en dessinant les figures). Le prolongement de la suite leur permet de mieux voir et comprendre la croissance du motif. Une fois la tâche accomplie, l'enseignant ou l'enseignante anime un échange afin d'amener les élèves à expliquer la stratégie utilisée et la régularité observée (p. ex., d'une figure à l'autre, il y a toujours 3 carrés de plus, soit 1 à gauche, 1 à droite et 1en haut). Il ou elle leur explique alors qu'on s'intéresse à la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent.

Note : Il importe de préciser la relation dont il est question puisque, comme il a été mentionné précédemment, une suite peut servir à l'étude de plusieurs relations différentes.

L'enseignant ou l'enseignante invite ensuite les élèves à construire une table de valeurs pour représenter cette relation à partir des cinq premières figures. Il ou elle les amène à examiner et à utiliser la table de valeurs pour qu'ils comprennent bien comment elle représente la relation en posant des questions telles que :

Numéro de la figure	Nombre de carrés
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13

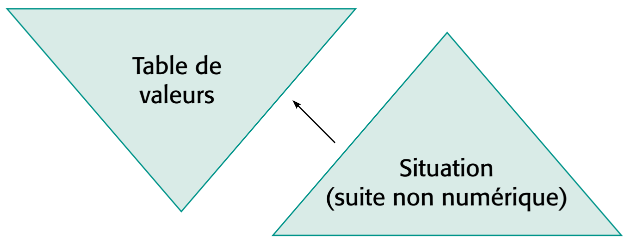
– « Quelle régularité voyez-vous dans cette table? »
  (*Le nombre de carrés augmente toujours de 3, tandis que le numéro de la figure augmente de 1.*)

– « Peut-on voir ces augmentations dans les figures? »
(*Oui. Pour former une nouvelle figure, il faut ajouter à la figure précédente un carré dans chacune des trois branches.*)

– « Combien y aura-t-il de carrés dans la figure 8? »
(*En prolongeant la table, j'ai déterminé qu'il y aura 22 carrés.*)

L'enseignant ou l'enseignante demande alors aux élèves de construire les figures 6, 7 et 8 afin de valider le résultat précédent. Cette activité permet aux élèves de passer de la situation à la table de valeurs, et vice versa.

En effet, les élèves ont d'abord **représenté** la situation en construisant une table de valeurs. Ceci est symbolisé par la flèche ci-contre.



Ils ont ensuite **interprété** les données dans la table de valeurs en notant que les termes dans la colonne de droite augmentent de 3 et que, d'une figure à l'autre, il y a toujours 3 carrés de plus. Ils ont aussi validé les termes du prolongement de la table de valeurs en vérifiant avec le prolongement de la suite de figures. Par exemple, le prolongement de la table permet de conclure que la 8^{e} figure comptera 22 carrés, ce qui est validé en prolongeant la suite de figures et en constatant que la 8^{e} figure compte bien 22 carrés.

Numéro de la figure	Nombre de carrés
...	...
8	22

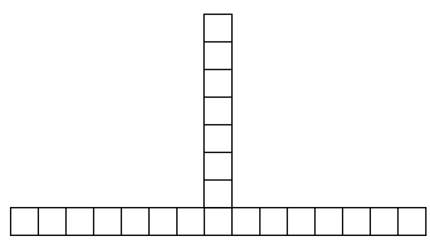
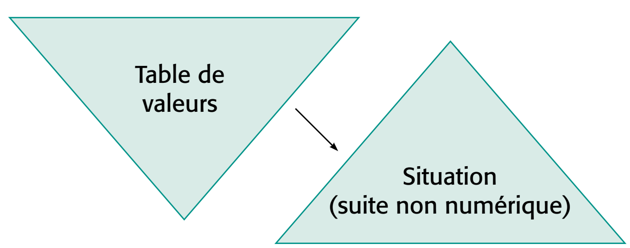


Figure 8

Cette activité d'interprétation, symbolisée par la flèche ci-contre, aide les élèves à mieux comprendre que la table de valeurs et la situation sont deux façons différentes de représenter une même relation.



L'enseignant ou l'enseignante peut ensuite profiter du contexte de la situation précédente pour demander aux élèves de modifier la suite de figures ci-contre pour qu'elle corresponde à la relation représentée par une table de valeurs différente telle que celle ci-après.

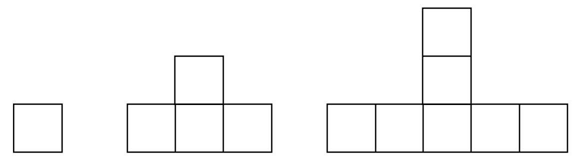


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Numéro de la figure	Nombre de carrés
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

Voici deux exemples de suites que les élèves pourraient construire.

Exemple 1

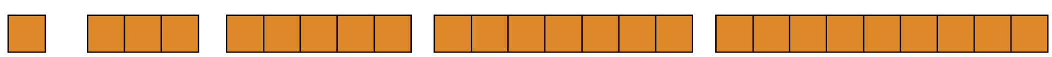


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4 Figure 5

Exemple 2

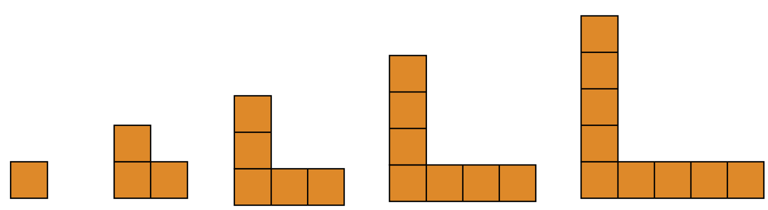


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4 Figure 5

Dans un contexte de résolution de problèmes, les élèves peuvent aussi établir un lien entre une situation exprimée en mots et une table de valeurs.

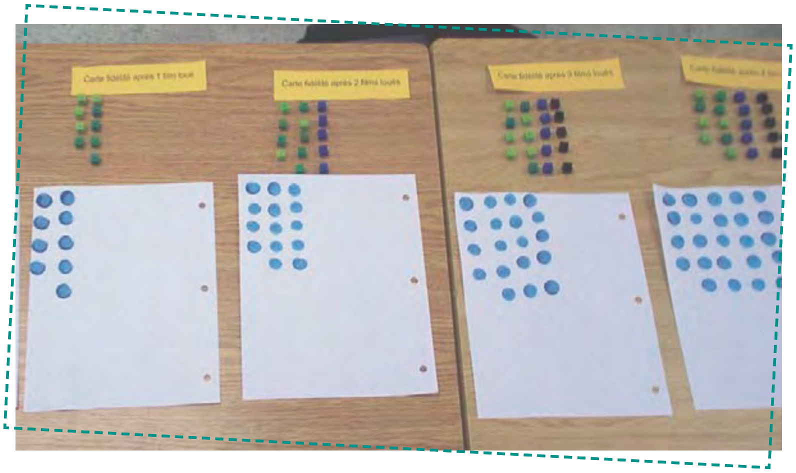
Exemple

Dans le quartier de Dimitri et Anouka, un nouveau club vidéo, Film Plus, vient d'ouvrir. On doit payer un ***abonnement de 4 $*** *dès la première visite. Donc, si on inclut le coût de l'abonnement, après avoir loué successivement 1 film, 2 films, 3 films et 4 films, on aura déboursé 9 $, 14 $, 19 $ et 24 $.*

Les élèves peuvent d'abord utiliser une table de valeurs pour représenter la relation entre le nombre de films loués et la somme déboursée.

Nombre de films loués	1	2	3	4	...
Somme déboursée ($)	9	14	19	24	...

Pour mieux comprendre cette relation, ils peuvent ensuite la modéliser en utilisant du matériel concret ou semi-concret.

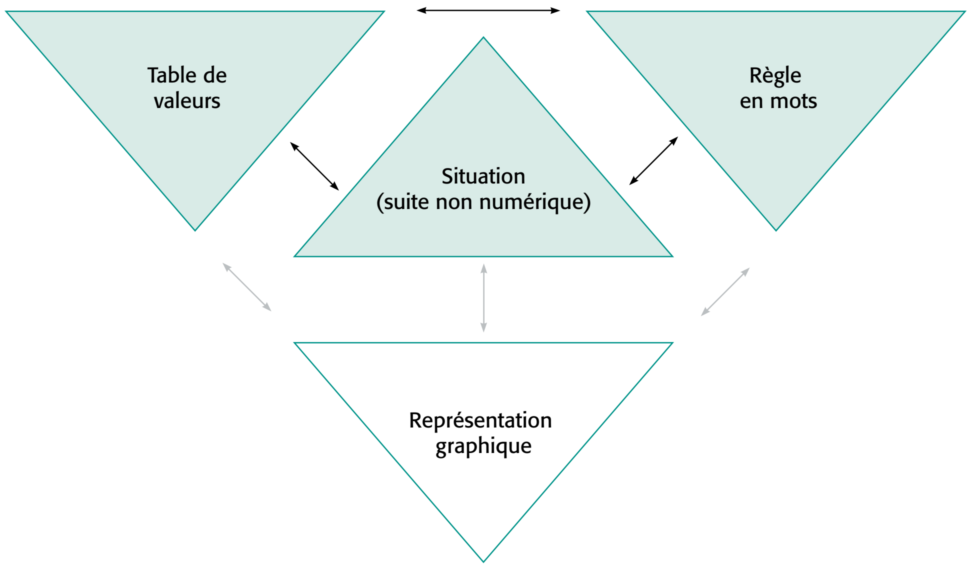


Le travail d'analyse de relations à l'aide d'une table de valeurs se poursuit en 5e et 6e année alors que les élèves apprennent à déterminer la règle qui définit la relation, puis à représenter la relation par une équation.

Règle

En 5^{e} année, l'étude des relations inclut la représentation de relations par des règles énoncées en langage courant.

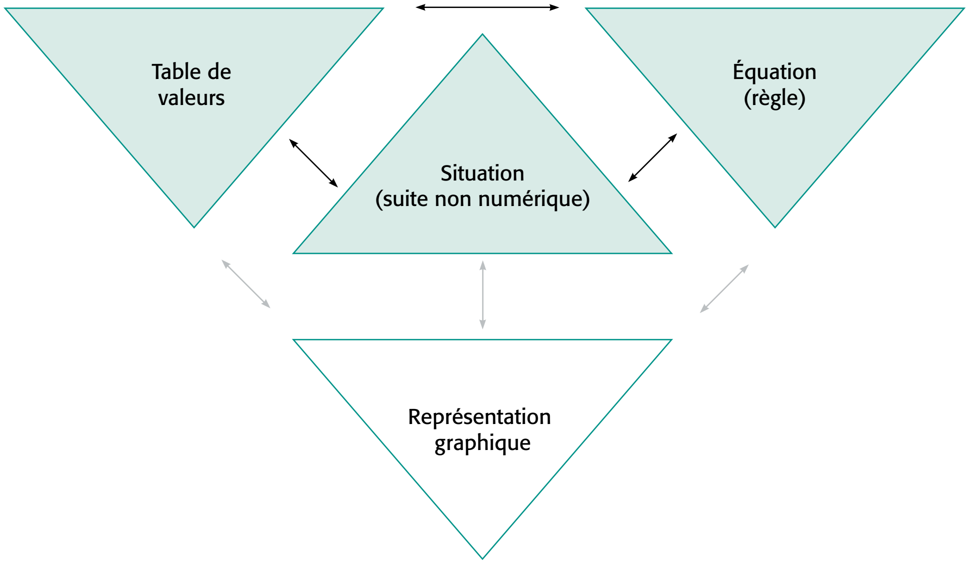
Représentations d'une relation en 5^{e} année



Il est plus difficile de déterminer une règle que de déterminer une régularité. La détermination de la règle en langage courant est une étape importante dans le développement de la pensée algébrique puisqu'il s'agit d'une **généralisation** de la relation. La règle permet aux élèves d'expliquer la relation entre les deux quantités en changement et de déterminer n'importe quel terme (p. ex., le 25^{e} terme) sans avoir à prolonger la suite jusqu'au terme recherché.

En 6^{e} année, les élèves apprennent à représenter une règle exprimée en mots à l'aide d'une équation. Ils doivent choisir les variables et formuler une équation qui représente la règle, ce qui contribue au développement du sens du symbole (voir *Énoncé 2 – Sens du symbole*, p. 67-97). C'est dans un tel contexte que les équations obtenues et les relations qu'elles représentent prennent tout leur sens.

Représentations d’une relation en 6e année



La progression des apprentissages décrite précédemment et reflétée dans les contenus d’apprentissage du programme-cadre de mathématiques ainsi que des recherches, notamment celle de Lee (1996, p. 105), suggèrent trois étapes qui mènent à la représentation d’une suite non numérique à l’aide d’une règle :

1. Visualiser la relation : percevoir les figures d’une certaine façon et reconnaître un lien entre elles.
2. Verbaliser la relation : utiliser ce qui a été perçu afin d’énoncer une règle en langage courant.
3. Représenter la relation à l’aide de symboles : exprimer la règle au moyen d’une équation composée de variables.

On peut illustrer ces trois étapes qui mènent à l’élaboration d’une équation à l’aide de la suite non numérique suivante où on explore la relation entre le numéro de la figure et le nombre de cubes qui la composent.

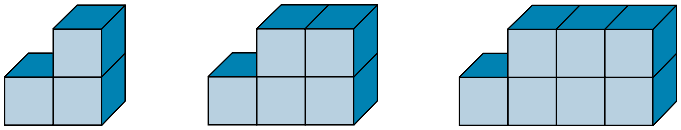


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Exemple de raisonnement d'élève

1. **Visualiser la relation** : Dans la figure 1, je vois 1 cube et 1 groupe de 2 cubes.
Dans la figure 2, je vois 1 cube et 2 groupes de 2 cubes.
Dans la figure 3, je vois 1 cube et 3 groupes de 2 cubes.
Donc, dans la figure 10, il y aura 1 cube et 10 groupes de 2 cubes.
2. **Verbaliser la relation** : Pour déterminer le nombre de cubes dans une figure, je commence par 1 et j'ajoute le numéro de la figure multiplié par 2.
3. **Représenter la relation à l'aide de symboles** : La relation peut être représentée par l'équation $c = 1 + n \times 2$, où n représente le numéro de la figure et c, le nombre de cubes qui la composent.

Lorsque les individus observent des suites de nombres générées par des règles implicites, il est probable qu'ils perçoivent différemment les relations entre les termes de ces suites. La théorie des intelligences multiples de Howard Gardner nous fait constater que certains individus peuvent reconnaître ces relations de façon visuelle ou spatiale, tandis que d'autres les voient de façon logique ou mathématique.

(Rivera et Becker, 2005, p. 198, traduction libre)

Note : En 6e année, les élèves apprennent à effectuer des opérations arithmétiques en respectant la priorité des opérations. Les équations présentées dans ce document pour exprimer une règle tiennent compte de cette connaissance.

Il est important de reconnaître que ce cheminement vers l'expression d'une équation peut différer d'un ou d'une élève à l'autre puisque le raisonnement se développe à partir de perceptions individuelles. L'exemple suivant, inspiré d'une recherche de Radford (2006, p. 2-21), illustre comment des élèves peuvent percevoir différemment la relation entre le numéro de la figure dans une suite non numérique à motif croissant et le nombre de cercles qui la composent.

Exemple

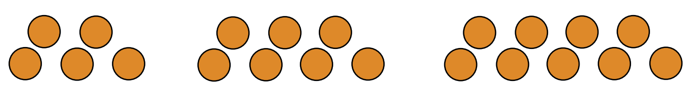


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

Élève 1

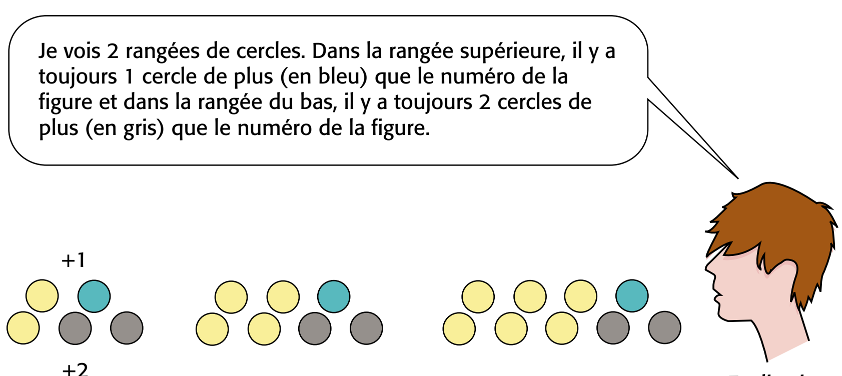
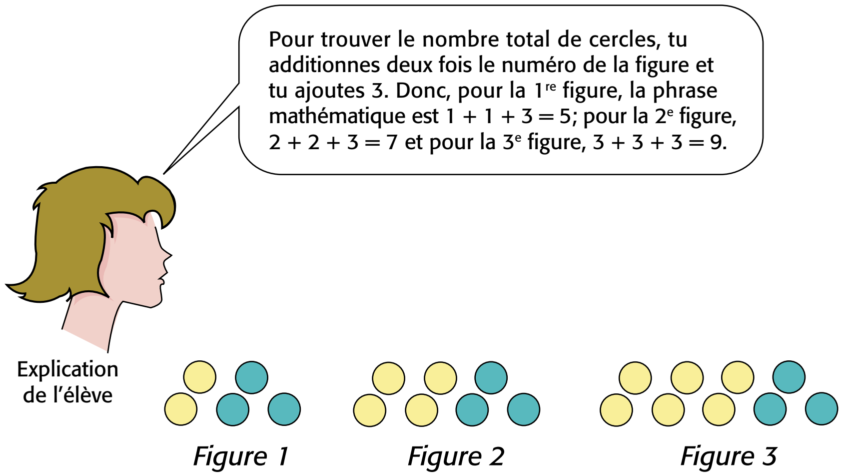


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

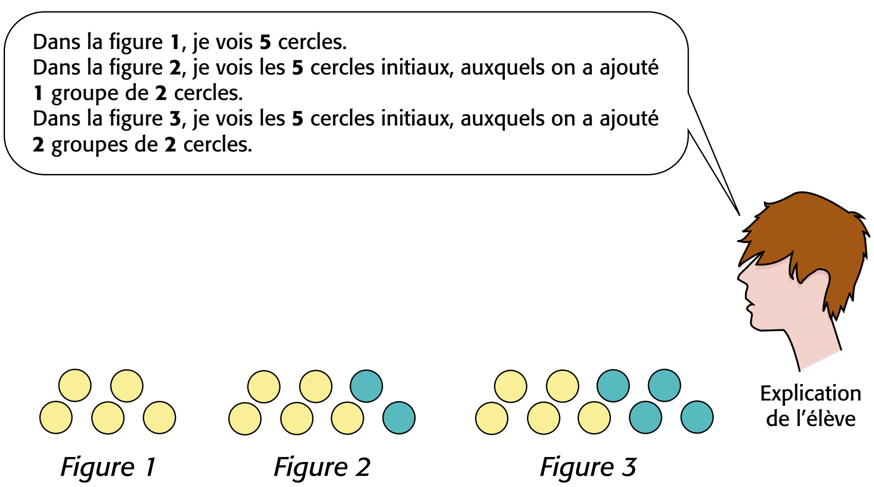
En poursuivant son analyse, l’élève détermine que la figure 10 contiendra (10 + 1) + (10 + 2) cercles, soit 23 cercles. L’élève conclut alors que la relation peut être représenté par l’équation $c = (n + 1) + (n + 2)$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de cercles qui la composent.

Élève 2



En poursuivant son analyse, l’élève conclut que la relation peut être représentée par l’équation $c = n + n + 3$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de cercles qui la composent.

Élève 3



En analysant ces observations, l’élève généralise et constate que dans chaque figure, il y a 5 cercles et un certain nombre de groupes de 2 cercles, ce nombre correspondant au numéro de la figure précédente. Ainsi, dans la figure 25, il y aura 5 + 24 × 2 cercles, soit 53 cercles.

Note : L'élève peut présenter son interprétation à l'aide d'un tableau.

Numéro de la figure	Nombre de cercles	Explication à l'aide de la régularité	Relation entre le numéro de la figure et le nombre de cercles qui la composent
1	5	5	$5 + 0 \times 2$
2	7	$5 + 2$	$5 + 1 \times 2$
3	9	$5 + 2 + 2$	$5 + 2 \times 2$
4	11	$5 + 2 + 2 + 2$	$5 + 3 \times 2$
25	?	$5 + 2 + 2 + 2 + \ldots$	$5 + 24 \times 2$
n		5 + (numéro − 1) × 2	$5 + (n - 1) \times 2$

L'élève conclut que la relation peut être représentée par l'équation $c = 5 + (n - 1) \times 2$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de cercles qui la composent.

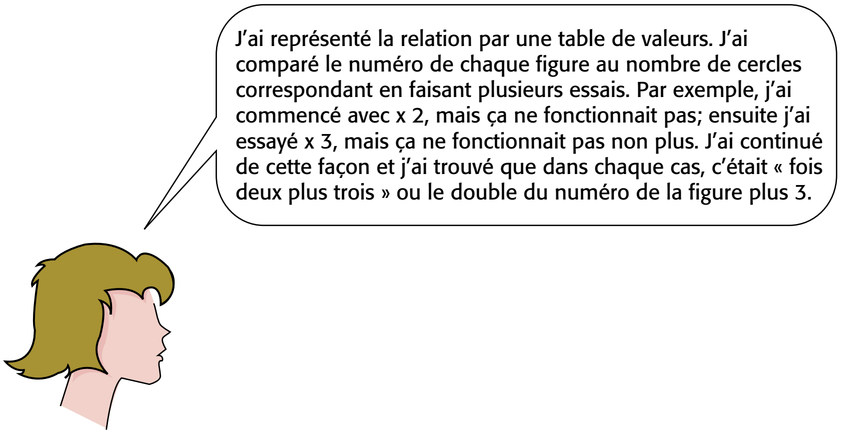
Note : L'élève a analysé la relation en se basant sur la *régularité* (soit l'ajout de 2 cercles à la figure précédente), ce qui le mène à utiliser l'expression $n - 1$ pour représenter le numéro du terme précédent.

Les règles formulées par les trois élèves proviennent de la compréhension qu'ils ont de cette relation. Chaque élève a perçu et généralisé la situation à sa façon, ce qui a engendré trois équations différentes, mais équivalentes. Aucune n'est meilleure qu'une autre. Elles démontrent toutefois que l'interprétation que les élèves se font d'une relation a un effet sur la règle qu'ils formulent. Il est important que l'enseignant ou l'enseignante encourage ces différentes formulations d'une règle. Ce faisant, il ou elle aide les élèves à développer une meilleure compréhension des équations et des variables.

Certains élèves passent trop rapidement de la suite non numérique à la table de valeurs correspondante. Par exemple, à partir de la suite non numérique précédente (p. 54), ils établissent immédiatement la table suivante.

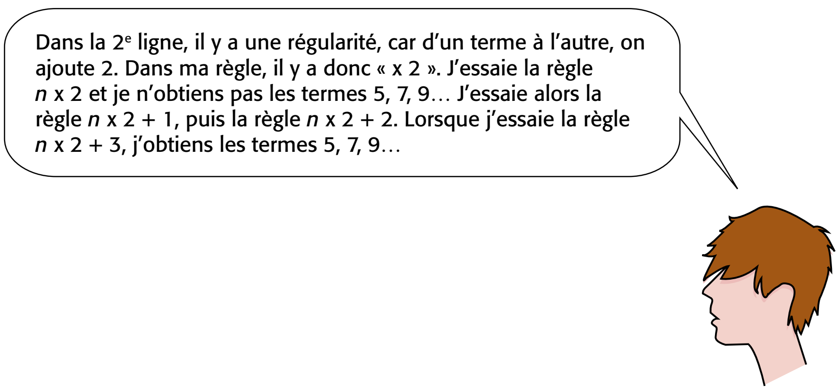
Numéro de la figure	1	2	3
Nombre de cercles	5	7	9

Ils procèdent ensuite par tâtonnements pour déterminer l’équation qui définit la relation, comme en font foi les explications des deux élèves suivants. Dans chaque cas, il y a lieu de remettre en question la profondeur de la compréhension qu’ont ces élèves de l’équation obtenue et de la relation qu’elle représente.



Explication
de l’élève

L’élève conclut que la relation peut être représentée par l’équation $c = n \times 2 + 3$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de cercles qui la composent.



Explication
de l’élève

L’élève conclut que la relation peut être représentée par l’équation $c = n \times 2 + 3$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de cercles qui la composent. Dans ce cas, cet élève semble déterminer l’équation en suivant une procédure apprise par cœur.

L’enseignant ou l’enseignante doit tenir compte des différentes façons qu’ont les élèves de percevoir les relations entre les termes d’une suite et adapter son questionnement en conséquence afin d’aider chaque élève à exprimer la règle en mots avec précision et à déterminer l’équation qui lui correspond. La situation qui suit met en évidence des exemples de questionnement adapté.

Exemple

L'enseignant ou l'enseignante présente la suite de figures suivante.

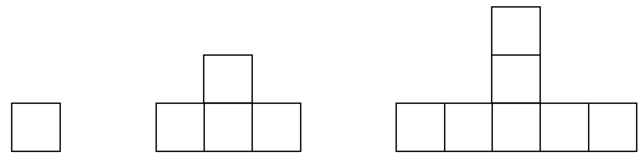


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

À l'aide des questions suivantes, il ou elle incite les élèves à analyser la suite et à établir une relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent :

– « Combien de carrés composent chacune des figures 1, 2 et 3? »

– « Combien de carrés faut-il pour construire la figure 4? Construisez cette figure. »

– « Combien de carrés faut-il pour construire la figure 5? Construisez cette figure. »

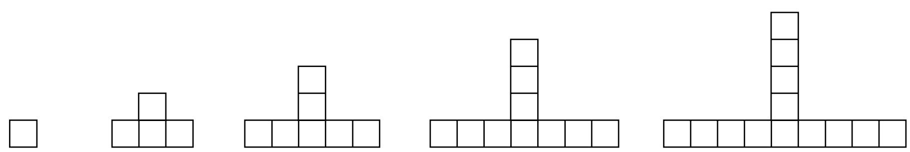


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4* *Figure 5*

– « Quelle régularité voyez-vous dans les nombres de carrés? »

– « Construisez une table de valeurs qui représente la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent. Quelle régularité voyez-vous dans la table? »

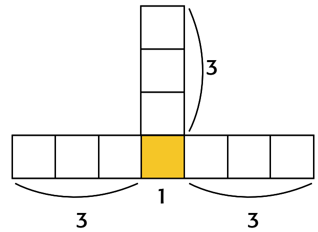
– « Combien y aura-t-il de carrés dans la figure 6? dans la figure 10? Comment le savez-vous? »

– « Y a-t-il d'autres façons de le déterminer? »

L'enseignant ou l'enseignante anime ensuite un échange mathématique qui met l'accent sur les différentes perceptions que les élèves ont de la relation. Il ou elle pose des questions telles que les suivantes afin d'amener les élèves à expliquer et à verbaliser leur stratégie et leur règle.

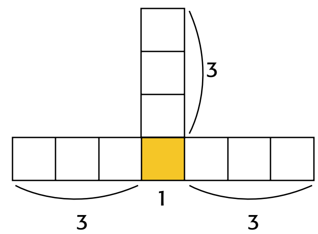
1. « Avez-vous trouvé une méthode rapide pour compter le nombre de carrés de la figure 4? Pouvez-vous nous l’expliquer? »

   Élève 1 : *Dans la figure 4, je vois qu’il y a 3 carrés à gauche, 3 carrés à droite, 3 carrés en haut et 1 au milieu en bas. En tout, ça fait 3 + 3 + 3 + 1, soit 10 carrés.*

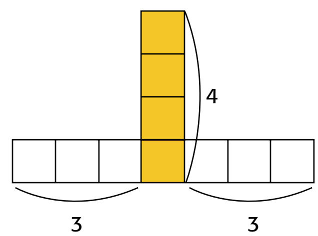


   – « Qui a utilisé la même méthode? Y a-t-il quelqu’un qui a utilisé une autre méthode? »

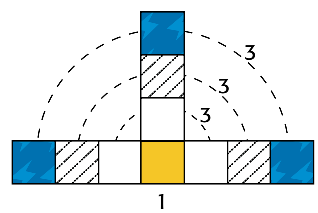
   Élève 2 : *J’ai utilisé une méthode semblable. Je vois 1 carré au milieu en bas, et 3 branches de 3 carrés. En tout, ça fait 1 + (3 × 3), soit 10 carrés.*



   Élève 3 : *Moi, ma méthode est différente, mais j’ai obtenu la même réponse. Je vois une colonne de 4 carrés, puis 3 carrés à gauche et 3 carrés à droite. En tout, je compte 4 + 3 + 3, soit 10 carrés.*

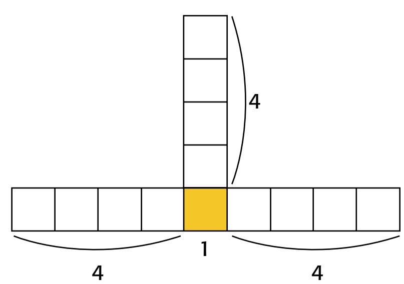


   Élève 4 : *Moi, je vois les figures d’une autre façon. Si je regarde la suite, elle commence par un carré et à chaque figure suivante, on ajoute un carré à 3 endroits. Dans la figure 4, on a ajouté les 3 carrés 3 fois. En tout, on a 1 + (3 × 3), soit 10 carrés.*

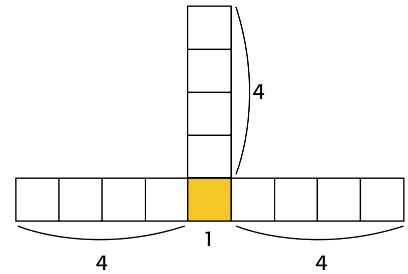


2. « Votre méthode fonctionne-t-elle pour compter le nombre de carrés de la figure 5? »

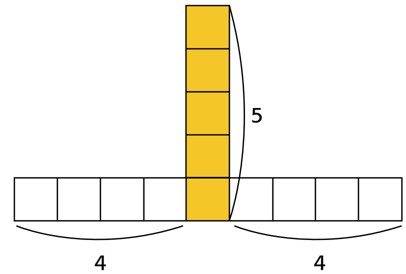
   Élève 1 : *Oui. Je vois qu’il y a 4 carrés à gauche, 4 carrés à droite, 4 carrés vers le haut et un carré au milieu en bas. En tout, ça fait 4 + 4 + 4 + 1, soit 13 carrés.*



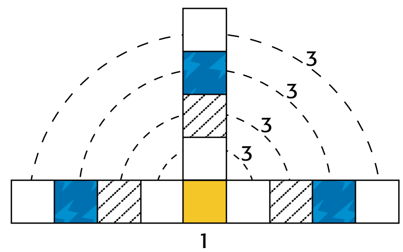
Élève 2 : *Oui. Je vois 1 carré au milieu en bas, et 3 branches de 4 carrés. En tout, ça fait 1 + (3 × 4), soit 13 carrés.*



Élève 3 : *Oui. Je vois une colonne de 5 carrés, puis 4 carrés à gauche et 4 carrés à droite. En tout, je compte 5 + 4 + 4, soit 13 carrés.*



Élève 4 : *Oui. Si je regarde la suite, elle commence par un carré et à chaque figure suivante, on ajoute un carré à 3 endroits. Dans la figure 5, on a ajouté les 3 carrés 4 fois. En tout, on a 1 + (4 × 3), soit 13 carrés.*



3. « Selon votre méthode, combien de carrés y aura-t-il dans la figure 10? »

   Élève 1 : *Il y aura 28 carrés. Il y aura 1 carré au milieu en bas, puis 9 carrés à gauche, 9 carrés à droite et 9 carrés en haut. En tout, il y aura 9 + 9 + 9 + 1, soit 28 carrés.*

– « Comment sais-tu combien il y en aura à gauche, à droite et en haut? »

   D'après les premières figures de la suite, il y a toujours 1 carré de moins que le numéro de la figure à chacun de ces trois endroits.

   Élève 2 : *C'est presque la même chose.*

– « Pourquoi dis-tu que c'est la même chose que l'autre stratégie (élève 1)? »

   Lui (élève 1) mentionne qu'il additionne 9 + 9 + 9. Moi, je dis que je multiplie, c'est-à-dire que je fais 3 × 9, car multiplier c'est comme additionner plusieurs fois une même quantité.

   Élève 3 : *Moi, j'ai aussi obtenu 28 puisqu'il y aura une colonne de 10 carrés, puis 9 carrés à gauche et 9 carrés à droite, donc 10 + 9 + 9 = 28 carrés.*

– « Comment sais-tu que c'est bien 10 carrés, puis 9 carrés deux fois? »

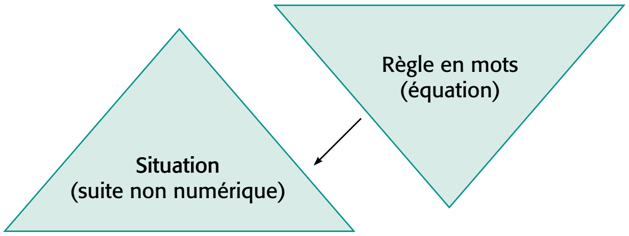
D'après les premières figures de la suite, le nombre de carrés dans la colonne est égal au numéro de la figure et le nombre de carrés à gauche et à droite est toujours 1 de moins que ce numéro.

Élève 4 : *D'après ma façon de voir les figures, il y aura 1 carré au milieu en bas. Ensuite on ajoute chaque fois 3 carrés pour passer à la figure suivante. On doit le faire pour les figures 2 à 10, soit 9 fois. En tout, on aura alors 1 + (9 × 3), ou 28 carrés.*

Note : On remarque que les calculs effectués sont similaires. Cependant, les différentes façons de voir l'organisation des carrés dans la figure et l'expression de cette organisation ont généré des règles différentes, mais équivalentes.

4. « Est-ce que votre méthode rapide de compter (votre règle) peut être utilisée pour déterminer le nombre de carrés qu'il y aura dans la figure 25? »

Lorsque les élèves expliquent en mots comment déterminer la valeur d'une figure éloignée (p. ex., la figure 10 ou 25) en relation avec le numéro d'une figure, ils utilisent leur règle pour interpréter la relation. Dans les figures *Représentations d'une relation en 5e année*, à la page 52, et *Représentations d'une relation en 6e année*, à la page 53, cette activité correspond à la flèche ci-contre.



Les élèves ayant souvent de la difficulté à identifier les quantités en jeu, l'enseignant ou l'enseignante pose ensuite des questions telles que les suivantes afin de les amener à exprimer leur règle plus clairement et à exprimer la relation à l'aide d'une équation.

5. « Comment pouvez-vous déterminer le nombre de carrés qui composent n'importe quelle figure? »

Élève 1 : *Pour déterminer le nombre de carrés qui composent n'importe quelle figure, j'additionne un nombre 3 fois, puis 1.*

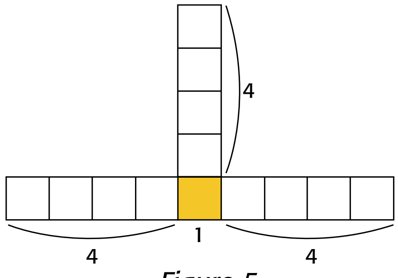


Figure 5

– « Quel est ce nombre? Comment peux-tu l'identifier ou le nommer? »
C'est toujours le numéro de la figure précédente.

– « Peux-tu alors exprimer ta règle pour déterminer le nombre de carrés qui composent n'importe quelle figure avec plus de précision? »
Pour déterminer le nombre de carrés qui composent n'importe quelle figure, j'additionne le numéro de la figure précédente 3 fois, puis 1.

– « Peux-tu maintenant exprimer cette règle à l'aide d'une équation? »
L'équation serait $c = (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) + 1$*, où* n *représente le numéro de la figure et* c*, le nombre de carrés qui la composent.*

Élève 2 : *Pour déterminer la valeur de n'importe quel terme, je multiplie par 3 et j'ajoute 1.*

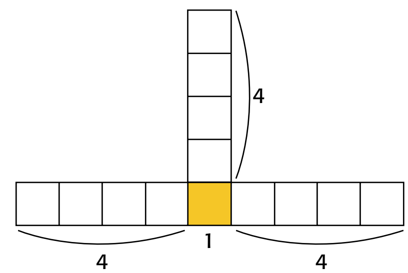


Figure 5

– « Qu'est-ce que tu multiplies par 3? Qu'est-ce que tu détermines? »
Je multiplie le numéro de la figure précédente par 3 et j'ajoute 1. Ceci me donne le nombre de carrés qui composent la figure en question.

– « Si on représente le numéro de la figure par *n*, comment peut-on représenter le numéro de la figure précédente? »

Il s'agit de $n - 1$*. Donc, l'équation est* $c = 1 + 3 \times (n - 1)$*, où* n *représente le numéro de la figure et* c*, le nombre de carrés qui la composent.*

Élève 3 : *Dans chaque figure, il y a toujours 3 branches. Une branche qui a le même nombre de carrés que le numéro de la figure et deux autres qui ont 1 carré de moins que le numéro de la figure. Pour déterminer le nombre de carrés, j'additionne ces 3 nombres.*

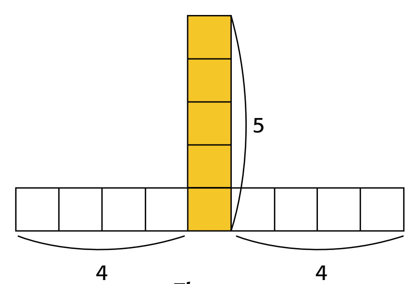


Figure 5

– « Peux-tu m'expliquer cette règle de façon plus concise? »

Pour déterminer le nombre de carrés qui composent une figure quelconque, j'additionne 3 valeurs, soit le numéro de la figure et deux fois le numéro de la figure précédente. Donc, $c = n + (n - 1) + (n - 1)$, où n représente le numéro de la figure et c, le nombre de carrés qui la composent.

Élève 4 : *Je fais 3 fois un nombre pour déterminer le nombre de carrés sur les 3 branches et j'ajoute 1 pour celui qui est au centre. En fait, je multiplie le numéro de la figure précédente par 3 et j'ajoute 1. Donc $c = (n - 1) \times 3 + 1$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de carrés qui la composent.*

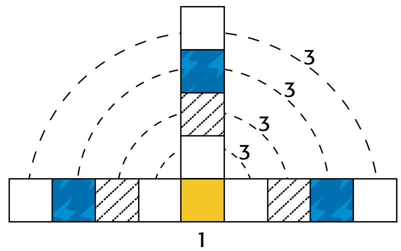
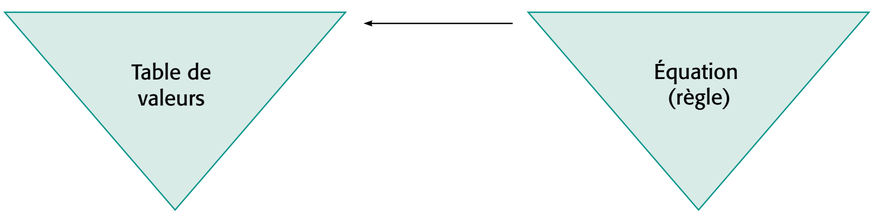


Figure 5

L'enseignant ou l'enseignante invite ensuite les élèves à vérifier la validité de leur équation. Pour valider les équations, on utilise la table de valeurs. Dans la figure *Représentations d'une relation en 6e année*, à la page 53, ce processus correspond à la flèche ci-dessous.



6. « D'après votre règle, si n prend une valeur de 4, quelle est la valeur correspondante de c? »

   Élève 1 : *Mon équation devient $c = (4 - 1) + (4 - 1) + (4 - 1) + 1$. Donc, $c = 10$.*

   Élève 2 : *Mon équation devient $c = 1 + 3 \times (4 - 1)$. Donc, $c = 10$.*

   Élève 3 : *Mon équation devient $c = 4 + (4 - 1) + (4 - 1)$. Donc, $c = 10$.*

   Élève 4 : *Mon équation devient $c = (4 - 1) \times 3 + 1$. Donc, $c = 10$.*

7. « À quoi correspond cette valeur de c dans votre équation? »

   Élève 1 : *La variable c représente le nombre de carrés qui composent la figure. Dans la suite donnée, il est vrai que la figure 4 est composée de 10 carrés.*

Attention

Il est préférable d'éviter de dire « si n est remplacé par 4 ». Puisque n est une variable qui représente les numéros des figures, elle peut prendre plusieurs valeurs. Ici, elle prend une valeur particulière, soit 4.

8. « D’après votre équation, $c = 10$ lorsque $n = 4$. À quoi cela correspond-il dans la table de valeurs? »
   Élève 2 : *Selon la table de valeurs, la figure 4 est composée de 10 carrés. Ceci correspond à ce que j’obtiens avec l’équation.*

L’exemple précédent suit une certaine démarche qui peut être résumée comme suit : demander aux élèves de prolonger la suite de figures, d’analyser la régularité et de la décrire, de construire une table de valeurs, puis de formuler une règle en mots (5^{e} année) et à l’aide d’une équation (6^{e} année). Cette démarche permet d’explorer toutes sortes de relations, même certaines qui peuvent au premier abord sembler être hors de la portée des élèves.

Exemple

Voici une suite de figures. On étudie la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent.

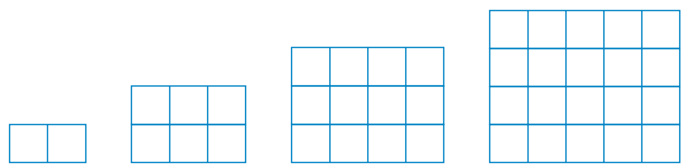


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

À première vue, cette situation peut sembler très complexe, puisque la suite correspondant au nombre de carrés qui composent chaque figure (2, 6, 12, 20,…) ne présente pas une simple régularité d’addition. Avant de mettre une telle situation de côté, il faut l’examiner de plus près. Ainsi, on peut d’abord prolonger la suite de figures, puis analyser la régularité et construire une table de valeurs comme suit.

Prolongement de la suite de figures

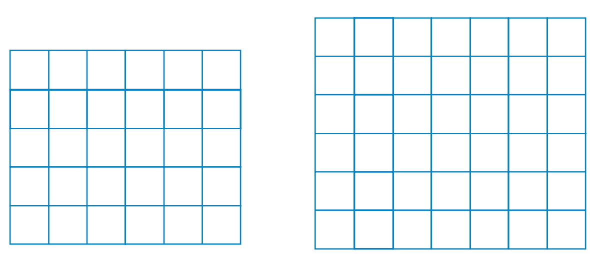


Figure 5 *Figure 6*

Analyse de la régularité

Si on examine les figures, on constate qu'il y a une régularité puisqu'on ajoute toujours une colonne et une rangée.

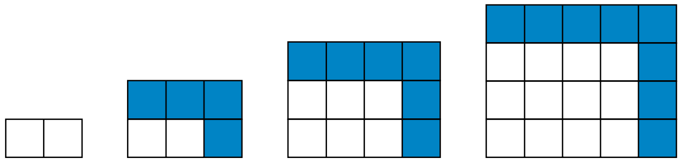


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

Le nombre de carrés augmente de 4, puis de 6, de 8, et ainsi de suite. On peut voir ces quantités dans la suite non numérique. Pour passer de la figure 1 à la figure 2, on ajoute 4 carrés, soit 1 rangée de 2 carrés et 1 colonne de 2 carrés. Pour passer de la figure 2 à la figure 3, on ajoute 6 carrés, soit 1 rangée de 3 carrés et 1 colonne de 3 carrés. Pour passer de la figure 3 à la figure 4, on ajoute 8 carrés, soit 1 rangée de 4 carrés et 1 colonne de 4 carrés.

Construction d'une table de valeurs

La table de valeurs permet de représenter cette régularité.

Numéro de la figure	1	2	3	4
Nombre de carrés	2	6	12	20

+ 4 + 6 + 8

Formulation d'une règle en mots

On peut aussi analyser chacun des termes afin de reconnaître la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent. Par exemple, les élèves peuvent expliquer ce qu'ils voient comme suit :

- La figure 2 est composée de 3 colonnes de 2 carrés.
- La figure 3 est composée de 4 colonnes de 3 carrés.
- La figure 4 est composée de 5 colonnes de 4 carrés.
- Alors la figure 10 sera composée de 11 colonnes de 10 carrés.
- Une figure est toujours composée de colonnes de carrés. Le nombre de colonnes correspond à 1 de plus que le numéro de la figure et le nombre de carrés dans chacune des colonnes correspond au numéro de la figure.

Formulation d'une règle à l'aide d'une équation

Puis, ils peuvent aussi généraliser la situation en disant que la figure n sera composée de $(n + 1)$ colonnes de n carrés. Le nombre de carrés qui composent une figure quelconque pourrait alors être exprimé au moyen d'une équation telle que $c = (n + 1) \times n$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de carrés qui la composent.

Représentation graphique

Une relation entre deux quantités en changement peut être exprimée à l'aide d'une représentation graphique. Il est important de noter que l'étude de telles représentations graphiques en modélisation et algèbre est au programme seulement à partir de la 7^{e} année. Cependant, au cycle moyen, certaines représentations graphiques sont à l'étude en traitement des données et probabilité. En effet, dans le cadre de ce domaine, les élèves doivent construire des diagrammes à bandes et des diagrammes à ligne brisée pour représenter des données quelconques. Ils doivent aussi interpréter les données présentées dans de tels diagrammes, les analyser et formuler des inférences.

L'enseignant ou l'enseignante devrait donc favoriser l'intégration des apprentissages dans ces deux domaines d'étude en présentant des situations de traitement des données qui permettent aux élèves d'utiliser leur habileté à analyser le changement et à extrapoler (voir *Diagramme,* p. 233-235*, Plan cartésien*, p. 236-237 et l'activité *Est-il plus long de sortir d'une pièce que d'y entrer?*, p. 107-108).

Énoncé 2 - Sens du symbole

Le sens du symbole permet d'interpréter diverses relations mathématiques et de représenter un raisonnement algébrique.

> *Avant même de commencer l'étude de l'algèbre, les élèves doivent apprendre à utiliser les symboles comme éléments d'un langage par lequel on exprime des idées. Ainsi, l'algèbre ne sera plus une série de règles et de procédures vides de sens.*
>
> (Lodholz, 1990, p. 29, traduction libre)

L'algèbre est utilisée pour comprendre et établir des relations mathématiques et pour communiquer des idées. À cette fin, les symboles ont une place importante en algèbre. Lorsque les élèves sont en mesure de représenter une situation, une relation ou une idée mathématique à l'aide de symboles, ils font preuve d'un niveau d'abstraction qui démontre un raisonnement algébrique.

Le sens du symbole est à l'algèbre ce que le sens du nombre est à l'arithmétique. Introduit récemment dans le discours sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Bergsten, 1999, p. 123), le sens du symbole est essentiel à la réussite en algèbre.

Selon Baruk (1995, p. 1162), un symbole est un signe qui, en vertu d'une association arbitraire « au départ », évoque ou représente autre chose que lui-même (p. ex., la colombe est un symbole de la paix). Dans l'histoire des mathématiques, les représentations symboliques d'idées et de concepts se sont imposées par convention ou par usage, souvent après de longs débats d'érudits (p. ex., $\frac{1}{4}$, π, 3^2, 15 %). En arithmétique et en algèbre, au cycle moyen, on rencontre particulièrement les symboles suivants :

- les signes d'opération (p. ex., $+$, $-$, $\times$, $\div$);
- les signes de comparaison (p. ex., $=$, $\neq$, $<$, $>$);
- les signes qui définissent une quantité (p. ex., les chiffres 0, 1, 2, 3… 9, qui permettent de représenter des nombres, les lettres telles que *n* et *x* et les formes telles que $\square$ et $\triangle$, qui représentent des inconnues ou des variables).

À mesure qu'ils vivent des expériences variées et significatives, les élèves acquièrent le sens du symbole. Le sens du symbole est un niveau de compréhension mathématique qui englobe le sens du nombre.

(Picciotto et Wah, 1993, p. 42, traduction libre)

Avoir le sens du symbole, c'est être en mesure :

- de comprendre quand et comment utiliser des symboles pour communiquer;
- de décrire des relations de façon symbolique;
- de reconnaître que les symboles peuvent faciliter la résolution de problèmes;
- de lire et d'interpréter des phrases mathématiques de façon juste et signifiante;
- de traiter le signe = comme l'expression d'une égalité entre deux quantités;
- d'interpréter la valeur des variables et des inconnues;
- de représenter les propriétés des nombres et des opérations de façon algébrique (p. ex., l'égalité $a + b = b + a$ représente la commutativité de l'addition);
- de travailler dans un contexte abstrait.

Une exposition aux symboles, tôt dans leur apprentissage, aide les élèves à développer une aisance avec ces symboles avant qu'ils n'aient à les utiliser aux cycles moyen et intermédiaire (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 37). De plus, l'exploration continue de l'utilisation de symboles dans des contextes mathématiques variés permet aux élèves de donner un sens à ces symboles (Small, 2005, p. 73).

Très tôt au cycle primaire, les élèves commencent à développer le sens du symbole (p. ex., avec la compréhension et l'écriture des chiffres de 0 à 9 et des signes d'opération). Ils apprennent à représenter des situations d'égalité de façon concrète (p. ex., à l'aide de cubes) et semi-concrète (p. ex., à l'aide d'illustrations), puis à l'aide de symboles personnels (p. ex., en utilisant un soleil pour représenter une quantité manquante).

Au cycle moyen, les élèves continuent à utiliser les symboles et à s'en approprier le sens. Notamment, ils remplacent progressivement les symboles personnels par des symboles littéraux pour représenter des inconnues ou des variables (p. ex., $13 + a = 19$). Ils utilisent aussi les symboles pour communiquer un raisonnement algébrique.

Dans ce qui suit, on verra comment les élèves, au cycle moyen, développent le sens du symbole dans le contexte de l'étude des relations d'égalité et des équations.

RELATIONS D'ÉGALITÉ

Saisir le sens d'une relation d'égalité et le sens du symbole qui la représente (le signe =) est indispensable en mathématiques et en algèbre. La relation d'égalité est une affirmation que deux expressions mathématiques représentent la même quantité. Les élèves doivent être exposés à une variété de relations d'égalité afin d'en développer une compréhension approfondie.

La relation d'égalité est au cœur des mathématiques. Elle exprime l'idée que deux expressions mathématiques sont équivalentes.

(Squalli, 2002, p. 5)

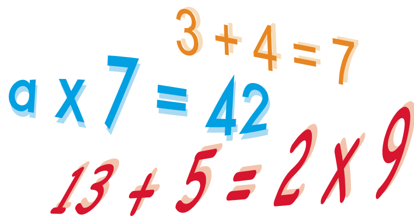
Pour bien saisir les concepts liés aux relations d'égalité, il importe d'utiliser correctement la terminologie qui s'y rattache. Le tableau suivant présente un résumé de cette terminologie.

Terminologie	Exemples
Égalité Relation entre deux quantités égales. L'égalité est représentée par le signe = (est égal à). *Notes* : • L'enseignant ou l'enseignante peut, pour des raisons pédagogiques, écrire une égalité fausse comme « 3 + 3 = 4 + 1 » et demander aux élèves de la vérifier, puis de la corriger afin de représenter une *égalité vraie*. • L'expression à la gauche du signe = est le **membre de gauche** de l'égalité et l'expression à la droite est le **membre de droite** de l'égalité.	$4 + 5 = 8 + 1$ $\boldsymbol{a} = 4 + 2$ $\underbrace{3 + 3 = 4 + 1}_{\text{égalité fausse}}$ $\underbrace{3 + 3 = 1 + 5}_{\text{égalité vraie}}$ $\underbrace{2 + 3}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{1 + 4}_{\text{membre de droite}}$

Inégalité Relation d'ordre entre deux expressions ou deux quantités. L'inégalité est représentée par divers signes dont : $<$ (est inférieur à, est plus petit que); $>$ (est supérieur à, est plus grand que).	$78 - 43 < 93 + 25$ $21 > 3 \times 5$ $2 + a < 6$
Non-égalité Relation entre deux expressions ou deux quantités qui n'ont pas la même valeur. La non-égalité est représentée par le signe $\neq$ (n'est pas égal à, n'égale pas).	$5 \neq 5 + 1$ $(3 \times 5) + 4 \neq 3 \times (5 + 4)$ $8a \neq 25$
Expression Symbole ou ensemble de symboles qui peuvent être reliés entre eux à l'aide d'un signe d'opération. Plus précisément, une expression comme $5 - 2$ est une **expression numérique** puisqu'elle contient exclusivement des nombres alors que l'expression $3 + n + 4$ est une **expression algébrique**. *Note* : Les expressions ne contiennent pas de signe $=$; on ne saurait donc pas les qualifier d'équations.	$4a$ 15 3×5 $2g + 7$
Terme Chaque élément d'une expression algébrique ou numérique qui est séparé par une addition ou une soustraction.	Dans l'expression algébrique $6a + 3$, il y a deux termes, soit $6a$ et 3.
Phrase mathématique Représentation symbolique d'une relation. Une égalité comme $2 + 3 = 1 + 4$ affirme l'égalité entre la valeur de l'expression « $2 + 3$ » et celle de l'expression « $1 + 4$ ». Lorsqu'on la lit à voix haute, on constate qu'il s'agit d'une phrase avec sujet, verbe et complément. On peut alors dire communément qu'il s'agit d'une *phrase mathématique*.	$2 + 3 = 1 + 4$ $15 + 12 < 30$ $c = 4b + 3$
Équation Énoncé mathématique qui contient une ou plusieurs inconnues ou variables et la relation d'égalité. *Note* : Pour plus de renseignements à ce sujet, voir *Équations* (p. 83-97).	$3 + n = 5$ $c = 1 + 3 \times n$ $A = c \times c$

Sens du symbole de l'égalité

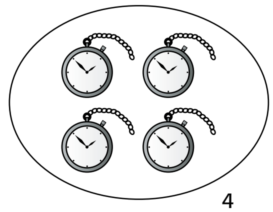
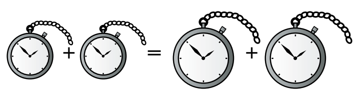
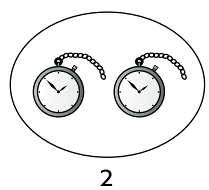
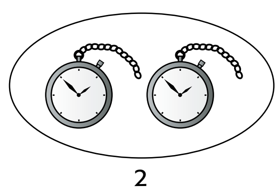
Selon Van de Walle (2007, p. 260), le signe = est l'un des symboles les plus importants à maîtriser, à l'élémentaire, dans l'étude de la numération, de l'algèbre et des mathématiques en général. Or, les élèves au cycle primaire ont souvent une conception erronée du sens du symbole de l'égalité. Plusieurs considèrent le signe = comme une incitation à effectuer une opération arithmétique plutôt que comme un indicateur d'une relation d'égalité. Cette conception étroite du symbole de l'égalité persiste chez plusieurs élèves du cycle moyen et crée un obstacle à leur apprentissage. Ces élèves ont tendance à :



- croire qu'une égalité comme $78 = 34 + 44$ devrait être écrite sous la forme $34 + 44 = 78$. Ils éprouvent alors des difficultés à traiter des équations qui ne correspondent pas à la structure $a + b = c$.
- croire qu'il doit y avoir un seul nombre à la droite du signe =. Ainsi, ils ne réussissent pas à donner un sens à des égalités telles que $8 \times 2 = 15 + 1$ ou $3 + a = 5 + 15$.
- interpréter une équation comme $4 + 5 = c + 2$ de façon erronée. Par exemple, ils calculent 4 + 5, qu'ils placent mentalement à la place de l'inconnue ($4 + 5 = 9$), puis continuent en calculant 9 + 2, ce qui donne 11; d'autres inscrivent simplement la réponse de l'opération présentée dans le membre de gauche, soit 9, et font abstraction de l'opération dans le membre de droite.
- avoir de la difficulté à comprendre une égalité comme $5 = 5$ lorsqu'elle apparaît au cours d'une résolution de problèmes puisqu'il n'y a pas d'opération à effectuer.

La fausse conception du signe = comme incitation à effectuer une opération relève d'un enseignement qui met l'accent sur les réponses et sur des phrases mathématiques de la forme $a + b = ?$. L'utilisation d'une calculatrice peut aussi renforcer l'idée que le signe = veut dire « trouve la réponse », car la calculatrice affiche la réponse quand on appuie sur la touche =. Il est essentiel que les élèves donnent au signe = le sens d'*une relation d'égalité entre deux quantités*. Il est donc important, dans l'enseignement, d'utiliser le signe = en misant sur des relations d'égalité et non sur le calcul à effectuer. Il faut en plus utiliser le signe correctement. Le tableau suivant présente quelques précisions quant à l'utilisation du signe =.

Représentations erronées	Pourquoi	Représentations à favoriser
Représenter une suite successive de calculs. **Exemple** Pour calculer $8 \times 3 + 6 - 3$, écrire $8 \times 3 = 24 + 6 = 30 - 3 = 27$	Il est tentant d'utiliser des signes = pour représenter une suite de calculs, mais cette écriture présente **plusieurs égalités fausses**, car elle affirme que : $8 \times 3 = 24 + 6$ $8 \times 3 = 30 - 3$ $8 \times 3 = 27$ $24 + 6 = 30 - 3$ $24 + 6 = 27$ et $30 - 3 = 27$ Or, seule la dernière égalité est vraie.	Les phrases mathématiques suivantes seraient appropriées pour représenter cette suite de calculs : $8 \times 3 = 24$ $24 + 6 = 30$ $30 - 3 = 27$ ——— $8 \times 3 + 6 - 3 = 27$
Utiliser le signe = dans une situation où un des membres de l'égalité ne représente pas une quantité. **Exemple** Jean = 9 Maude = 8	Jean et Maude ne sont pas des nombres. Jean a peut-être 9 ans ou il a peut être compté 9 buts au hockey, mais on devrait éviter d'utiliser le signe = pour représenter cette correspondance. Le signe = devrait être réservé uniquement pour démontrer une relation d'égalité entre des nombres ou des expressions qui représentent des quantités.	Les représentations suivantes seraient appropriées pour représenter cette situation : Jean a 9 ans. Maude a 8 ans. ——— Jean : 9 ans Maude : 8 ans ——— $j = 9$ *et* $m = 8$, où *j* représente l'âge de Jean et *m* représente l'âge de Maude.

Représentations erronées	Pourquoi	Représentations à favoriser
Représenter le nombre d’objets dans une collection en utilisant une représentation semi-concrète d’un côté du signe = et un nombre de l’autre côté. **Exemple** 	Le membre de gauche de l’égalité représente des montres, tandis que le membre de droite représente la quantité 4. Le signe = doit être réservé aux représentations symboliques. Dans l’exemple, il y a un mélange de représentations semi-concrètes et symboliques.	Spécifier oralement qu’il y a 4 montres. Une représentation appropriée serait : 
Utiliser le signe = ou un signe d’opération (p. ex., le signe +) entre des représentations semi-concrètes. **Exemple** 	Comme dans l’exemple précédent, le signe = doit être réservé aux représentations symboliques, c’est-à-dire aux expressions numériques ou algébriques.	Spécifier oralement qu’il y a autant de petites montres que de grosses montres. Les représentations suivantes seraient appropriées pour représenter cette situation : 2 = 2  

Sens d’une relation d’égalité

Les élèves commencent à acquérir le sens d’une relation d’égalité au cycle primaire, mais ce sens doit être approfondi et consolidé au cycle moyen. Ils doivent le posséder pour réussir le travail avec les équations.

Pour aider les élèves à développer une compréhension du concept d’égalité, l’enseignant ou l’enseignante peut :

- demander aux élèves de trouver différentes expressions numériques qui ont une valeur particulière (p. ex., 7 + 3 et 13 – 3 ont une valeur de 10). À remarquer que le signe = n'est pas utilisé.
- animer une discussion au sujet du sens du signe = en invitant les élèves à être précis. Par exemple, étant donné l'égalité 232 + 643 = 643 + 232, poser des questions telles que :

– « Que veut dire le signe =? »

– « Est-ce possible de vérifier l'égalité sans faire de calculs? Comment? »

– « Comment savez-vous que cette égalité est vraie? »

– « Qu'y a-t-il de semblable dans chacune des expressions de chaque côté du signe =? »

- présenter et explorer régulièrement des égalités qui ont diverses formes et demander aux élèves si elles sont vraies. Voici quelques exemples :

  8 = 5 + 3   12 – 5 = 9   72 + 41 = 71 + 42   8 = 8
- utiliser différentes représentations (p. ex., balance à plateaux, matériel de base dix) pour confirmer ou vérifier l'égalité.
- demander aux élèves de créer ou d'écrire des égalités et de vérifier si elles sont vraies.
- demander aux élèves de construire des égalités simples, qui contiennent une seule opération dans chaque membre (p. ex., 3 × 6 = 2 × 9), pour cheminer vers des égalités qui contiennent deux ou plusieurs opérations dans chaque membre (p. ex., 5 + 3 – 1 = 3 + 6 – 2). Ce genre d'activité permet aux élèves de justifier les égalités en démontrant que les expressions de chaque côté du signe = ont la même valeur.

Note : Il est possible que des élèves construisent des phrases mathématiques comme 24 = 12 × 2 = 6 × 4 = 3 × 8. Même si ces phrases sont vraies, il est préférable d'encourager les élèves à utiliser un seul signe = par phrase. Cela met l'accent sur l'égalité entre deux quantités à la fois et permet d'éviter qu'ils utilisent subséquemment le signe = de façon erronée pour représenter une suite de calcul (voir p. 72). Ainsi, il est préférable d'écrire :

24 = 12 × 2

24 = 6 × 4

6 × 4 = 3 × 8

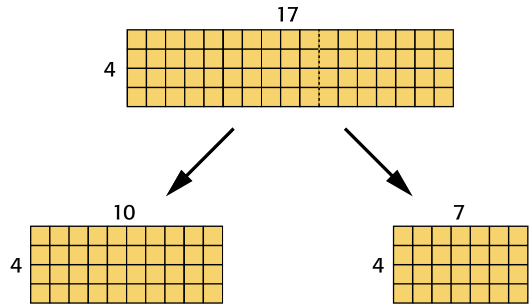
- encourager les élèves à exprimer les relations d'une autre façon. La lecture de l'égalité, de gauche à droite, est bien enracinée chez les élèves. Il faut varier la façon d'exprimer la relation d'égalité. L'égalité $3 + 5 = 8$ peut être lue de diverses façons. Par exemple, « 8 représente la même quantité que 3 + 5 » ou « 8 est égal à 3 + 5 ».

Aux cycles préparatoire et primaire, les élèves explorent des situations d'égalité et développent diverses habiletés qui s'y rattachent. Ces habiletés sont présentées et décrites dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année, Modélisation et algèbre*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008b, p. 39-48). Elles sont reprises dans ce qui suit avec des exemples de situations pour le cycle moyen que l'enseignant ou l'enseignante peut utiliser pour aider les élèves à les consolider.

Habileté à reconnaître une situation d'égalité : Reconnaître une situation d'égalité, c'est reconnaître que deux quantités ont la même valeur. L'habileté à reconnaître une situation d'égalité se développe par l'utilisation de matériel concret et semi-concret et de différentes stratégies avant de travailler avec des égalités écrites de façon symbolique. Ce n'est d'ailleurs qu'après avoir utilisé diverses représentations d'égalité à plusieurs reprises, dans le même but, que les élèves sont prêts à utiliser les égalités pour représenter certaines propriétés des nombres et des opérations.

Exemple

L'exploration de la propriété de distributivité de la multiplication permet aux élèves de l'exprimer de façon symbolique et de l'utiliser pour multiplier certains nombres. La compréhension de la propriété peut être développée en représentant la situation d'égalité concrètement ou semi-concrètement. Pour multiplier 4 par 17 (4×17), les élèves peuvent utiliser une disposition rectangulaire et constater qu'il s'agit de la somme de 4×10 et de 4×7.



Les élèves ont besoin de discuter de ce qui est égal/inégal, pareil/différent, plus que/moins que, en équilibre/en déséquilibre. C'est par le dialogue authentique que les élèves construisent la signification du concept d'égalité.

(Taylor-Cox, 2003, p. 17, traduction libre)

Ils apprennent à l'écrire sous la forme $4 \times 17 = (4 \times 10) + (4 \times 7)$. Ils peuvent ensuite transférer cette compréhension à d'autres situations semblables telles que $20 \times 17 = (20 \times 10) + (20 \times 7)$.

Habileté à expliquer une situation d'égalité : Expliquer une situation d'égalité, c'est la justifier. Le tableau ci-après montre les réponses d'élèves à qui l'on a demandé si l'égalité $8 + (9 + 5) = (8 + 9) + 5$ était vraie.

Représentation	Réponse d'élève
À l'aide de matériel concret ou semi-concret	Avec des cubes emboîtables, une élève démontre la situation d'égalité comme suit : 
À l'aide de mots	« Si j'additionne 9 et 5 et que j'ajoute 8 ensuite, la quantité sera la même que si j'additionne 8 et 9 et que j'ajoute 5 ensuite, puisque je n'ajoute rien et je n'enlève rien. »
À l'aide d'une propriété des opérations	« Puisqu'on additionne les mêmes nombres, l'ordre dans lequel les nombres sont additionnés ne modifie jamais la quantité. »

Le sens de la relation d'égalité se développe par un transfert du concret vers la représentation symbolique et par la compréhension de l'équilibre que représente une égalité. Par exemple, les élèves doivent déterminer si l'égalité $38 + 56 + 42 = 56 + 37 + 42$ est vraie ou fausse en utilisant un raisonnement basé sur la relation d'égalité. Ils peuvent utiliser la stratégie *comparer des termes* (voir p. 201-202) qui consiste à comparer les deux membres de l'égalité et constater qu'ils contiennent tous les deux 42 et 56. Il suffit de comparer les termes qui restent, soit 38 et 37, pour conclure que les deux membres de l'égalité ne représentent pas la même quantité et que l'égalité est fausse.

$$\underline{38} + \mathbf{56} + 42 = \mathbf{56} + \underline{37}\ 42$$

Ce raisonnement peut s'apparenter à la stratégie *modifier la phrase mathématique* (voir p. 205-206) qui consiste à maintenir l'égalité en enlevant un même nombre de chaque côté de l'égalité ou à annuler des termes.

$$38 + 56 + 42 = 56 + 37 + 42$$

$$38 + 56 + 42 - 42 = 56 + 37 + 42 - 42$$ (On annule 42 de chaque membre en soustrayant.)

$$38 + 56 = 56 + 37$$

$$38 + 56 - 56 = 56 - 56 + 37$$ (On annule 56 de chaque membre en soustrayant.)

$$38 = 37$$ (Faux)

Donc, l'égalité $38 + 56 + 42 = 56 + 37 + 42$ est fausse.

Habileté à créer une situation d'égalité : Créer une situation d'égalité, c'est représenter une telle situation sous diverses formes. Il est important, au début, de proposer aux élèves de représenter des situations d'égalité au moyen de matériel concret ou semi-concret. Le sens du symbole de l'égalité peut alors être mieux développé.

Exemple

Lors d'une collecte de fonds, Jacqueline a amassé 5 $ la 1^{re} journée, 6 $ la 2^{e} journée et 5 $ la 3^{e} journée. Quant à Samuel, il a amassé 4 $ la 1^{re} journée et 4 $ à chacune des trois journées suivantes.

Demander aux élèves de représenter cette situation afin de vérifier s'il s'agit d'une situation d'égalité.

La situation peut être représentée à l'aide d'un dessin d'une balance (Figure 1), ou de façon symbolique (Figure 2).

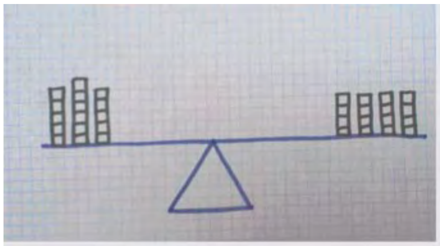


Figure 1

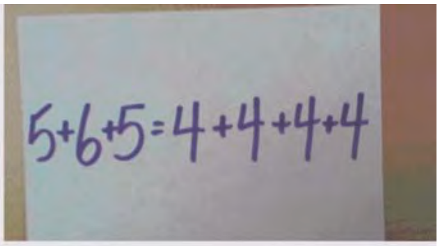
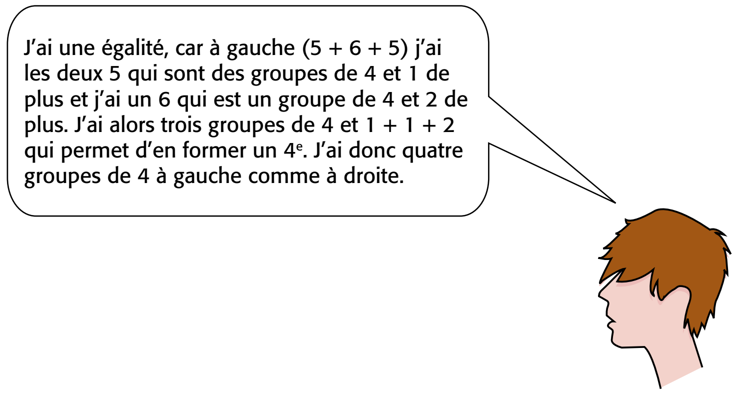


Figure 2

On peut aussi profiter de l'occasion pour demander aux élèves de justifier que l'égalité représentée par la phrase mathématique est vraie.



Plusieurs situations authentiques mettent l'accent sur la non-égalité. Nous le savons, les enfants déclarent souvent : « Elle en a plus que moi! J'en ai pas assez, ce n'est pas juste! » Au lieu de s'attarder seulement aux implications sociales de leurs commentaires, envisageons avec eux, cette réalité d'un point de vue mathématique en demandant combien serait nécessaire pour que les quantités soient pareilles ou que la situation soit juste. En concrétisant ainsi le concept d'égalité, nous intégrons la pensée algébrique dans le quotidien de l'enfant.

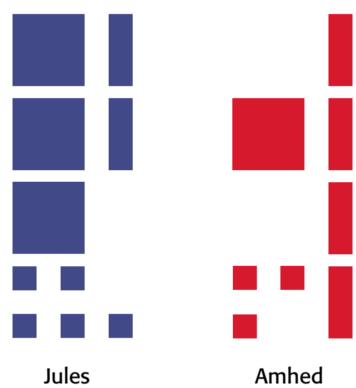
(Taylor-Cox, 2003, p. 19, traduction libre)

Habileté à rétablir une situation d'égalité : Rétablir une situation d'égalité, c'est transformer une non-égalité de façon à obtenir une égalité. Pour développer le raisonnement algébrique, il est important que les élèves aient l'occasion de rétablir des situations d'égalité de différentes façons. Cette habileté exige un niveau d'abstraction plus élevé que l'habileté à créer une égalité. Voici quelques exemples où les élèves rétablissent l'égalité de façon concrète, semi-concrète ou symbolique.

Exemple 1 : Rétablir une égalité de façon concrète ou semi-concrète

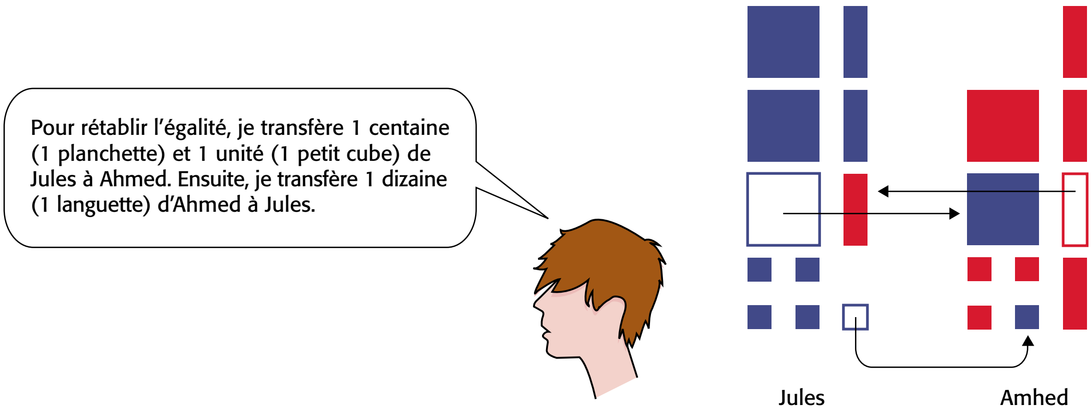
> *Jules reçoit un sac de 300 billes. Lors d'une fête, il reçoit 20 billes de Sébastien et 5 billes de Mohammed. Quant à Ahmed, il reçoit un sac de 100 billes de sa mère, 40 billes de sa tante et 3 billes de sa sœur. Que peuvent-ils faire pour avoir la même quantité de billes?*

Les élèves peuvent représenter la situation à l'aide de matériel de base dix. Il est important, au départ, qu'ils reconnaissent et expliquent la non-égalité ($300 + 20 + 5 \neq 100 + 40 + 3$, car Jules a 325 billes, tandis qu'Ahmed en a 143). Ils pourront ensuite rétablir l'égalité.



Voici deux stratégies que les élèves pourraient utiliser pour rétablir l'égalité.

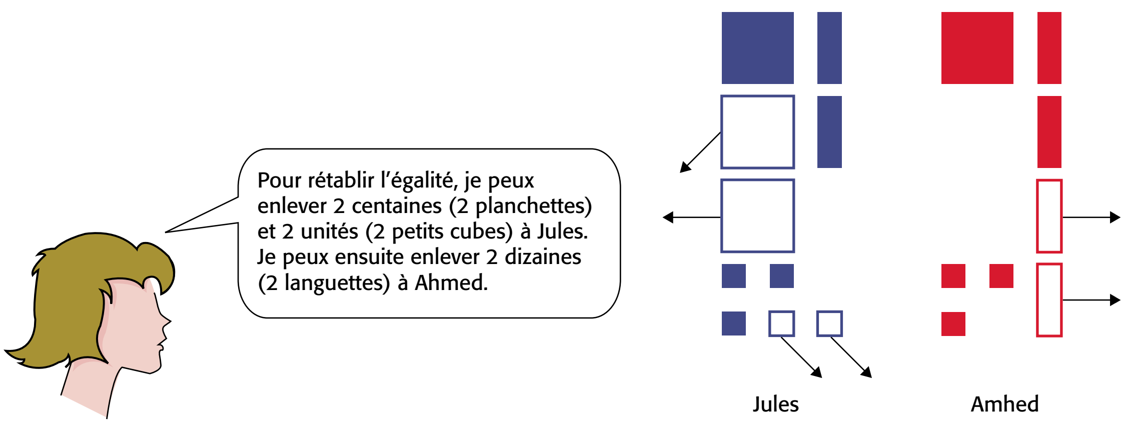
1re stratégie



Par la suite, l'élève pourrait représenter symboliquement la situation par l'égalité suivante :

$325 - 101 + 10 = 143 + 101 - 10$

2e stratégie



Par la suite, l'élève pourrait représenter la situation symboliquement par l'égalité suivante :

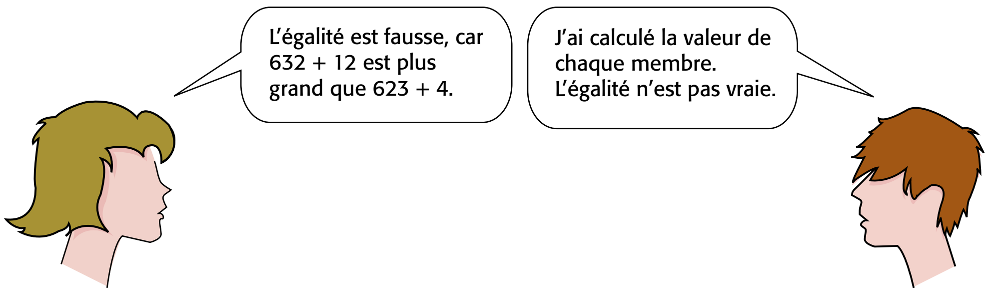
$325 - 202 = 143 - 20$

Exemple 2 : Rétablir une égalité de façon symbolique

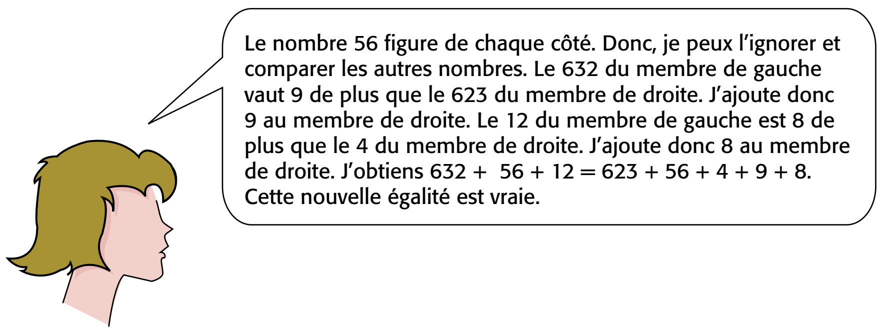
Présenter l'égalité (fausse) 632 + 56 + 12 = 623 + 56 + 4 et poser les questions suivantes :

– « Est-ce que l'égalité suivante est vraie? »

– « Comment le savez-vous? »

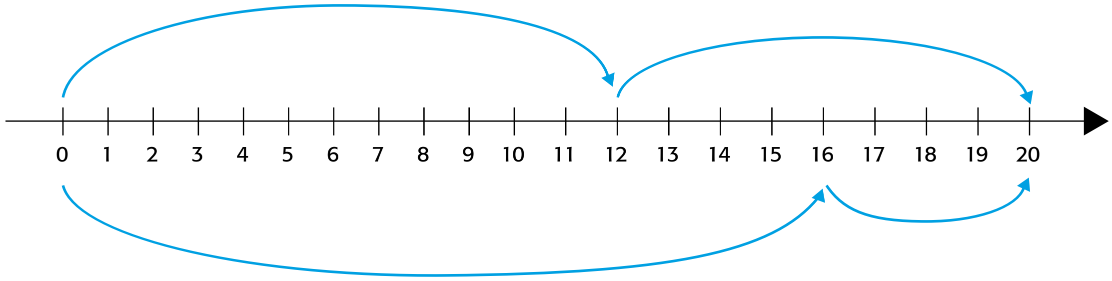


– « Que pourriez-vous faire pour rétablir l'égalité? »



Habileté à maintenir une situation d'égalité : Maintenir une situation d'égalité, c'est opérer sur les quantités tout en s'assurant que l'égalité est conservée. En explorant et en manipulant, les élèves constatent que lorsqu'on ajoute une quantité à un membre d'une égalité, la même quantité doit nécessairement être ajoutée à l'autre membre pour maintenir l'égalité (p. ex., en travaillant avec la balance à plateaux, les élèves du cycle primaire peuvent facilement voir qu'en situation d'égalité, si on ajoute une quantité sur un côté de la balance, on doit aussi le faire de l'autre côté pour maintenir l'équilibre).

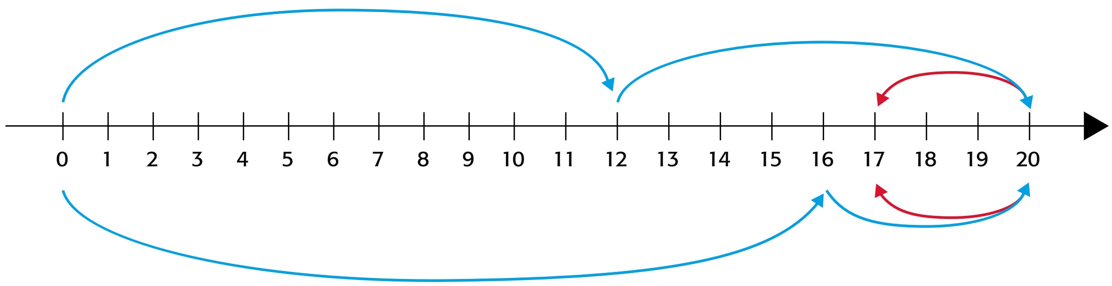
Au cycle moyen, les élèves consolident cette habileté en représentant des situations de façon semi-concrète ou symbolique. Par exemple, l'égalité 12 + 8 = 16 + 4 est représentée sur une droite numérique (Figure 1).



12 + 8 = 16 + 4

Figure 1

La figure 2 montre que l'égalité est maintenue si on soustrait 3 de chaque membre.



12 + 8 - 3 = 16 + 4 - 3

Figure 2

L'habileté à maintenir une égalité est très importante pour le développement de la pensée algébrique. Elle constitue le fondement de l'une des stratégies utilisées pour résoudre une équation (voir p. 206-209). De plus, elle exige le recours à une pensée abstraite. En effet, si on compare la valeur des membres de gauche et de droite, avant et après, on constate qu'elle a changé; elle est passée de 20 à 17.

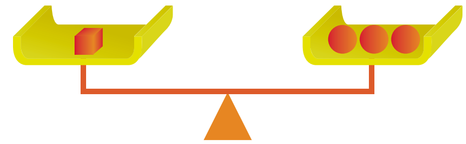
$$\underbrace{12 + 8}_{20} = \underbrace{16 + 4}_{20} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{12 + 8 - 3}_{17} = \underbrace{16 + 4 - 3}_{17}$$

Ce changement peut dérouter certains élèves, puisque la valeur initiale des deux membres, soit 20, n'est pas égale à la nouvelle valeur des deux membres, soit 17. Ces derniers doivent comprendre que ce qui nous intéresse en algèbre, c'est de maintenir l'égalité entre les deux membres, même si la valeur des membres change.

Une exploration similaire peut être effectuée avec des situations d'égalité impliquant la multiplication ou la division.

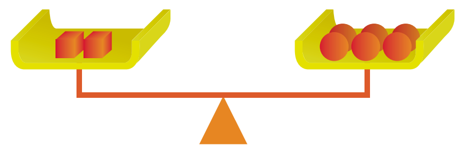
Exemple

Présenter la balance 1 en indiquant que 1 cube et 3 sphères s'équilibrent.



Balance 1

Présenter la balance 2 et indiquer aux élèves qu'on cherche à déterminer si l'équilibre représenté est vrai.

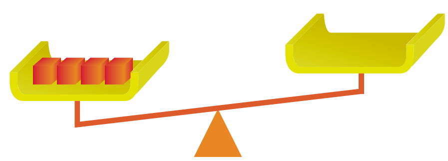


Balance 2

Demander aux élèves de comparer les deux balances en posant des questions telles que :

- « Que remarquez-vous? » (*Sur la deuxième balance, il y a deux fois plus de cubes et deux fois plus de sphères que sur la première.*)
- « La deuxième balance est-elle en équilibre? » (*Oui. D'après la première balance, on sait que 1 cube et 3 sphères* s'équilibrent. *Donc, le cube et les 3 sphères ajoutés sur la deuxième balance doivent aussi s'équilibrer.*)

Dessiner la balance 3 qui contient 4 cubes sur le plateau de gauche et demander aux élèves de déterminer le nombre de sphères qu'il doit y avoir sur le plateau de droite pour que la balance soit en équilibre. (*12 sphères*)



Balance 3

Poser la question suivante :

- « Qu'est-ce qui vous a permis de déterminer le nombre de sphères? (*J'ai vu qu'on mettait deux fois plus de cubes que sur la balance 2, alors j'ai mis deux fois plus de sphères; il faut 3 sphères pour maintenir l'équilibrer avec 1 cube et puisqu'il y a 4 cubes, il faut quatre fois plus de sphères, soit 12.*)

Pour une situation d'égalité impliquant la division, il s'agit d'effectuer cette exploration en partant de la balance 2 ou 3 pour aller vers la balance 1. Une telle exploration renforce aussi le fait que la division est l'opération inverse de la multiplication.

Apprendre à maintenir une égalité est tout aussi important que d'apprendre à la rétablir. C'est par l'exploration concrète et fréquente de ces deux habiletés que les élèves consolident leur sens de l'égalité, leur sens du symbole et leur sens de l'algèbre. Ultérieurement, ils seront plus aptes à comprendre les manipulations d'expressions algébriques au lieu d'appliquer mécaniquement des procédures qui paraissent vides de sens.

ÉQUATIONS

> *La notion de l'équation en tant qu'expression d'équilibre est un concept essentiel que tous les élèves doivent maîtriser avant même de pouvoir résoudre une équation.*
>
> (Small, 2005, p. 64, traduction libre)

L'équation est sans doute l'outil le plus utile en algèbre. Or, l'équation est plus complexe qu'on ne le pense, ce qui fait qu'elle est souvent mal comprise. Par exemple, Wagner (1981, p. 107-118) a présenté les équations $7 \times W + 22 = 109$ et $7 \times N + 22 = 109$ à des élèves âgés de 10 à 18 ans et leur a demandé laquelle des inconnues, W ou N, avait la plus grande valeur. Moins de la moitié des élèves ont répondu correctement que les deux inconnues avaient la même valeur.

Les équations sont des égalités qui comportent une ou des valeurs indéterminées, soit une inconnue (p. ex., $a + 135 = 178$) ou des variables (p. ex., $m = 3 \times b + 4$). L'habileté à représenter une relation d'égalité de façon symbolique à l'aide d'une équation requiert une bonne compréhension de la relation, un bon sens du symbole et l'utilisation de la pensée algébrique.

Les premières expériences des élèves avec les équations proviennent de situations-problèmes. De fait, ils sont amenés à traduire des situations-problèmes en les représentant de façon symbolique par une équation comme dans l'exemple suivant.

Exemple

> *Pierre et Misha préparent un sac de billes qu'ils veulent offrir à leur ami. Pierre dépose 40 billes dans le sac. Misha en dépose aussi. Il y a maintenant 76 billes dans le sac. Combien de billes Misha a-t-il déposées dans le sac?*

Lorsque les élèves saisissent bien cette situation, ils peuvent la représenter par l'équation $40 + m = 76$, où m représente le nombre de billes déposées par Misha.

Il importe de reconnaître qu'il n'est pas toujours facile pour les élèves de représenter une relation d'égalité à l'aide d'une équation. Par exemple, il leur est facile de comprendre la situation selon laquelle Pierre a 4 billes de plus que Misha. Cependant, ils peuvent avoir plus de difficulté à la représenter à l'aide d'une équation. Ils auront d'abord besoin de travailler avec du matériel concret avant de proposer l'équation $p = 4 + m$, où p représente le nombre de billes de Pierre et m, le nombre de billes de Misha.

La situation d'apprentissage *Quel Problème!* (p. 123-143) porte sur la représentation de situations-problèmes à l'aide d'équations. L'utilisation de situations-problèmes permet aux élèves de développer un sens de l'équation et de saisir d'où les équations proviennent. C'est alors qu'ils sont en mesure d'explorer des équations sans contexte.

Dans ce qui suit, il sera question des concepts d'inconnues et de variables, ainsi que des divers types d'équations.

Inconnues et variables

> *Les variables constituent un excellent outil pour exprimer les régularités observées en mathématiques. Elles permettent d'utiliser les symboles mathématiques pour aider à réfléchir et à comprendre certaines idées mathématiques, de la même façon qu'on se sert d'objets concrets ou de dessins.*

(Van de Walle et Lovin, 2008, p. 326)

Saisir le sens du symbole qui représente une inconnue ou une variable exige un haut niveau d'abstraction. De plus, apprendre à déterminer les valeurs manquantes dans des équations constitue une étape importante dans le développement de la pensée algébrique.

Même si les inconnues et les variables représentent toutes deux des valeurs manquantes dans une équation, ce ne sont pas des synonymes. Le tableau suivant apporte quelques précisions à ce sujet.

Inconnue	Variable
Terme non connu dans une équation[2]. L'inconnue représente une quantité particulière dont la valeur n'est pas encore déterminée. • On retrouve une *inconnue* dans une **équation à résoudre** (voir p. 90-92) qui traduit une relation d'égalité. **Exemple** Dans l'équation $10 = 17 - \square$, $\square$ est une inconnue dont la valeur n'est pas encore déterminée. On pourra déterminer que $\square = 7$. *Notes* : 1. Par convention, si le même symbole est utilisé plus d'une fois dans une équation ou une situation, la valeur qu'il représente est la même. Par exemple, dans l'équation $b + b + b = 18$, on peut conclure que $b = 6$, puisque $6 + 6 + 6 = 18$. 2. Au cycle intermédiaire, il existe des équations dont *l'inconnue* peut avoir plus d'une valeur. Par exemple, dans l'équation $x^2 = 36$, l'inconnue peut avoir une valeur de 6 ou de -6.	Terme indéterminé dans une équation ou une inéquation qui peut être remplacé par plusieurs valeurs[3]. • On retrouve des *variables* dans une **équation qui représente une relation entre deux quantités changeantes** (voir p. 93-94). **Exemple** L'équation $p = 2n + 1$ représente la relation entre le numéro n de la figure dans une suite non numérique et le nombre p de points qui la composent. *Note* : Dans l'exemple ci-dessus, la valeur de la variable n (variable indépendante) influe sur la valeur de la variable p (variable dépendante). Pour plus de renseignements au sujet des *variables dépendantes* et des *variables indépendantes*, consulter le module Modélisation et algèbre, 4e à la 6e, sur le site atelier.on.ca. • On retrouve des *variables* dans une **formule** (voir p. 94-95). **Exemple** Aire d'un rectangle ou d'un parallélogramme : $A = b \times h$ • On retrouve des *variables* dans une **équation qui généralise une relation d'égalité** (voir p. 95). **Exemple** $a \times b = b \times a$ (commutativité de la multiplication) *Note* : Dans une équation, il est possible que deux variables différentes prennent la même valeur en même temps. Par exemple, dans l'équation $a + b = 6$, si a prend la valeur de 3, b aura aussi la valeur 3.

atelier.on.ca

2. Ontario, Ministère de l'Éducation, 2005, *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques, Révisé*, Toronto, le Ministère, p. 96.
3. *Ibid.*, p. 101.

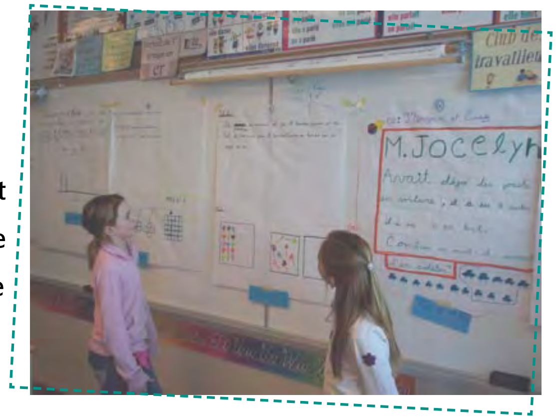
La lettre qui représente une inconnue ou une variable est habituellement en italique.

L'acquisition du sens du symbole et de l'aisance à manipuler les symboles se fait de façon graduelle. Les élèves doivent d'abord apprendre à décrire les relations à l'aide de divers modes de représentations. Ils doivent utiliser des représentations concrètes et semi-concrètes tout au long de leur apprentissage. Driscoll (1999, p. 123) démontre que pour aider les élèves à faire la transition vers les représentations symboliques à l'aide de lettres, il est profitable d'utiliser des dessins ou des formes pour représenter des quantités avant d'utiliser des lettres comme inconnues ou variables.

Ainsi, au cycle primaire, l'inconnue est d'abord représentée par une case ou par un trait à remplir (p. ex., $4 + \_\_\_ = 6$). Les élèves cheminent ensuite vers l'utilisation d'un dessin (p. ex., $\heartsuit + 5 = 12$) ou d'une forme géométrique (p. ex., $4 + 3 = \Diamond + 5$) pour représenter une quantité manquante dans une équation. L'utilisation de la lettre comme inconnue devrait se faire au cours du cycle moyen, parce que les élèves doivent être en mesure de faire la différence entre son rôle dans le langage écrit et son rôle en algèbre. La transition ne se fait pas facilement et les élèves doivent se familiariser progressivement avec l'usage des symboles littéraux dans une équation. La façon dont l'enseignant ou l'enseignante présente ces symboles influe sur la perception que les élèves ont de ceux-ci. Selon Kieran et Chalouh (1999, p. 62), l'utilisation de symboles littéraux pour représenter une quantité doit être un sujet de discussion en classe. Diverses recherches (Demonty et Vlassis, 1999, p. 16-27) ont recensé des méprises d'élèves par rapport à l'utilisation de ces symboles dans les équations. En voici quelques exemples :

- Les élèves pensent que $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$…
- Les élèves pensent, par exemple, que la lettre *a* doit représenter une valeur inférieure à la lettre *c* puisqu'elle est placée avant dans l'alphabet.
- Les élèves pensent que si une lettre prend une valeur quelconque dans une équation, alors elle prendra cette même valeur dans d'autres équations.
- Les élèves ignorent la lettre (p. ex., l'expression algébrique $2p + 3p$ est réduite à 5 en ignorant le *p*).
- Les élèves pensent que la lettre représente l'abréviation d'un nom commun ou d'une unité de mesure (p. ex., dans l'expression algébrique $3b + 6b$, les élèves pensent que le *b* peut représenter « biscuits »). Il est à noter qu'au cycle primaire, les élèves peuvent utiliser une lettre comme étiquette dans une phrase mathématique (p. ex., 3 b + 6 b = 9 b), mais cette lettre ne représente pas une valeur.

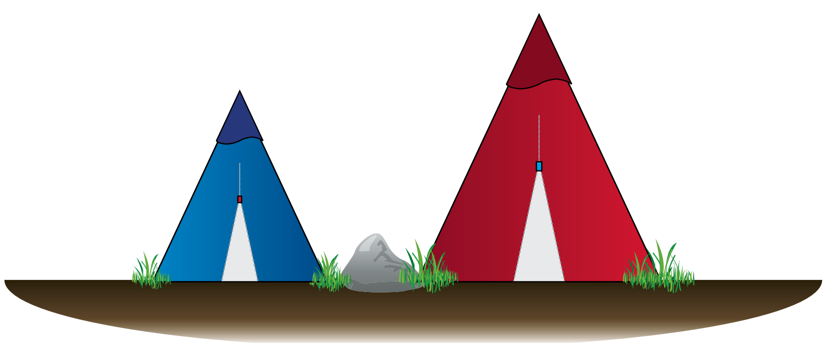
Les élèves peuvent aussi confondre la lettre *x* et le signe de multiplication ×. Dans leur parcours en mathématiques, les élèves apprennent qu'afin de représenter une multiplication, le signe × peut être remplacé par un point (p. ex., $3 \cdot 5 = 15$, $a \cdot b = 32$) ou même omis [p. ex., $3 \times (2 + 4) = 3(2 + 4)$, $5 \times a = 5a$]. Il est donc préférable de ne pas utiliser la lettre *x* comme inconnue ou variable au cycle moyen. On utilise plutôt des lettres qui sont reliées au contexte (p. ex., la lettre *n* pour représenter le numéro d'une figure ou le nombre d'objets). Les élèves doivent comprendre que la lettre représente une quantité et non un objet ou une personne (p. ex., la lettre *m* représente l'âge de Marie et non Marie elle-même).



À la fin du cycle primaire, les élèves ont utilisé le concept d'inconnue dans une équation. Au cycle moyen, ils doivent consolider ce concept (voir, par exemple, les situations d'apprentissage *Quel problème?*, p. 123-143 et *Énigmes de nombres*, p. 173-195). Ils doivent aussi apprendre à utiliser les variables dans le cadre de situations-problèmes (Exemple 1) et dans l'étude de relations (Exemple 2).

Exemple 1 : Situation-problème

À la garderie familiale de Josy, il y a 10 enfants. Dans l'aire de jeu, on retrouve deux tentes, une petite et une grande. Démontre toutes les façons de répartir les enfants dans les deux tentes.



Les élèves peuvent représenter les répartitions possibles à l’aide d’une table de valeurs. Par exemple :

Nombre d’enfants dans la petite tente (▯)	**Nombre d’enfants dans la grande tente (□)**
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

Les élèves peuvent ensuite utiliser les symboles ▯ et □ pour représenter respectivement le nombre d’élèves dans la petite tente et le nombre d’élèves dans la grande tente et représenter la relation entre ces deux quantités par l’équation ▯ + □ = 10.

Exemple 2 : Étude de relations

Voici une suite de figures. On s’intéresse à la relation entre le numéro de la figure et le nombre de cure-dents qui la composent.

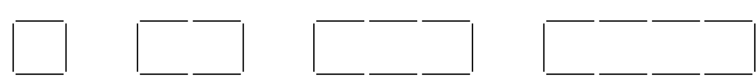


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Les élèves peuvent représenter la relation par la table de valeurs suivante :

Numéro de la figure	1	2	3	4
Nombre de cure-dents	4	6	8	10

En 6^e année, ils peuvent représenter la relation par l'équation $c = 2n + 2$, où n représente le numéro de la figure et c, le nombre de cure-dents qui la composent.

Différents types d'équations

L'équation est une façon symbolique de représenter une relation qui peut être difficile à comprendre, entre autres, parce qu'il existe divers types d'équations dont la fonction varie selon la situation. Au cycle moyen, les élèves rencontrent les quatre types d'équations suivants :

- **Équation à résoudre** : Une équation comme $2 + n = 14$ doit être résolue. Elle provient généralement d'une situation-problème et décrit une relation d'égalité. La lettre n représente une valeur inconnue qui doit être déterminée.
- **Équation qui représente une relation entre deux quantités changeantes** : Une équation comme $c = 2n + 3$ sert à exprimer une relation, par exemple la relation entre le numéro d'une figure (n) dans une suite non numérique et le nombre de cure-dents (c) qui la composent. Les lettres n et c sont des variables, puisqu'elles peuvent prendre diverses valeurs.
- **Équation qui sert de formule** : Pour calculer l'aire (A) d'un carré, on peut utiliser l'équation $A = c \times c$. On appelle une telle équation une formule, puisqu'on l'utilise pour calculer l'aire d'un carré ayant des côtés de longueur c. On ne résout pas une telle équation.
- **Équation qui généralise une situation d'égalité** : On peut généraliser la relation d'égalité entre l'addition de deux nombres identiques quelconques et la multiplication de ce nombre par 2 (p. ex., $4 + 4 = 2 \times 4$) par l'équation $n + n = 2 \times n$. On ne résout pas une telle équation et il ne s'agit pas d'une formule. De plus, elle ne représente pas une relation entre deux quantités changeantes.

Chacun de ces types d'équations est examiné plus en détail dans ce qui suit.

Note : Les précisions quant aux divers types d'équations sont données afin de reconnaître que les concepts algébriques ne sont pas rencontrés et traités exclusivement dans le cadre d'activités en modélisation et algèbre. Par exemple, on retrouve régulièrement des équations qui servent de formule en mesure. Cependant, au cycle moyen, les élèves n'ont pas nécessairement à faire la distinction entre ces types d'équations.

Équation à résoudre : Les élèves prennent connaissance de ce type d'équations au cycle primaire, généralement dans un contexte de modélisation et algèbre, ainsi que dans un contexte de numération et sens du nombre. Elles proviennent de situations-problèmes et la résolution de ces équations se fait souvent par l'entremise de représentations concrètes et d'illustrations.

Au cycle moyen, les élèves sont davantage exposés aux équations à résoudre. Il est essentiel qu'ils maîtrisent la notion d'égalité comme expression d'équilibre avant qu'ils ne commencent à résoudre ces équations. De plus, il importe que ces équations proviennent de situations-problèmes afin que les élèves puissent donner un sens aux équations et à leur solution.

Résoudre de telles équations signifie déterminer la valeur de l'inconnue qui maintient l'égalité. Le programme-cadre de mathématiques précise que les élèves au cycle moyen doivent apprendre à résoudre des équations à l'aide d'essais systématiques et par inspection. La résolution d'équations doit s'effectuer dans un contexte de compréhension et d'analyse de l'égalité. Il est alors important d'inviter régulièrement les élèves à expliquer leur démarche de résolution, à justifier les gestes qu'ils font et à démontrer leur compréhension des concepts présents afin d'éviter que la résolution d'équations ne devienne qu'une application aveugle de procédures.

Essais systématiques (ou tâtonnement) :

Méthode par laquelle on détermine la valeur de l'inconnue en vérifiant dans l'équation jusqu'à ce que l'on trouve la bonne valeur.

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 95)

Résolution d'équations par essais systématiques

Selon cette stratégie élémentaire, les élèves choisissent de façon systématique des valeurs potentielles de l'inconnue jusqu'à ce qu'une de ces valeurs rende l'égalité vraie. Par exemple, pour résoudre l'équation $2 \times p + 6 = 22$, ils choisissent successivement $p = 1, 2, 3\ldots$ et constatent que l'égalité est vraie lorsque $p = 8$.

Pour résoudre certaines équations, comme $125 - b = 32$, les élèves peuvent utiliser des stratégies qui font appel à leur sens du nombre de manière à diminuer le nombre d'essais. Ainsi, pour résoudre cette équation, il ne serait pas sage de procéder en utilisant $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$ et ainsi de suite, car cela prendrait beaucoup trop de temps. Ils pourraient penser comme suit : « Je sais que $125 - 100 = 25$ et 25 est près de 32. Si je soustrais 105, j'obtiens 20. Je m'éloigne de la quantité recherchée. Donc, je vais soustraire un peu moins que 100. Je vais essayer $b = 99$, $b = 98$, et ainsi de suite. »

Avantages de la résolution d’équations par essais systématiques :

- Les élèves mettent en évidence ce que signifie résoudre une équation, c’est-à-dire déterminer la valeur de l’inconnue qui maintient l’égalité.
- Les élèves travaillent de façon systématique et non de façon aléatoire. Ils peuvent aussi faire appel à leur sens du nombre.

Inconvénient de la résolution d’équations par essais systématiques :

- La communication du travail effectué peut être désorganisée, car il peut être difficile de laisser des traces des essais. On peut alors inciter les élèves à garder de telles traces en créant une table de valeurs. Voici un exemple d’une table de valeurs utilisée pour résoudre l’équation $125 - b = 32$:

b	100	105	99	98	95	93
$125 - b$	25	20	26	27	30	32

Note : Certaines notations doivent être évitées. Par exemple, pour résoudre l’équation $2 \times p + 6 = 22$, l’élève qui essaie $p = 1$ ne doit pas écrire « $2 \times 1 + 6 = 22$ », puisque cette égalité est fausse. Il ou elle peut évaluer le membre de gauche pour obtenir $2 \times 1 + 6 = 8$ ou utiliser l’équation sous la forme interrogative (p. ex., $2 \times 1 + 6 \stackrel{?}{=} 22$) ou écrire $2 \times 1 + 6 \neq 22$.

Résolution d’équations par inspection

Selon cette stratégie, les élèves reconnaissent la relation d’égalité représentée par l’équation. Ils comparent les quantités impliquées et font appel à leur sens du nombre pour déterminer la valeur de l’inconnue. Voici trois exemples de la résolution de l’équation $c + 45 = 98$ par inspection.

Inspection (par) :

Résoudre une équation par inspection consiste à trouver la valeur du symbole ou de l’inconnue en regardant les nombres impliqués.

(Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2005, p. 96)

Exemple 1

Un élève reconnaît qu’il doit trouver le nombre qui, additionné à 45, donne une somme de 98. Pour ce faire, il utilise son sens du nombre. Puisqu’il sait que $45 + 45 = 90$, il conclut que le nombre qu’il cherche est 8 de plus que 45, soit 53.

Exemple 2

Une élève reconnaît que si on enlève une même quantité de chaque côté de l'égalité, l'équation est modifiée, mais l'égalité est maintenue.

$c + 45 = 98$

$c + 45 - 45 = 98 - 45$

$c = 98 - 45$

$c = 53$

Note : Il est important que les élèves effectuent ce raisonnement en étapes, sinon ils risquent de simplement appliquer mécaniquement une procédure incomprise. De plus, ce raisonnement peut être utilisé pour mieux saisir le concept d'opération inverse, c'est-à-dire que la soustraction est l'opération inverse de l'addition.

Exemple 3

Un élève décompose un nombre et ensuite compare ou annule les nombres.

$c + 45 = 98$
$c + 45 = 90 + 8$ (décompose)
$\underline{c} + 45 = 45 + \underline{45 + 8}$ (décompose et compare)
$c = 53$

$c + 45 = 98$
$c + 45 = 90 + 8$ (décompose)
$c + \cancel{45} = \cancel{45} + 45 + 8$ (décompose et annule)
$c = 45 + 8$
$c = 53$

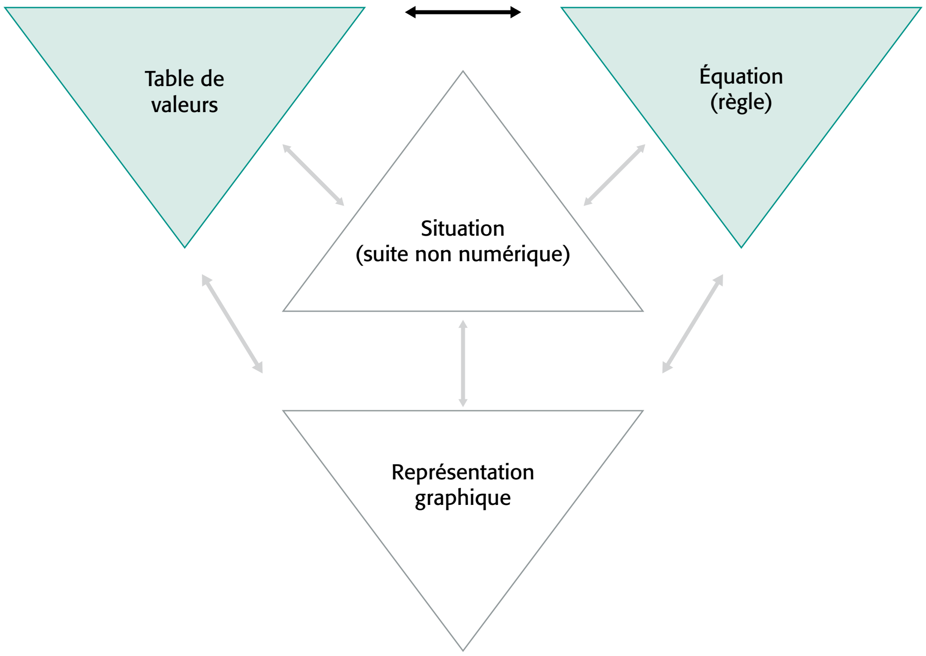
Avantages de la résolution d'équations par inspection :

- Les élèves s'exercent à décoder l'équation, c'est-à-dire à donner un sens au symbolisme de l'équation. Ils développent ainsi leur sens du symbole, de l'équation et de l'égalité.
- Les élèves réfléchissent aux opérations et aux nombres au lieu de chercher à utiliser une procédure vide de sens.

Des exemples ci-dessus, on peut reconnaître que les élèves peuvent résoudre une même équation par inspection en utilisant diverses stratégies. Les stratégies *comparer des termes*, *décomposer des termes* et *modifier l'équation* qui ont été explorées dans le cadre de l'analyse d'une égalité s'appliquent très bien dans les situations de résolution d'équations par inspection puisque l'équation représente une égalité. L'enseignant ou l'enseignante devrait aider les élèves à établir ce lien en faisant ressortir la similitude entre une égalité et une équation à résoudre. L'annexe B (p. 200-209) présente quelques suggestions d'explorations de ces stratégies dans un contexte de résolution d'une équation.

Équation qui représente une relation entre deux quantités changeantes : En 6e année, les élèves apprennent à représenter des relations entre deux quantités en changement au moyen d'équations. Ces équations expriment d'abord une relation entre deux variables, mais on peut profiter de l'occasion pour les convertir en équations à résoudre afin que les élèves puissent substituer des valeurs à une variable « dans une équation (comportant jusqu'à deux opérations) et déterminer (par inspection ou par essais systématiques) la valeur de l'inconnue » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 74).

On peut aussi renforcer les liens entre l'équation et la table de valeurs.



Exemple

Voici une suite de figures. On s'intéresse à la relation entre le numéro de la figure et le nombre de points qui la composent.

Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

En 6[e] année, certains élèves pourraient représenter la relation par l'équation $p = n \times (n + 1)$, où n représente le numéro de la figure et p, le nombre de points qui la composent. La table de valeurs suivante représente aussi cette relation.

Numéro de la figure (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de points (p)	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

Les élèves peuvent établir des liens entre l'équation et la table de valeurs. Par exemple, si $n = 1$, l'équation devient $p = 1 \times (1 + 1)$, d'où $p = 2$, ce qui correspond aux données dans la table. Si $n = 3$, l'équation devient $p = 3 \times (3 + 1)$, d'où $p = 12$, ce qui correspond aussi aux données dans la table. Ainsi, la question « Combien de points composent la 9[e] figure? » peut être exprimée par l'énoncé « Résolvez l'équation $p = 9 \times (9 + 1)$. » Pour la résoudre, les élèves peuvent utiliser la table de valeurs en cherchant la valeur de p pour laquelle $n = 9$ ou effectuer le calcul et déterminer que $p = 90$.

De même, une question telle que : « Quel est le numéro de la figure qui compte 72 points? » peut être exprimée par l'énoncé « Résolvez l'équation $72 = n \times (n + 1)$ », car dans l'équation $p = n \times (n + 1)$, p prend une valeur de 72. Pour la résoudre, les élèves peuvent chercher, dans la table de valeurs, la valeur de n pour laquelle $p = 72$ et conclure que $n = 8$.

Équation qui sert de formule : Dans le domaine Mesure, les élèves apprennent à exprimer des façons de représenter l'aire et le volume par des *formules*. Par exemple, lorsqu'ils apprennent à déterminer l'aire de rectangles, ils découvrent que la longueur de la base du rectangle (p. ex., 6 cm) leur indique le nombre de centimètres carrés qu'ils peuvent placer dans une rangée. La hauteur du rectangle (p. ex., 4 cm) indique le nombre de rangées qu'il peut contenir. Donc, le produit de ces nombres ($6 \times 4 = 24$) indique le nombre total de centimètres carrés que peut contenir le rectangle. Ils peuvent généraliser ce résultat au moyen d'une formule, par exemple $A = b \times h$ ou $A = L \times l$. Ce faisant, les élèves peuvent comprendre le sens d'une formule et des variables qui la composent plutôt que de l'appliquer mécaniquement.

Ces équations (formules) formées de variables, peuvent aussi servir pour générer des équations à résoudre. Par exemple, la question « Quelle est la hauteur d'un rectangle qui a une base de 8 cm et une aire de 72 cm^2? » peut être traduite en langage algébrique par « Résolvez l'équation $72 = 8 \times h$ ».

L'activité *Le plus grand enclos pour les animaux* (p. 104-107) est reliée à l'utilisation de formules.

Équation qui généralise une situation d'égalité : Les élèves peuvent rencontrer ce type d'équations notamment en explorant les propriétés des nombres et des opérations (p. ex., $m - m = 0$). Ces équations expriment de façon symbolique le fait qu'une situation d'égalité est toujours vraie, peu importe les valeurs que prennent la ou les variables qui les composent et peu importe qu'il s'agisse de nombres naturels, de fractions ou de nombres décimaux.

Dès le cycle primaire, les élèves explorent certaines propriétés des nombres et des opérations (p. ex., propriété du 0 dans une addition, commutativité de l'addition) et ils formulent, à l'aide de mots, des conjectures au sujet de ces propriétés. Au cycle moyen, les élèves poursuivent leur exploration des propriétés et progressent vers la formulation de généralisations à l'aide de mots ou d'une équation (pour plus de renseignements au sujet de la généralisation, voir p. 9-11). Il importe cependant de noter que l'utilisation d'une équation pour généraliser une situation d'égalité requiert une bonne capacité d'abstraction. Ce n'est que lorsqu'ils ont développé une bonne compréhension des propriétés que les élèves sont en mesure de bien saisir le sens de telles équations.

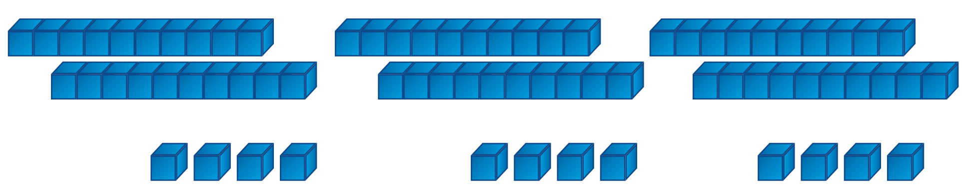
Voici quelques exemples de propriétés des nombres et des opérations qui sont exprimées en mots et à l'aide d'une équation.

Situation d'égalité	Conjecture en mots	Généralisation à l'aide d'une équation
$0 + 2230 = 2230$ $0 + 9{,}72 = 9{,}72$	« Lorsqu'on ajoute un nombre quelconque à 0, on obtient ce nombre. »	$0 + m = m$
$776 - 0 = 776$ $\frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$	« Lorsqu'on soustrait 0 d'un nombre quelconque, on obtient ce nombre. »	$m - 0 = m$
$0 \times 15 = 0$ $0 \times \frac{3}{4} = 0$	« Lorsqu'on multiplie 0 par un nombre quelconque, on obtient 0. »	$0 \times n = 0$
$1 \times 235 = 235$ $1 \times 1{,}56 = 1{,}56$	« Lorsqu'on multiplie 1 par un nombre quelconque, on obtient ce nombre. »	$1 \times n = n$
$4 + 3 = 3 + 4$	« Lorsqu'on additionne deux nombres, l'ordre dans lequel on les additionne n'est pas important. » *Note* : Au cycle moyen, l'enseignant ou l'enseignante peut amener les élèves à reconnaître que cette propriété s'applique aussi à la somme de plus de deux nombres.	$a + b = b + a$

L'enseignant ou l'enseignante doit favoriser le cheminement des élèves vers une compréhension des équations qui généralisent une situation d'égalité. L'exemple suivant décrit une démarche en ce sens qui mène à la généralisation de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exemple

À l'aide de matériel concret, démontrer aux élèves que pour calculer 3 × 24, on peut calculer 3 × 20 et 3 × 4 séparément, puis faire la somme des produits.



Par la suite, présenter aux élèves diverses égalités se rapportant à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. Par exemple :

$$4 \times 27 = (4 \times 20) + (4 \times 7)$$
$$11 \times 34 = (11 \times 30) + (11 \times 4)$$

Pour chacune, demander aux élèves d'expliquer, de représenter et d'analyser la propriété en posant des questions qui favorisent la réflexion telles que :

– « L'égalité est-elle vraie? Comment le savez-vous? »

– « Pouvez-vous le démontrer à l'aide de matériel concret? »

– « Pouvez-vous vérifier l'égalité sans faire de calculs? »

– « Est-ce que ça fonctionnerait avec d'autres nombres? »

– « Pouvez-vous représenter l'égalité à l'aide d'une disposition rectangulaire? »

Tout au long de l'exploration, inciter les élèves à formuler des conjectures reliées aux égalités présentées, par exemple : « Quand un nombre est multiplié par un autre nombre, le deuxième nombre peut être décomposé avant d'être multiplié par le premier. »

Présenter ensuite aux élèves des équations qui font appel à la distributivité et qui peuvent être résolues facilement sans effectuer de calculs. Par exemple :

$7 \times 31 = (7 \times \square) + (7 \times 1)$
$6 \times 28 = (\square \times 20) + (6 \times 8)$
$7 \times 9 = (3 \times 9) + (\square \times 9)$
$(20 \times 8) + (\square \times 8) = 23 \times 8$

Poser des questions qui mènent les élèves à une généralisation, à savoir que la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition est vraie peu importe les nombres utilisés. Leur demander de représenter symboliquement cette propriété à l'aide d'une équation [p. ex., $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$].

Établir des liens

> *Les élèves doivent se rendre compte que « … les mathématiques sont beaucoup plus qu'un ensemble de notions théoriques et pratiques isolées. Les enseignantes et enseignants encouragent les élèves à découvrir de quelles façons les mathématiques sont reliées à leurs expériences quotidiennes afin de leur permettre d'en comprendre l'utilité et la pertinence, à l'école et ailleurs. »*
>
> (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 19)

Afin de faciliter l'apprentissage des concepts en modélisation et algèbre, l'enseignant ou l'enseignante doit fournir aux élèves des occasions d'établir des liens entre ces concepts et :

- des expériences de la vie quotidienne;
- des concepts dans les autres domaines de mathématiques;
- des concepts dans les autres matières;
- différentes professions.

Voici quelques exemples d'activités qui permettent de créer de tels liens ainsi que des exemples de professions qui demandent une bonne connaissance des concepts en modélisation et algèbre.

LIENS AVEC DES EXPÉRIENCES DE LA VIE QUOTIDIENNE

Exemple 1 : Un calendrier plein de régularités

Cette activité permet aux élèves de développer une meilleure compréhension de l'organisation du calendrier par l'entremise d'une analyse des régularités de mois en mois et d'année en année.

L'enseignant ou l'enseignante invite les élèves à se grouper par deux et leur remet une copie de l'annexe 1 (*Calendrier de l'année 1975*, p. 114). Il ou elle leur demande de trouver des régularités dans le calendrier, puis anime un échange sur les régularités relevées, par exemple :

- Chaque mois commence par le chiffre 1.
- À l'intérieur d'un mois, la régularité entre les mêmes journées d'une semaine est toujours + 7 (p. ex., le lundi 1, le lundi 8, le lundi 15…).
- Chaque mois est divisé en 7 colonnes, du dimanche au lundi.
- D'une journée à l'autre, on trouve toujours une régularité de + 1. Autrement dit, la date correspondant à une journée quelconque est toujours 1 de plus que la date correspondant à la journée précédente.
- Dans un mois, il y a soit 30 ou 31 jours, sauf février qui en a généralement 28.
- Tous les mois ont au moins 4 semaines.

L'enseignant ou l'enseignante distribue ensuite une copie de l'annexe 2 (*Les 12 mois de l'année 1976*, p. 115) à chaque équipe et demande aux élèves de la découper pour obtenir 12 mois distincts.

Calendrier de l'année 1976 (année bissextile)

Janvier

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Février

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29						

Mars

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Avril

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Mai

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Juin

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Juillet

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Août

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Septembre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Octobre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Novembre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Décembre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Une fois les mois découpés, il ou elle propose aux élèves de les remettre en ordre afin de recréer le calendrier de l'année 1976 (voir p. 100). Pour y arriver, ils se servent du calendrier de l'année 1975 et des régularités trouvées plus tôt. Lorsqu'une équipe a recréé le calendrier, elle inscrit le nom de chaque mois. Quand deux équipes ont terminé, elles comparent leur calendrier, le justifient et le corrigent au besoin. Lorsque toutes les équipes ont complété la tâche, l'enseignant ou l'enseignante affiche le calendrier de l'année 1976 et propose une discussion sur les stratégies utilisées.

L'enseignant ou l'enseignante peut ensuite proposer aux élèves diverses activités et explorations en relation avec le calendrier. Par exemple :

- Quel jour de la semaine tombera ton anniversaire l'an prochain? dans 4 ans? Dans combien d'années ton anniversaire de naissance tombera-t-il un dimanche?
- Quel jour de la semaine tombera le 1er janvier de l'année prochaine? 2012? 2019?

Afin de vérifier l'exactitude des réponses données, proposer aux élèves d'effectuer une recherche dans Internet pour trouver un site qui traite d'un « Calendrier perpétuel ».

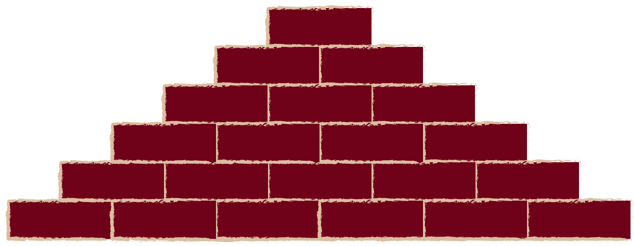
Exemple 2 : Commande de briques pour la rénovation

Cette activité permet aux élèves d'utiliser des stratégies de calcul fondées sur des régularités dans un contexte de planification de travaux de construction ou de rénovation.

L'enseignant ou l'enseignante présente à la classe la situation suivante :

> *Une famille veut rénover la façade de la niche du chien, de la remise et de la maison avec des briques. Elle a décidé de reproduire le même motif sur chacune des trois façades. Pour ce faire, elle a décidé de procéder de la façon suivante : le nombre de briques à la base est déterminé d'après la largeur du mur; ensuite, chaque rangée ajoutée contient toujours une brique de moins que la rangée précédente de sorte que la dernière rangée ne comprend qu'une seule brique.*

Il ou elle invite les élèves à se grouper par deux. Le but de l'activité est d'aider la famille à déterminer le nombre de briques à acheter pour briqueter la façade des trois bâtiments. Leur suggérer de commencer par représenter la façade du plus petit bâtiment, la niche, pour laquelle le briqueteur a déterminé qu'il fallait **6 briques à la base.**



L'enseignant ou l'enseignante demande ensuite aux élèves de trouver une façon rapide de déterminer le nombre de briques nécessaires pour rénover la façade de la niche sans avoir à les compter une par une. Une fois le nombre de briques déterminé, il ou elle les incite à trouver une autre stratégie de calcul.

Exemples de stratégie de calcul

- Addition du nombre de briques par rangée :
  $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ briques
- Addition à l'aide de groupements :

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$	$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
Donc, 3 groupements de 7 donnent 21 briques.	**Donc, 3 groupements de 6 plus 3 donnent 21 briques.**

L'enseignant ou l'enseignante suggère maintenant aux élèves de déterminer le nombre de briques nécessaires pour rénover la façade de la remise, tout en respectant le même motif (soit une pleine rangée à la base et une seule brique au sommet), sachant que la **base contient 10 briques.** Il ou elle demande aux élèves d'utiliser deux stratégies de calcul différentes.

Exemples de stratégie de calcul

- Addition du nombre de briques par rangée :

  10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55 briques

- Addition à l'aide de groupements :

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10
Donc, 5 groupements de 11 donnent 55 briques.	**Donc, 5 groupements de 10 plus 5 donnent 55 briques.**

L'enseignant ou l'enseignante fait un retour sur le travail accompli afin que les élèves partagent leurs stratégies et établissent des liens entre elles. Les élèves reprennent ensuite l'activité, toujours en équipes de deux, afin de déterminer le nombre de briques nécessaires pour rénover la façade de la maison, sachant que le mur compte 24 briques à la base. Ici, ils devraient être en mesure de déterminer, en faisant par exemple des groupements de 24 ou de 25, qu'il faudra 300 briques.

L'enseignant ou l'enseignante fait un retour en groupe classe et demande ensuite aux élèves de déterminer le nombre total de briques à acheter pour mener à terme le projet de rénovation des façades des trois bâtiments (21 briques + 55 briques + 300 briques = 376 briques).

Prolongement

Selon l'année d'études, on peut poursuivre l'activité et amener les élèves à généraliser et à exprimer, en mots ou de façon symbolique, une stratégie pour déterminer la somme des premiers nombres naturels consécutifs (p. ex., 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6). Ils pourraient par exemple dire que pour trouver la somme des 20 premiers nombres naturels, il suffit de considérer 10 groupes de 21 pour obtenir la somme de 210. Symboliquement, ils pourraient dire que la somme des n premiers nombres naturels est égale à $(n \div 2) \times (n + 1)$.

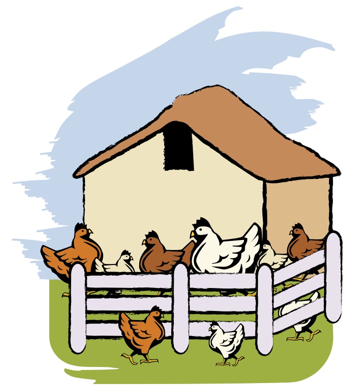
LIENS AVEC DES CONCEPTS DANS LES AUTRES DOMAINES DE MATHÉMATIQUES

Exemple 1 : Le plus grand enclos pour les animaux

Cette activité intègre des concepts en modélisation et algèbre ainsi qu'en mesure. Elle permet aux élèves de constater que des rectangles de dimensions différentes mais de même périmètre ont des aires différentes.

L'enseignant ou l'enseignante présente à la classe le problème suivant :

Un agriculteur vient d'acheter une ferme avec des poules et des moutons. Il veut construire un enclos pour ses poules à l'aide d'un rouleau de clôture de 16 mètres. S'il veut donner le plus d'espace possible à ses poules, quelles sont les dimensions de l'enclos qu'il devrait clôturer avec son rouleau?



L'enseignant ou l'enseignante invite les élèves à se grouper par deux et à résoudre le problème en utilisant une stratégie de leur choix.

Une fois que les équipes ont examiné le problème et déterminé les dimensions qui donnent la plus grande aire (la largeur et la longueur de 4 mètres donnent une aire de 16 m^2), l'enseignant ou l'enseignante invite les élèves à expliquer comment ils ont obtenu leur réponse et pourquoi ils pensent que ces dimensions donnent le plus grand enclos. Il ou elle construit ensuite avec les élèves un tableau pour illustrer les différentes possibilités.

Enclos ayant un périmètre de 16 mètres

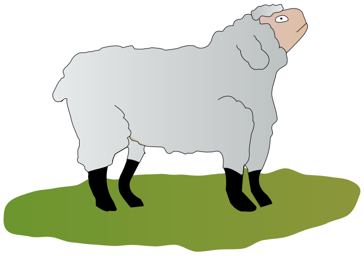
Largeur des côtés (m)	Longueur des côtés (m)	Aire de l'enclos (m^2)
1	7	7
2	6	12
3	5	15
4	4	16
5	3	15
6	2	12
7	1	7

L'enseignant ou l'enseignante demande aux élèves de trouver des régularités dans le tableau et d'examiner la relation entre la longueur et la largeur ($L + l = 8$) et la relation entre l'aire et les dimensions de l'enclos ($A = L \times l$).

Note : Au cours de cette discussion, certaines équipes remarqueront peut-être que le plus grand enclos est de forme carrée et se demanderont si ceci est toujours le cas. La deuxième partie du problème leur permettra d'émettre des conjectures à cet effet.

L'enseignant ou l'enseignante soumet à la classe la deuxième partie du problème :

Le fermier veut construire un autre enclos pour ses moutons, cette fois à l'aide d'un rouleau de clôture de 24 mètres. Quelles dimensions aura le plus grand terrain qu'il pourra ainsi clôturer pour ses moutons?



Il ou elle invite les élèves à résoudre ce problème en équipe de deux.

Le tableau suivant indique les possibilités de dimensions (valeurs entières) d'un enclos ayant un périmètre de 24 mètres.

Enclos ayant un périmètre de 24 mètres

Largeur des côtés (m)	Longueur des côtés (m)	Aire de l'enclos (m^2)
1	11	11
2	10	20
3	9	27
4	8	32
5	7	35
6	6	36
7	5	35
8	4	32
9	3	27
10	2	20
11	1	11

L'enseignant ou l'enseignante anime ensuite une discussion au cours de laquelle les élèves exposent et justifient leurs solutions. Il ou elle les invite à comparer les deux tableaux, à faire ressortir des régularités et à établir les relations entre l'aire d'un enclos et sa forme, et ce, afin de les amener à émettre des conjectures qui peuvent mener à la formulation de généralisations telles que :

- Le plus grand enclos est celui dont le terrain est carré et dont, par conséquent, la longueur et la largeur sont de même mesure.
- Pour des rectangles de même périmètre, plus les mesures de la longueur et de la largeur se rapprochent, plus l'aire augmente.
- Pour des rectangles de même périmètre, plus le rectangle est allongé, plus l'aire est petite.

Pour terminer, on peut lancer un défi aux élèves en leur proposant de trouver la plus grande aire que l'on peut clôturer avec une longueur de clôture de 26 mètres. Certains diront que la plus grande aire est de 42 m^2, soit un enclos rectangulaire de 6 m sur 7 m. D'autres reconnaîtront que l'on peut construire un enclos carré de 6,5 m sur 6,5 m, ce qui donne une aire de 42,25 m^2.

Exemple 2 : Est-il plus long de sortir d'une pièce que d'y entrer?

Cette activité intègre des concepts en modélisation et algèbre ainsi qu'en traitement des données et probabilité. Elle donne l'occasion aux élèves de voir deux représentations différentes (table de valeurs et diagramme) de situations semblables.

L'enseignant ou l'enseignante soumet à la classe la situation suivante :

> *L'an dernier, des élèves voulaient vérifier le temps qu'il fallait pour que tout le monde entre au gymnase et le temps qu'il fallait pour que tout le monde en ressorte. Ils ont donc recueilli des données à l'entrée et à la sortie des élèves au gymnase.*

L'enseignant ou l'enseignante distribue une copie de l'annexe 3 (*Entrée et sortie*, p. 116) aux élèves et leur demande de compléter les deux représentations en respectant les régularités de chacune. Ensuite, il ou elle les invite à examiner chacune des représentations et à formuler certaines observations. Voici quelques observations possibles :

- Les deux types de représentations diffèrent, la première est une table de valeurs et l'autre un diagramme à bandes.
- À l'entrée, le nombre d'élèves dans le gymnase croît tandis qu'à la sortie, il décroît.
- 25 élèves à la minute entrent dans le gymnase.
- Le nombre d'élèves dans le gymnase avant le début de la sortie est 300.
- 30 élèves à la minute sortent du gymnase.
- Le temps requis pour faire sortir tous les élèves du gymnase est plus court que pour les y faire entrer.

L'enseignant ou l'enseignante demande ensuite aux élèves de représenter l'entrée des élèves à l'aide d'un diagramme à bandes et la sortie à l'aide d'une table de valeurs.

Note : En explorant les deux représentations d'une même situation simultanément, les élèves voient plus facilement le lien entre les données dans la table de valeurs et celles dans le diagramme. Les diagrammes à bandes favorisent la visualisation d'un ensemble de données numériques; ils aident donc à voir s'il s'agit d'une situation de croissance ou de décroissance et s'il y a une régularité.

En groupe classe, l'enseignant ou l'enseignante approfondit la situation en faisant ressortir certains éléments importants et certaines relations. Voici quelques suggestions de questions pour stimuler cet échange, lesquelles varient en fonction du cheminement des élèves en modélisation et algèbre :

- « Laquelle des deux représentations trouvez-vous plus claire visuellement? Pourquoi? » (*Le diagramme à bandes est une représentation qui permet de voir rapidement s'il s'agit d'une situation de croissance ou de décroissance. On voit aussi qu'il y a une régularité.*)
- « S'il y avait davantage d'élèves, combien d'élèves seraient entrés dans le gymnase après 15 minutes? Pouvez-vous le déterminer à l'aide du diagramme? » (*Selon l'augmentation d'une bande à l'autre, on voit qu'après 15 minutes, il y aurait 375 élèves dans le gymnase.*)
- « Quelle règle représente la relation entre le nombre d'élèves dans le gymnase et le temps écoulé depuis le début de l'entrée? » (*Pour déterminer le nombre d'élèves dans le gymnase à un certain moment, on doit multiplier le temps écoulé par 25. La situation peut être représentée par l'équation* $n = t \times 25$*, où* n *représente le nombre d'élèves dans le gymnase et* t*, le temps écoulé en minutes.*)
- « Est-ce que la même règle peut être utilisée pour représenter la relation entre le nombre d'élèves dans le gymnase et le temps écoulé depuis le début de la sortie? Explique ton raisonnement. » (*Non, car le temps requis pour l'entrée au gymnase n'est pas le même que celui requis pour la sortie.*)
- « Quelle règle représente la relation entre le nombre d'élèves dans le gymnase et le temps écoulé depuis le début de la sortie? » (*Pour déterminer le nombre d'élèves dans le gymnase après un certain nombre de minutes du début de la sortie, on doit multiplier le temps écoulé par 30, puis soustraire ce produit du nombre d'élèves qu'il y avait dans le gymnase au départ, soit 300. La situation peut être représentée par l'équation* $n = 300 - t \times 30$*, où* n *représente le nombre d'élèves dans le gymnase et* t*, le temps écoulé en minutes depuis le début de la sortie.*)

LIENS AVEC DES CONCEPTS DANS LES AUTRES MATIÈRES

Exemple 1 : Les poèmes riment-ils avec mathématiques?

Cette activité intègre des concepts en modélisation et algèbre ainsi qu'en français.

L'enseignant ou l'enseignante présente aux élèves quelques poèmes d'origine japonaise en forme de *haïku* :

Exemple 1	**Exemple 2**	**Exemple 3**
Une grenouille	Quatre angles droits,	L'hiver commence,
Saute sur un nénuphar,	Rectangle ou triangle.	Et les enfants sont contents.
Sans faire de bruit.	Lequel selon toi?	Vive la neige!

Note : Le *haïku* est un poème d'origine japonaise de trois vers, dont la structure syllabique est la suivante : cinq syllabes/sept syllabes/cinq syllabes (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006b, p. 101). Le *haïku* comprenant une syllabe en moins est parfois admis. Toutefois, au-delà de 17 syllabes, le poème n'est plus considéré comme un *haïku*.

L'enseignant ou l'enseignante groupe les élèves par deux et leur demande de lire attentivement les poèmes proposés et de trouver des régularités d'un *haïku* à l'autre (p. ex., le nombre de vers, soit 3, est identique, le nombre total de syllabes est 17, il n'y a pas de rimes). Il ou elle fait ensuite une mise en commun des régularités trouvées. Si la particularité du *haïku* (5-7-5) n'a pas été relevée, il ou elle invite les élèves à relire les poèmes à voix haute en comptant les syllabes.

L'enseignant ou l'enseignante propose de créer une nouvelle sorte de poème, où on trouverait une régularité dans le nombre de syllabes par vers. Il ou elle peut suggérer la structure suivante : le premier vers comprend deux syllabes, le deuxième vers, quatre, le troisième vers, six, et ainsi de suite, et proposer un thème (p. ex., animaux, nature, santé).

Voici un exemple d'un poème sur l'hiver, dont la structure répond à la suite 2, 4, 6… :

Hiver

Neige tombe

Flocons virevoltent

Variante : Les élèves peuvent rédiger quelques vers d'un poème qui suit une régularité de leur choix. Par exemple, le premier vers comprend une syllabe, le deuxième, en comprend deux et le troisième en comprend trois, ou encore deux vers de deux syllabes, suivi de trois vers de trois syllabes. Ensuite, ils échangent avec une autre équipe, qui doit écrire la suite correspondant à la régularité de la structure choisie.

Exemple 2 : Vive le papier recyclé!

Cette activité intègre des concepts en modélisation et algèbre ainsi qu'en sciences et technologie (Systèmes de la Terre et de l'espace – L'économie de l'énergie et des ressources, et Systèmes vivants – La biodiversité).

L'enseignant ou l'enseignante anime une discussion en groupe classe sur les enjeux écologiques relatifs à la production de papier et à une saine exploitation forestière. Cet échange sera l'occasion de discuter de la relation entre la fabrication de papier recyclé et la protection des forêts.

L'enseignant ou l'enseignante soumet la situation suivante afin de sensibiliser les élèves aux avantages d'utiliser du papier recyclé :

> *On estime qu'en moyenne, la production de 10 000 feuilles de papier recyclé sauve la vie d'un arbre. Pour cette raison, le personnel d'une école a choisi d'utiliser exclusivement du papier recyclé et a comptabilisé de façon cumulative, le nombre de feuilles de papier employées à la fin de chacun des trois premiers mois.*
>
> *À la fin du premier mois, 10 000 feuilles ont été utilisées. Après le deuxième mois, c'est 15 000 feuilles qui ont été utilisées, après le troisième mois, 20 000 feuilles.*

En groupe classe, l'enseignant ou l'enseignante pose diverses questions pour faire ressortir les différentes relations que la situation présente. Voici des exemples de questions à poser, lesquelles varieront selon l'année d'études :

– « Combien de feuilles auront été utilisées après le quatrième et le cinquième mois, si la consommation demeure constante (donc si la régularité est maintenue)? »

– « Si la régularité est maintenue, combien de feuilles auront été utilisées après 10 mois? »

Les élèves peuvent représenter la relation entre le nombre de mois et le nombre de feuilles utilisées à l'aide d'une table de valeurs.

Nombre de mois (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre total de feuilles utilisées (f)	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000	35 000	40 000	45 000	50 000	55 000

Note : Cette relation peut aussi être représentée par l'équation $f = (n \times 5\ 000) + 5\ 000$, où f représente le nombre de feuilles utilisées et n, le nombre de mois.

Poursuivre l'échange avec les questions suivantes :

– « Combien d'arbres a-t-on sauvés après un mois en utilisant du papier recyclé au lieu du papier de source première? » (*Un arbre a été sauvé.*)

– « Combien d'arbres a-t-on sauvés au bout d'une année scolaire (10 mois) si on a utilisé du papier recyclé? » (*Cinq arbres et demi ont été sauvés.*)

– « Quelle règle pourrait décrire la relation entre le nombre d'arbres sauvés et le nombre de feuilles utilisées? » (*Le nombre d'arbres sauvés correspond au nombre de feuilles utilisées divisé par 10 000.*)

La table de valeurs suivante pourrait aussi représenter cette relation.

Nombre total de feuilles utilisées (f)	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000	35 000	40 000	45 000	50 000	55 000
Nombre d'arbres sauvés (a)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

Note : Les élèves seront peut-être portés à croire que le nombre d'arbres sauvés est très petit (en un an, cette école aurait sauvé moins de 6 arbres). En plaçant le geste dans un contexte global (si chaque école utilise exclusivement du papier recyclé à 100 % au lieu de papier de source première), les élèves saisiront mieux le bénéfice de cette pratique responsable.

Afin d'amener les élèves à saisir ce que représentent de telles quantités de feuilles, l'enseignant ou l'enseignante leur montre une boîte de papier et présente la relation entre le nombre de paquets dans la boîte et le nombre de feuilles qu'elle contient (10 paquets de 500 feuilles, soit 5 000 feuilles). Il ou

elle pose des questions afin de les inciter à créer une table de valeurs qui représente la relation entre un nombre quelconque de paquets de feuilles et le nombre total de feuilles correspondant, et une autre qui représente la relation entre un nombre quelconque de paquets de feuilles et le nombre de boîtes correspondant. Voici quelques suggestions de questions à poser :

– « Combien de paquets, 2 000 feuilles de papier représenteraient-elles? 3 000 feuilles? 10 000 feuilles? »

– « Comment peut-on déterminer le nombre de paquets que représentent un nombre de feuilles donné? »

– « Combien de paquets de feuilles y aura-t-il dans 2 boîtes? 3 boîtes? 10 boîtes? »

– « Comment peut-on déterminer le nombre de paquets de feuilles dans un nombre de boîtes donné? »

– « Combien de boîtes de papier recyclé l'école en question a-t-elle utilisées? » (*L'école a utilisé 11 boîtes de papier recyclé*.)

Note : La relation entre le nombre de feuilles et le nombre de boîtes peut être représentée par l'équation $b = f \div 5\,000$, où b représente le nombre de boîtes de papier et f, le nombre de feuilles.

LIENS AVEC DES PROFESSIONS

Dans le cadre de la mise en œuvre de la politique *Des choix qui mènent à l'action : Politique régissant le programme d'orientation et de formation au cheminement de carrière dans les écoles élémentaires et secondaires de l'Ontario*, l'enseignant ou l'enseignante doit aider les élèves « … à identifier dans le milieu communautaire les emplois et les professions connexes aux matières étudiées à l'école » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 1999, p. 8). Pour ce faire, il ou elle peut profiter de toutes les occasions pour mettre en évidence les professions qui nécessitent une bonne compréhension des relations entre deux quantités en changement et des concepts algébriques. Le tableau ci-après présente des exemples de telles professions.

Exemple de profession	Courte description du travail
Patroniste de mode	Il ou elle crée le patron des vêtements qui permettra de les reproduire. Son patron de base sera agrandi ou diminué dans les bonnes proportions pour convenir à toutes les tailles.
Designer industriel (p. ex., dans les secteurs de l'automobile, de la construction, de l'alimentation)	Il ou elle élabore le concept d'un produit (format réduit) et le suit tout au long de son développement, jusqu'à sa mise en production (format réel) et à sa commercialisation. Le respect des proportions est important avant la production.
Scientifique, ingénieur ou ingénieure	Il ou elle utilise une série de formules dans le cadre de ses fonctions.
Artiste, artisan ou artisane	Il ou elle crée des œuvres qui ont une régularité ou du rythme (p. ex., tapis, tricot, tapisserie, pièce musicale, tableau). Il ou elle doit parfois respecter des critères de proportion et de régularité.
Statisticien ou statisticienne	Il ou elle analyse, interprète, compare des données afin d'en tirer des conclusions.
Comptable, actuaire	Il ou elle utilise des formules pour faire des analyses financières et des projections.

ANNEXE 1

Calendrier de l'année 1975

Janvier

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Février

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

Mars

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Avril

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Mai

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Juin

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Juillet

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Août

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Septembre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	**25**	26	27
28	29	30				

Octobre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Novembre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Décembre

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Note : Le drapeau franco-ontarien a été déployé pour la première fois le 25 septembre 1975, à Sudbury.

ANNEXE 2

Les 12 mois de l'année 1976

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29						

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

DIM	LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

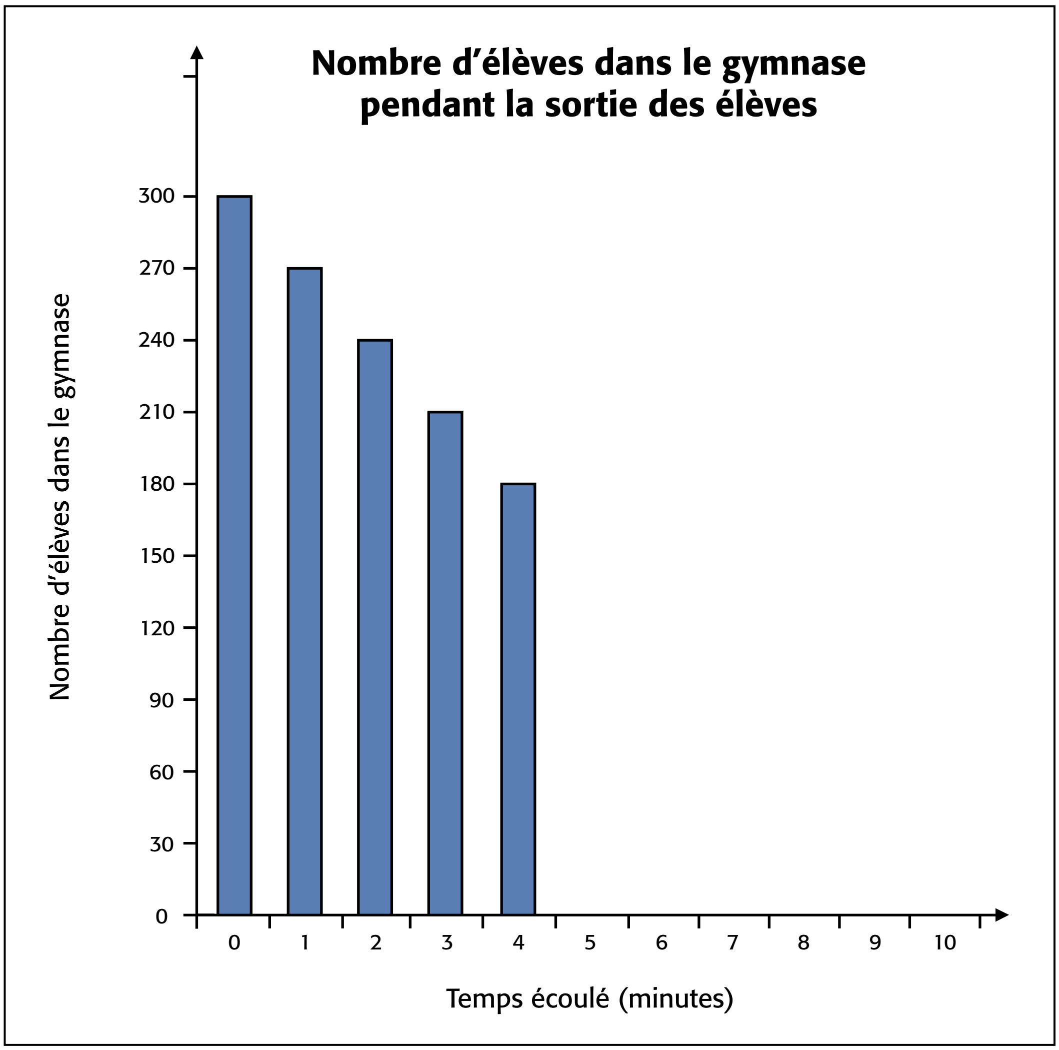
ANNEXE 3

Entrée et sortie

Entrée des élèves dans le gymnase

Temps écoulé (minutes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'élèves dans le gymnase	0	25	50	75									

Sortie des élèves du gymnase



Cheminement de l'élève

Les élèves poursuivent leur apprentissage en modélisation et algèbre en s'appuyant sur les connaissances acquises au cours des années précédentes et sur l'acquisition d'un nouveau vocabulaire et de nouvelles habiletés.

Les tableaux 1 et 2 ci-après présentent une synthèse du vocabulaire et des habiletés relatifs aux concepts en modélisation et algèbre à l'étude au cycle primaire et une progression du vocabulaire et des habiletés à développer au cours de la 4e à la 6e année.

Note : Sous chacune des années d'études sont inscrits seulement le vocabulaire et les habiletés présentés pour la première fois. Toutefois, afin de s'assurer que les élèves en poursuivent l'acquisition et la consolidation tout au long du cycle moyen, l'enseignant ou l'enseignante doit tenir compte de l'ensemble du tableau lors de sa planification.

TABLEAU DE PROGRESSION 1 - VOCABULAIRE

		Synthèse du cycle primaire	4e année (relations)	5e année (relations)	6e année (relations)
Vocabulaire	suites numériques et non numériques	• Suite • Suite non numérique • Suite numérique • Motif • Motif croissant • Motif répété • Structure d'une suite • Attribut • Élément • Rang • Figure • Régularité • Régularité d'addition • Régularité de soustraction • Table de valeurs • Intervalle • Droite numérique • Grille de nombres	• Relation • Régularité de multiplication	• Régularité de division • Règle • Interpoler • Extrapoler	• Équation
		Synthèse du cycle primaire	**4e année (équations)**	**5e année (équations)**	**6e année (concepts algébriques)**
Vocabulaire	égalités/équations	• Situation d'égalité • Situation d'inégalité • Plus que • Moins que • Est égal à • N'est pas égal à • Symboles • Balance à plateaux • Équilibre • Déséquilibre • Symbole de l'égalité (signe =) • Phrase mathématique • Équation • Inconnue • Faits d'addition • Faits de soustraction	• Table de valeurs • Inspection • Essais systématiques		• Substituer • Variable

TABLEAU DE PROGRESSION 2 - HABILETÉS

		Synthèse du cycle primaire	4e année (relations)	5e année (relations)	6e année (relations)
Habiletés	**suites numériques et non numériques**	**Identifier, décrire et reproduire** des régularités de son environnement. **Reproduire**, **prolonger et créer** une suite non numérique à motif répété et une suite non numérique à motif croissant. **Identifier** et **décrire** la régularité dans une suite non numérique et dans une suite numérique. **Explorer** et **décrire** les régularités dans une grille de 100, en comptant par intervalles de 1 et par intervalles de 2, de 5, de 10 et de 25. **Déterminer** la structure d'une suite non numérique. **Identifier** et **expliquer** la régularité d'addition ou de soustraction qui définit une suite numérique. **Prolonger** ou **créer** une suite numérique ayant une régularité d'addition ou de soustraction. **Créer** une suite numérique et une table de valeurs à partir d'une suite non numérique à motif croissant.	**Décrire** et **représenter** une relation simple. **Lire** et **interpréter** des données contenues dans une table de valeurs. **Déterminer** les régularités d'addition, de soustraction et de multiplication représentées dans une table de valeurs. **Compléter** et **prolonger** une table de valeurs. **Expliquer** les stratégies utilisées et les démarches effectuées pour résoudre des problèmes portant sur les types de relations à l'étude.	**Décrire** et **représenter** une relation simple. **Déterminer** les régularités d'addition, de soustraction, de multiplication et de division représentées dans une table de valeurs. **Déduire** et **déterminer** la règle d'une relation. **Expliquer** la règle d'une relation par des énoncés simples en langage courant. **Interpoler** ou **extrapoler** à partir de données dans une table de valeurs. **Expliquer** les stratégies utilisées et les démarches effectuées pour résoudre des problèmes portant sur les types de relations à l'étude. **Résoudre** des problèmes basés sur des régularités.	**Décrire** et **représenter** une relation. **Déterminer** les régularités, représentées sous la forme d'une équation, dans une table de valeurs. **Expliquer** la règle d'une relation par des énoncés simples en langage courant et à l'aide de symboles. **Interpoler** ou **extrapoler** à partir de données d'une table de valeurs ou à partir de la règle. **Expliquer** les stratégies utilisées et les démarches effectuées pour résoudre des problèmes basés sur les types de relations à l'étude. **Formuler** et **résoudre** des problèmes complexes en utilisant et des stratégies fondées sur des régularités.

TABLEAU DE PROGRESSION 2 - HABILETÉS (suite)

		Synthèse du cycle primaire	4e année (équations)	5e année (équations)	6e année (concepts algébriques)
Habiletés	**égalités/équations**	**Explorer et représenter** des situations d'égalité à l'aide de la balance à deux plateaux. **Illustrer** une situation d'égalité. **Établir** le lien entre la représentation concrète ou symbolique et une situation d'égalité. **Établir** le lien entre la représentation concrète ou symbolique et une situation d'égalité ou une équation. **Représenter** une équation à l'aide de matériel concret, de dessins et à l'aide de symboles. **Trouver** la valeur de l'inconnue dans une équation simple en se référant aux faits d'addition et de soustraction.	**Représenter** une équation simple. **Trouver** la valeur de l'inconnue dans une équation simple.	**Trouver** la valeur de l'inconnue dans une équation simple.	**Utiliser** une lettre pour représenter une inconnue dans une équation. **Résoudre** une équation comportant une seule opération et **indiquer** la réponse à l'aide d'un énoncé mathématique. **Substituer** des valeurs à une variable dans une équation et **déterminer** la valeur de l'inconnue.

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Aperçu

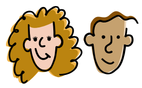
Cette section présente, pour chacune des années d'études du cycle moyen, une situation d'apprentissage en lien avec la grande idée en modélisation et algèbre. Ce sont des situations de résolution de problèmes engageantes qui suscitent le questionnement et la réflexion. En outre, elles contribuent au développement de l'habileté à communiquer et à formuler un bon argument mathématique. Chacune des situations d'apprentissage est riche en contenu mathématique. Afin d'être en mesure d'anticiper les difficultés que pourraient éprouver les élèves et de planifier ses interventions, l'enseignant ou l'enseignante devrait résoudre le problème avant de le présenter aux élèves.

Toutes les situations d'apprentissage présentées sont structurées en trois temps : avant l'apprentissage (mise en train), pendant l'apprentissage (exploration) et après l'apprentissage (objectivation/échange mathématique). Elles sont suivies de suggestions d'adaptations pour faciliter ou enrichir la tâche, d'une activité de suivi à la maison et de quelques activités supplémentaires que l'enseignant ou l'enseignante pourrait utiliser comme prolongement.

Dans un contexte d'enseignement par la résolution de problèmes, l'enseignant ou l'enseignante a recours à l'étayage et à des stratégies de questionnement efficaces afin d'inciter les élèves à réfléchir et à développer leurs propres stratégies de résolution de problèmes. Pour plus de détails au sujet du rôle de l'enseignant ou de l'enseignante dans un contexte de résolution de problèmes, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 2 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006a, p. 27).

Dans la présentation des situations d’apprentissage, les icônes suivantes sont utilisées afin de faciliter le repérage de certains renseignements.

Légende

Icônes d’ordre organisationnel		Icônes d’ordre pédagogique	
	Travail individuel		Observations possibles
	Travail en équipe		Mise au point à l’intention de l’enseignant ou de l’enseignante
	Travail en groupe classe		Pistes de questionnement
	Durée approximative		

Situation d'apprentissage, 4e année

Quel problème?

GRANDE IDÉE : RELATIONS

SOMMAIRE

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves représentent une équation concrètement et semi-concrètement, et rédigent une situation qui lui correspond.

INTENTION PÉDAGOGIQUE

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à associer une équation à une situation et à une représentation correspondante;
- à rédiger une situation qui correspond à une équation;
- à représenter une équation concrètement ou semi-concrètement.

Matériel

- annexe 4.1 (1 ensemble de fiches par équipe de trois)
- boîte à chaussures
- annexe 4.2 photocopiée sur papier ou carton de couleur (1 équation par équipe)
- matériel de manipulation (p. ex., cubes, matériel de base dix, balances mathématiques)
- carton ou feuille de papier de couleur

ATTENTE ET CONTENU D'APPRENTISSAGE

Attente

L'élève doit pouvoir déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation simple.

Contenu d'apprentissage

L'élève doit représenter une équation simple à l'aide d'une balance à plateaux (ou son dessin) et à l'aide de symboles (p. ex., $5 + 5 + \square = 25$, $\square + \bigstar + \blacktriangle = 18$, $3 \times \square = 18$).

Durée approximative de la situation d'apprentissage : **115 minutes**

CONTEXTE

Au cycle primaire, les élèves sont initiés au concept d'égalité. Ils déterminent la valeur de l'inconnue dans une équation simple en se référant aux faits numériques d'addition et de soustraction, et ils représentent une équation simple à l'aide de matériel concret, de matériel semi-concret et de symboles. En 4e année, ils continuent à représenter des situations d'égalité de plusieurs façons et ils utilisent ces représentations pour résoudre des équations simples.

PRÉALABLES

Les élèves ont appris à résoudre des problèmes en effectuant des calculs pour obtenir une réponse. Dans la présente situation d'apprentissage, ils doivent plutôt élaborer une situation qui représente une équation donnée, sans toutefois la résoudre.

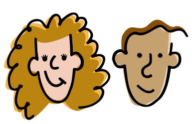
Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent :

- comprendre le sens d'une équation (p. ex., la relation entre les quantités de chaque côté du signe =);
- connaître différents modèles tels que la balance mathématique, la droite numérique, la grille de nombres.

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Inconnue, relation d'égalité, équation, symbole.

AVANT L'APPRENTISSAGE (MISE EN TRAIN)



équipes de 3

environ
45 minutes

Préparer une trousse d'algèbre pour la mise en situation. Pour ce faire, photocopier et découper les fiches de chacune des pages de l'annexe 4.1 de façon à obtenir un ensemble complet (15 fiches) par équipe de trois élèves. Placer chaque ensemble de fiches pêle-mêle dans une enveloppe. Mettre toutes les enveloppes dans une boîte à chaussures.

Présenter la situation suivante aux élèves :

> *En faisant du rangement dans l'armoire, j'ai retrouvé une trousse d'algèbre. Cette trousse contient des enveloppes qui renferment chacune 15 fiches. Sur les fiches, il y a soit une équation, une situation ou une représentation d'une situation. J'ai besoin de votre aide pour réorganiser le contenu de chaque enveloppe. En équipe, vous devez regrouper chaque fiche* ***Situation*** *avec la fiche* ***Équation*** *et la fiche* ***Représentation de la situation*** *correspondantes. Puisqu'il y a 15 fiches dans l'enveloppe, vous obtiendrez alors 5 regroupements de 3 fiches.*

S'assurer que tous comprennent bien la tâche en demandant à quelques élèves de l'expliquer en leurs propres mots.

Grouper les élèves par trois. Distribuer un ensemble de 15 fiches à chaque équipe et les inviter à former les 5 regroupements de 3 fiches (situation, représentation de la situation et équation). Allouer suffisamment de temps pour que les élèves effectuent la tâche demandée.

Note : Le but de la situation d'apprentissage est d'analyser la situation et non de résoudre un problème. En omettant la question qui est habituellement posée à la fin d'une situation (p. ex., « Combien y en a-t-il en tout? »), les élèves sont moins enclins à chercher à effectuer un calcul; leur raisonnement algébrique est davantage sollicité. Il est donc essentiel de ne pas mettre l'accent sur la valeur de l'inconnue.

Faire une mise en commun des regroupements effectués par les élèves en présentant une situation à la fois. Faire ressortir les différents regroupements en posant des questions telles que :

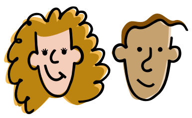
– « Pourquoi avez-vous placé ces trois fiches ensemble? »
– « Comment savez-vous que ce regroupement est acceptable? »
– « Pourquoi cette représentation va-t-elle avec cette situation et cette équation et non pas avec d'autres? »
– « Est-ce qu'il y a d'autres regroupements possibles? »
– « Quels types de représentations retrouve-t-on? »
– « Quelle équation représente le plus fidèlement cette situation? »
– « Pourquoi cette équation ne représente-t-elle pas cette situation? »

Si les élèves ont eu de la difficulté à interpréter les représentations des situations, revoir avec eux les éléments des différents modèles (p. ex., le sens de la flèche sur la droite numérique pour indiquer s'il s'agit d'un ajout ou d'un retrait, l'emplacement de l'inconnue sur la balance).

Note : Il est possible que certaines équipes forment des regroupements différents des autres équipes. Si une équipe peut justifier un regroupement de façon recevable, il est alors accepté. Par exemple, dans le regroupement A, l'équation qui représente le plus fidèlement la situation est 21 = 12 + ✙. Une équipe peut aussi présenter des arguments justifiant que l'équation ✙ + 12 = 21 est également valable. Toutefois, il serait impossible de justifier que l'équation 21 – ✙ = 12 est valable, puisque la situation donnée suppose un ajout et non un retrait. L'équation doit représenter la situation et non la stratégie qui pourrait être utilisée pour déterminer la donnée manquante. L'enseignant ou l'enseignante peut souligner que telle équation respecte plus fidèlement la situation qu'une autre, car elle suit le sens du temps et de l'action posée.

Continuer la présentation de la trousse d'algèbre en annonçant qu'en plus des enveloppes, il y a plusieurs fiches d'équations. Montrer aux élèves ces équations et leur indiquer qu'ils auront à compléter la trousse en créant une fiche Situation et une fiche Représentation de la situation correspondant à l'équation qui leur sera remise. S'assurer qu'ils ont bien saisi la tâche à effectuer en demandant à quelques élèves de l'expliquer en leurs propres mots.

PENDANT L'APPRENTISSAGE (EXPLORATION)



équipes de 2

environ
45 minutes

Grouper les élèves par deux et distribuer à chaque équipe une des équations de l'annexe 4.2 (*Équations*). Mettre à leur disposition du matériel de manipulation et des feuilles de papier brouillon.

Allouer suffisamment de temps pour leur permettre d'accomplir la tâche. Circuler parmi les équipes et inciter les élèves à réfléchir à la fidélité et à la précision de leur situation et de leur représentation. Poser des questions telles que :

– « Pourquoi avez-vous choisi cette représentation? »

– « Pouvez-vous représenter cette situation autrement? »

– « Votre modèle respecte-t-il l'équation? »

– « Est-il possible d'interpréter votre modèle d'une autre façon? »

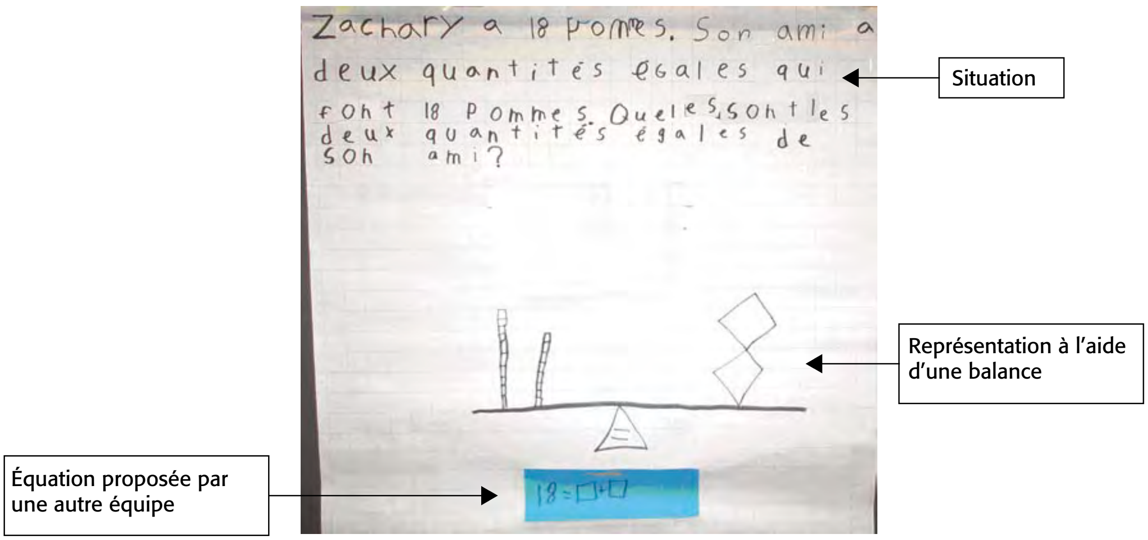
– « Quel élément de votre modèle permet de reconnaître qu'il représente l'équation? »

Observations possibles	Interventions possibles
Une équipe ne sait pas comment représenter l’équation.	Poser des questions telles que : – « Dans les représentations de situations présentées plus tôt, y en a-t-il une qui présente une équation semblable? » – « Pouvez-vous me lire l’équation et me l’expliquer avec des mots? »
Une équipe produit une représentation pour l’équation 15 – ⬡ = 8 qui ne démontre pas clairement le retrait dans l’équation. 	Poser des questions telles que : – « Est-ce une situation d’ajout ou de retrait? » – « Quel élément pouvez-vous ajouter à votre dessin pour indiquer clairement l’opération effectuée? » – « Quelle opération représentez-vous? Comment est-elle représentée? »
À partir de l’équation 16 + ⯃ = 25, une équipe ajoute la valeur de l’inconnue dans leur situation : *Dans l’autobus, il y a 16 bancs occupés et 9 bancs libres. L’autobus contient au total 25 bancs.*	Poser des questions telles que : – « Dans l’équation de départ, pouvez-vous me montrer où se trouve le 9? » – « Pourquoi y a-t-il un octogone dans l’équation? » – « Pouvez-vous modifier la situation de façon à ne pas divulguer la valeur de l’inconnue? »
Une équipe crée une représentation pour l’équation 25 = 12 + 4 + ⬠ qui ne démontre pas de façon claire la relation entre les quantités qui se retrouvent de chaque côté du signe =. 	Poser des questions telles que : – « Que représentent les lignes dans votre représentation? – « Que pourriez-vous ajouter pour démontrer plus clairement la relation entre les animaux et le nombre 25? »

Distribuer des grandes feuilles et des marqueurs aux équipes afin qu'elles puissent y transcrire leur situation et leur représentation. Préciser que l'équation ne doit pas être inscrite. Les inviter ensuite à afficher leur travail.

Une fois tous les travaux affichés, assigner à chaque équipe la tâche de proposer une équation qui correspond à la situation et à la représentation créées par une autre équipe, de l'inscrire sur un carton (préalablement distribué) et de l'appo-ser au bas de la feuille.

Exemple

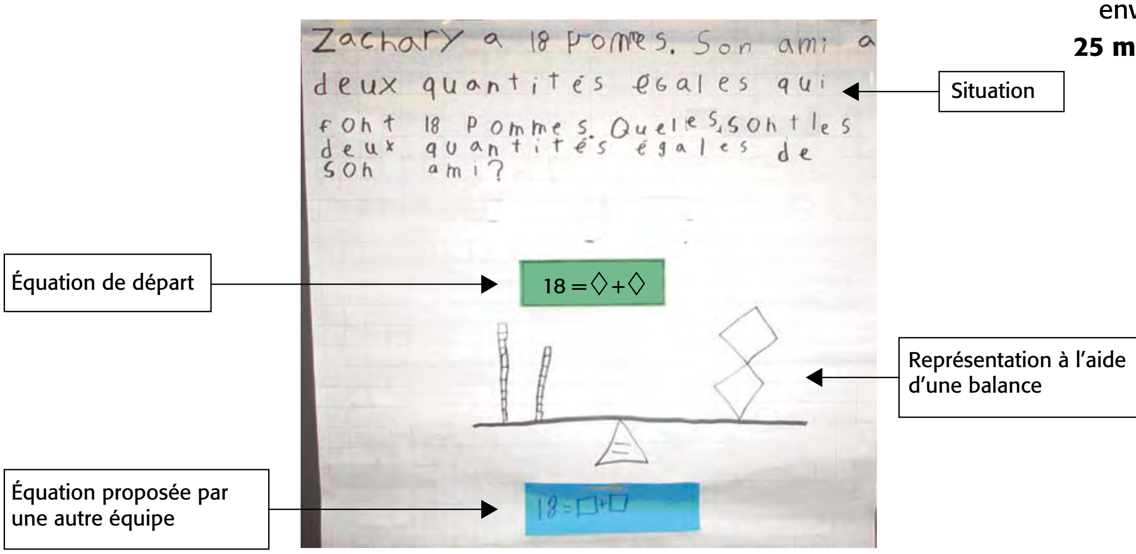


APRÈS L'APPRENTISSAGE (OBJECTIVATION/ÉCHANGE MATHÉMATIQUE)

Convier quelques équipes à justifier l'équation qu'elles ont proposée. Demander à d'autres d'expliquer la situation et la représentation qu'elles ont créées et les inviter à coller l'équation de départ sur leur feuille de travail afin de pouvoir la comparer à celle proposée par une autre équipe.

environ
25 minutes

Exemple



Les autres élèves contribuent à la communication et enrichissent l'échange mathématique en posant des questions et en faisant des observations et des interventions pertinentes. Les inciter à utiliser un vocabulaire précis. Les aider, au besoin, en posant des questions en fonction du contenu des travaux affichés. Par exemple :

– « Retrouve-t-on la même équation que celle du départ? Pourquoi? »

– « Qu'auriez-vous pu faire pour que l'équation soit respectée? »

– « Est-ce que la représentation est fidèle à l'équation? »

– « Quels éléments de la représentation vous ont permis de déterminer l'opération retrouvée dans l'équation? »

– « Comment pourrait-on améliorer cette représentation afin qu'elle soit plus fidèle à la situation proposée? »

– « Comment pourrait-on améliorer cette situation afin qu'elle soit conforme à l'équation? »

Tout au long de l'échange mathématique, inviter les élèves à établir des liens entre les équations en posant des questions qui font ressortir les ressemblances et les différences entre elles. Par exemple :

– « Remarquez-vous des ressemblances entre certaines équations de départ? Lesquelles? »

– « En quoi les équations sont-elles différentes? »

Voici des possibilités de regroupement et des justifications d'élèves.

Regroupement 1

☾ + 8 = 15	15 = 8 + ☾	8 + ♡ = 15	15 − ✚ = 8	15 − 8 = ✚

- Les nombres sont les mêmes.
- La position de l'inconnue est différente, mais sa valeur est la même.
- Trois équations représentent une somme et deux équations représentent une différence.
- Les symboles sont différents, mais la valeur de l'inconnue est la même.
- Il est possible de démontrer la propriété de la commutativité en comparant la première et la troisième équation.

Regroupement 2

25 = 12 + 4 + ⬠	12 + ☼ + 4 = 25	16 + ⯃ = 25

- Les quantités sont les mêmes.
- La position de l'inconnue est différente, mais sa valeur est la même.
- La dernière équation ressemble aux autres, car 12 plus 4, c'est la même chose que 16.

Regroupement 3

18 = ◇ + ◇	⬠ + △ = 18

- Les deux équations représentent une somme.
- Dans la première équation, les symboles sont les mêmes donc la valeur de l'inconnue doit être la même. Par contre, dans la deuxième équation, les symboles sont différents donc leur valeur devrait être différente, mais il est possible que leur valeur soit la même.

ADAPTATIONS

L'activité peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• distribuer les équations les plus simples (p. ex., ☾ + 8 = 15); • fournir un référentiel de différents modèles de représentation.	• demander aux élèves de créer une équation et de la représenter à l'aide d'une situation; • inviter les élèves à représenter l'équation de plusieurs façons différentes; • remettre aux élèves une équation plus complexe à représenter (p. ex., 2 × □ = 12).

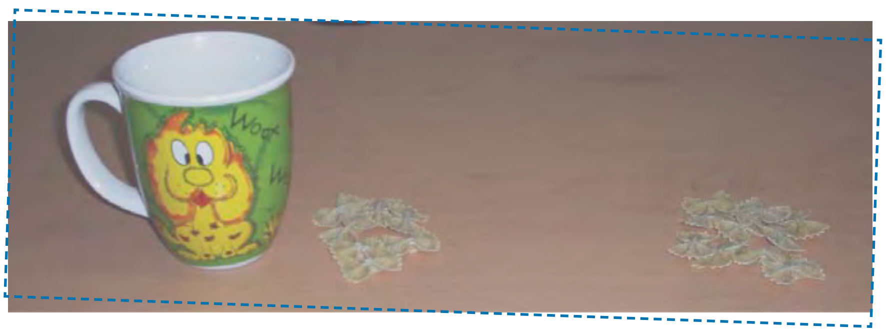
SUIVI À LA MAISON

À la maison, les élèves peuvent créer une équation comportant une addition ou une soustraction et utiliser des objets familiers pour la représenter concrètement.

Exemple

Équation créée : □ + 7 = 10

Représentation possible : une tasse pour représenter l'inconnue et des pâtes pour représenter les quantités connues.



Ils peuvent ensuite la représenter à l'aide d'une illustration et expliquer à un membre de la famille la relation entre la représentation concrète, la représentation semi-concrète et l'équation.

Le lendemain, l'enseignant ou l'enseignante invite quelques élèves à présenter leur équation et sa représentation concrète ou semi concrète, et anime un échange avec le groupe classe.

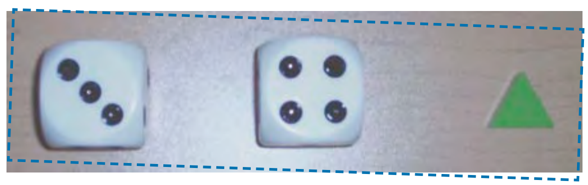
ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 1

Roule des égalités!

Tracer en gros au tableau le signe = et expliquer l'activité en ces termes :

> *Nous allons créer des équations à l'aide de dés et de mosaïques géométriques. À tour de rôle, deux élèves lancent deux dés et choisissent au hasard une mosaïque géométrique. Les nombres sur les dés de l'élève A et sa mosaïque géométrique seront utilisés pour créer l'expression algébrique qui apparaîtra à la gauche du signe = dans l'équation et ceux de l'élève B constitueront l'expression algébrique à la droite du signe.*

Par exemple, si l'élève A obtient 3 et 4 sur les dés et pige un triangle vert, il ou elle écrira 3 + 4 + ▲ à la gauche du signe =.



Si l'élève B obtient 4 et 6 sur les dés et pige un losange beige, il ou elle écrira 4 + 6 + ◊ à la droite du signe =.

On crée ainsi l'équation 3 + 4 + ▲ = 4 + 6 + ◊.

Il faut ensuite assigner des valeurs aux mosaïques géométriques tout en s'assurant de maintenir la relation d'égalité. Par exemple, si l'élève A donne la valeur 4 au triangle vert, l'élève B doit donner la valeur 1 au losange beige.

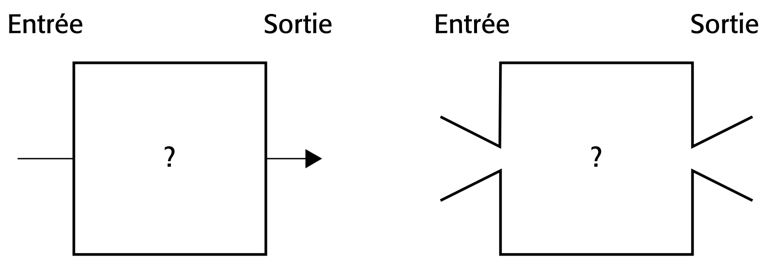
Rappeler aux élèves que dans une équation, deux symboles différents (p. ex., triangle vert et losange beige) peuvent avoir la même valeur, mais que deux symboles identiques (p. ex., deux losanges beiges) ont toujours la même valeur. Il se peut que dans certaines situations l'égalité ne puisse être établie. Par exemple, dans l'équation 3 + 4 + ▲ = 2 + 3 + ▲, l'égalité ne peut être établie. Donc, cette équation est rejetée.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 2

Machine mystère

Dessiner au tableau une machine mystère.

Exemples

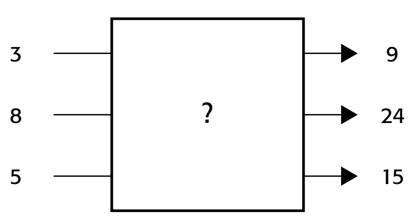


Indiquer aux élèves qu'une machine mystère est dotée d'une entrée et d'une sortie. Leur expliquer qu'on peut introduire un nombre à l'entrée et retrouver un nombre autre à la sortie, un changement s'étant effectué à l'intérieur de la machine mystère.

Écrire, par exemple, 2 à l'entrée de la machine mystère et 11 à sa sortie. Inviter les élèves à analyser ce qui se passe dans la machine mystère, en posant les questions suivantes :

- « Quel travail s'effectue dans la machine mystère? » (*9 est ajouté*)
- « Qu'arriverait-il si le nombre 4 au lieu du 2 était inséré dans la machine mystère? » (*13 en sortirait*)
- « Quel nombre doit entrer dans la machine mystère afin que 24 en ressorte? » (*15*)

Présenter ensuite la machine mystère suivante.



Consigner dans une table de valeurs les entrées et les sorties.

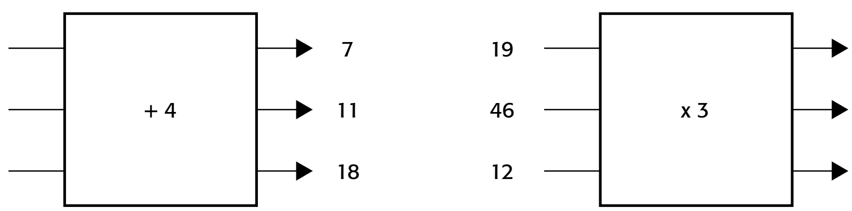
Table de valeurs

Entrée	Sortie
3	9
8	24
5	15

Déterminer en groupe classe le changement opéré par la machine mystère (× 3). Il s'agit de voir la relation entre le nombre à l'entrée et celui à la sortie.

Proposer aux élèves de reprogrammer la machine mystère et de présenter aux autres quelques nombres qui y entrent et y sortent. Ils peuvent aussi présenter l'opération dans la machine mystère et seulement les nombres à l'entrée ou seulement les nombres à la sortie.

Exemple



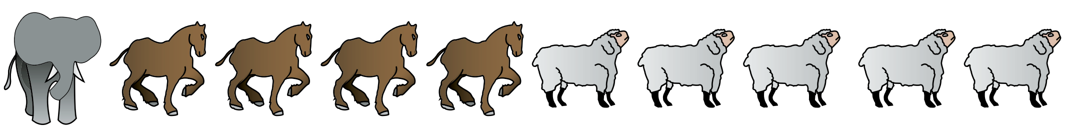
Note : En 4e année, il est préférable de s'en tenir à des machines mystères qui effectuent une seule opération.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 3

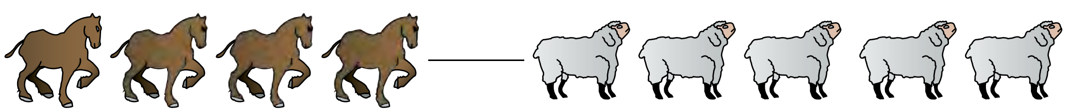
Souque à la corde

Annoncer à la classe qu'une histoire farfelue leur sera racontée. Commencer la lecture :

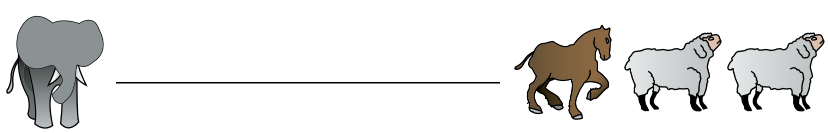
> *Lors d'une fête, 1 éléphant, 4 chevaux et 5 moutons se rencontrent dans un parc pour une compétition de souque à la corde. Ils décident de faire trois parties.*



> *Pour la première partie, les 4 chevaux se placent d'un côté et les 5 moutons de l'autre. Lorsqu'ils tirent sur la corde, on constate que les deux équipes sont de forces égales.*



> *Pour la deuxième partie, l'éléphant se place d'un côté, tandis que de l'autre on retrouve 1 cheval et 2 moutons. Encore une fois, on constate que les deux équipes sont de forces égales.*

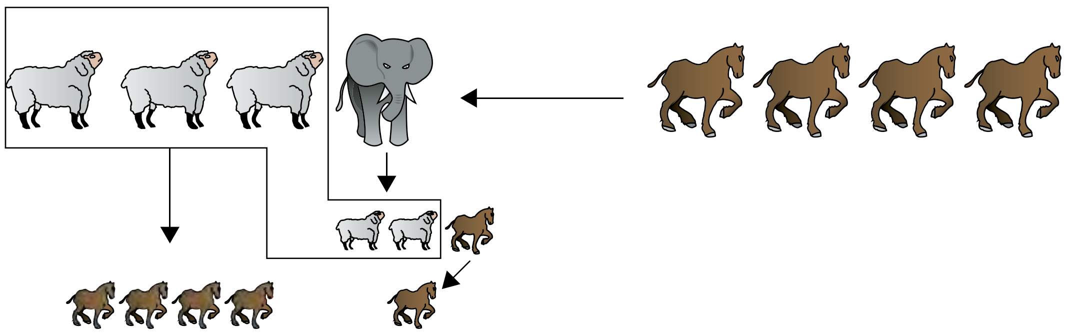


> *Pour la troisième partie, l'éléphant et 3 moutons se placent d'un côté tandis que de l'autre on retrouve 4 chevaux. Le sifflet est entendu et l'affrontement commence.* ***Quelle équipe gagnera la partie?***

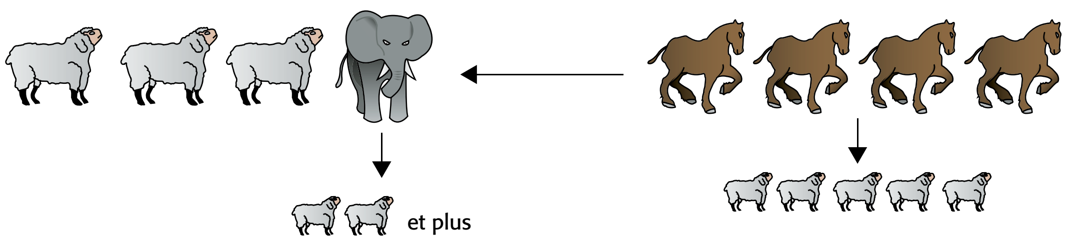
Regrouper les élèves par deux et les inviter à trouver la réponse. Mettre à leur disposition du matériel de manipulation. Leur demander de laisser des traces de leur raisonnement afin de pouvoir justifier leur réponse au cours de l'échange mathématique.

Voici des réponses possibles d'élèves :

- Les moutons et l'éléphant gagneront la partie parce que l'éléphant équivaut à 2 moutons et 1 cheval, alors si je remplace l'éléphant par 2 moutons et 1 cheval, je me retrouve donc avec 5 moutons et 1 cheval. Puisque 5 moutons équivalent à 4 chevaux, alors 5 moutons et 1 cheval sont plus forts que 4 chevaux.



- Les 3 moutons et l'éléphant gagneront la partie parce que 4 chevaux équivalent à 5 moutons et l'éléphant est plus fort que 2 moutons.



Demander aux élèves ce qu'il faudrait faire pour rétablir l'égalité des forces dans cette troisième partie (p. ex., ajouter un 5e cheval du côté droit, remplacer l'éléphant par 2 moutons).

Note : Ce type d'activité fait appel au raisonnement algébrique et logique ainsi qu'aux notions d'égalité et d'inégalité.

ANNEXE 4.1

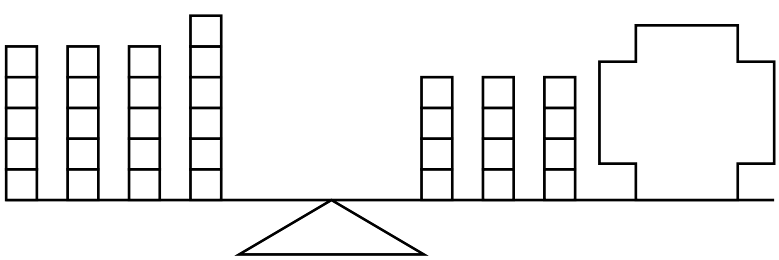
Ensemble de 15 fiches

Fiches du regroupement A

Situation

Manon a aujourd’hui 21 fiches d’artistes dans sa collection. En septembre, elle n’en avait que 12. Elle en a donc ajouté depuis le début de l’année.

Représentation de la situation



Équation

$$21 = 12 + \square$$

ANNEXE 4.1 (suite)

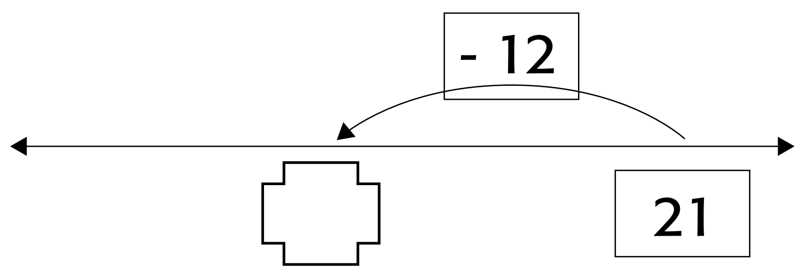
Fiches du regroupement B

Situation

Daniel a 21 billes pour jouer.

Il en perd 12. Il lui en reste un certain nombre.

Représentation de la situation



Équation

$$21 - 12 = \square$$

ANNEXE 4.1 (suite)

Fiches du regroupement C

Situation

Monsieur Jocelyn a 21 élèves dans sa classe. À la cloche, certains élèves partent, car ils doivent participer à un tournoi de soccer. Monsieur Jocelyn se retrouve avec seulement 12 élèves.

Représentation de la situation

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Équation

$$21 - \square = 12$$

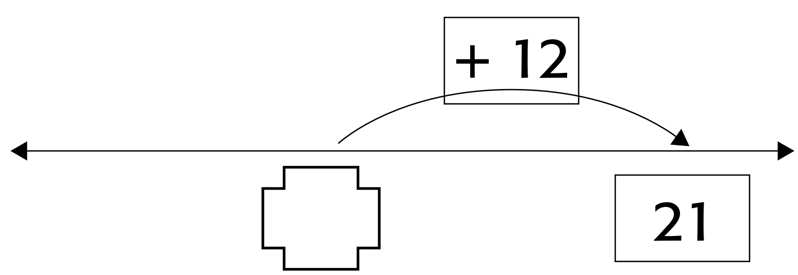
ANNEXE 4.1 (suite)

Fiches du regroupement D

Situation

Malaïka a commencé à collectionner des coquillages. Elle va en voyage et en rapporte 12 autres. Elle est contente de constater que sa collection compte maintenant 21 coquillages.

Représentation de la situation



Équation

$$\square + 12 = 21$$

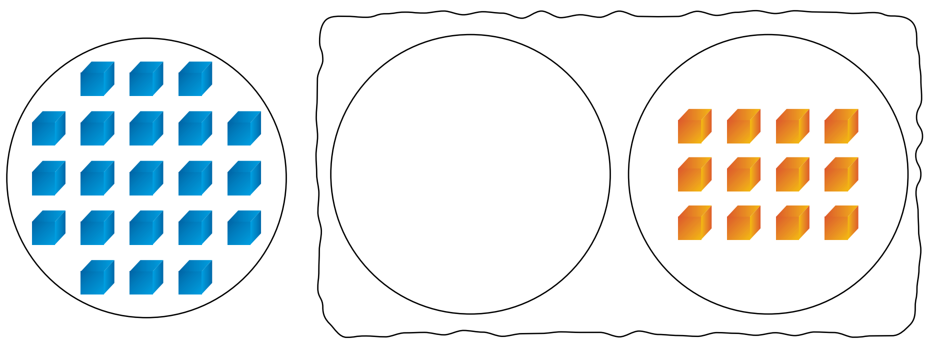
ANNEXE 4.1 (suite)

Fiches du regroupement E

Situation

L'équipe de Benoît doit accumuler 21 points pour accéder à la ronde éliminatoire. Des points sont alloués pour l'esprit sportif. Grâce à ses victoires, elle a déjà accumulé 12 points.

Représentation de la situation

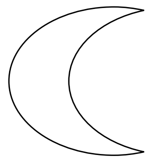


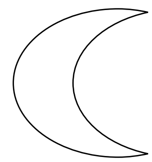
Équation

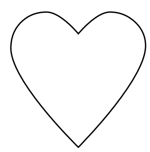
$$21 = \square + 12$$

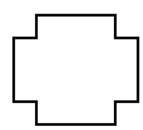
ANNEXE 4.2

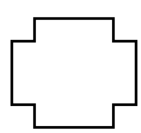
Équations

 + 8 = 15

15 = 8 + 

8 +  = 15

15 - 8 = 

15 -  = 8

ANNEXE 4.2 (suite)

12 + ☼ + 4 = 25

25 = 12 + 4 + ⬠

16 + ⯃ = 25

18 = ◇ + ◇

⬠ + △ = 18

Situation d'apprentissage, 5e année

Club vidéo

GRANDE IDÉE : RELATIONS

SOMMAIRE

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves résolvent une situation-problème de la vie courante qui fait appel au concept de relation. Ils utilisent diverses stratégies pour déterminer une règle définissant une relation donnée et ils l'expliquent verbalement.

Matériel

- cubes emboîtables (environ 1 000)
- annexes 5.1A et 5.1B (1 copie par équipe)
- marqueurs de bingo (1 par équipe)
- annexe 5.2 (1 copie par équipe)

INTENTION PÉDAGOGIQUE

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à représenter de différentes façons la relation correspondant à une situation donnée;
- à communiquer en mots la règle qui définit cette relation.

ATTENTE ET CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Attente

L'élève doit pouvoir résoudre des problèmes portant sur les relations à l'aide de différentes stratégies.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

– décrire et représenter une relation simple à l'aide de dessins, de mots, de nombres ou d'une table de valeurs (p. ex., relation entre le nombre de pas et la distance parcourue, entre la longueur des côtés d'un carré et son périmètre);

– déduire et déterminer la règle d'une relation à partir de matériel concret, d'une illustration ou d'une expérience vécue;

– expliquer la règle d'une relation par des énoncés simples en langage courant.

Durée approximative de la situation d'apprentissage : **150 minutes**

CONTEXTE

Au cycle primaire, les élèves ont appris à repérer et à décrire une régularité dans une suite non numérique et dans une suite numérique. En 4e année, ils représentent, à l'aide de tables de valeurs, des relations simples correspondant à diverses situations. En 5e année, ils poursuivent l'étude des relations et apprennent à les définir à l'aide de règles exprimées en mots.

PRÉALABLES

La présente situation d'apprentissage permet aux élèves de faire appel à différentes représentations d'une relation. Le passage d'une représentation à une autre facilite l'analyse de la relation et aide les élèves à l'expliquer.

Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent pouvoir :

- représenter une situation de façon concrète ou semi-concrète (p. ex., à l'aide d'une suite non numérique à motif croissant);
- représenter une relation simple à l'aide d'une table de valeurs;
- repérer la régularité d'une suite;
- prolonger une suite.

L'annexe 5.4 (*Activité préparatoire facultative : Suite non numérique à motif croissant*) permet aux élèves de consolider certains concepts reliés aux suites non numériques à motif croissant. S'en servir au besoin pour vérifier si les élèves ont acquis les préalables nécessaires à la réalisation de la présente situation d'apprentissage.

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Régularité, relation, suite numérique, suite non numérique, règle, table de valeurs.

AVANT L'APPRENTISSAGE (MISE EN TRAIN)

Revoir avec les élèves le concept de relation et certaines de ses représentations à l'aide de la situation suivante :

La fin de semaine, Dimitri et Anouka choisissent parfois de louer des films au club vidéo Extrême. Le coût de location est de 5 $ par film.

environ
60 minutes

Poser les questions suivantes :

– « Si Dimitri et Anouka louent 5 films, combien cela leur coûte-t-il? Pourquoi? »

– « Après avoir loué 17 films, combien auront-ils dépensé à ce club vidéo? Qu'avez-vous fait pour déterminer ce montant? »

Ensuite, construire avec les élèves une table de valeurs qui représente la relation entre le nombre de films loués et la somme déboursée en dollars.

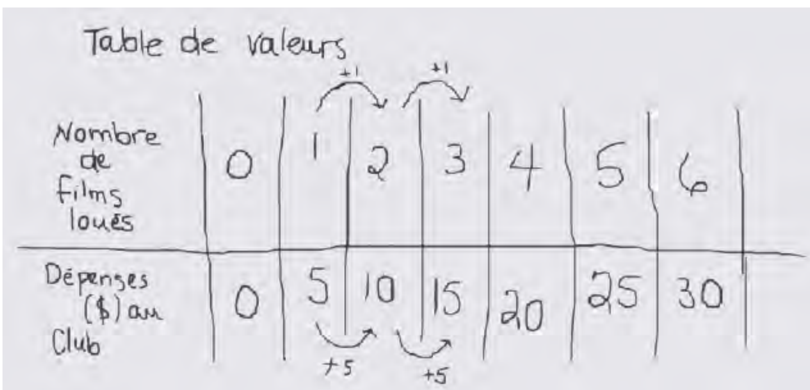


Table de valeurs

Nombre de films loués	0	1	2	3	4	5	6
Dépenses ($) au Club	0	5	10	15	20	25	30

Inciter les élèves à analyser les relations entre les nombres en posant des questions telles que :

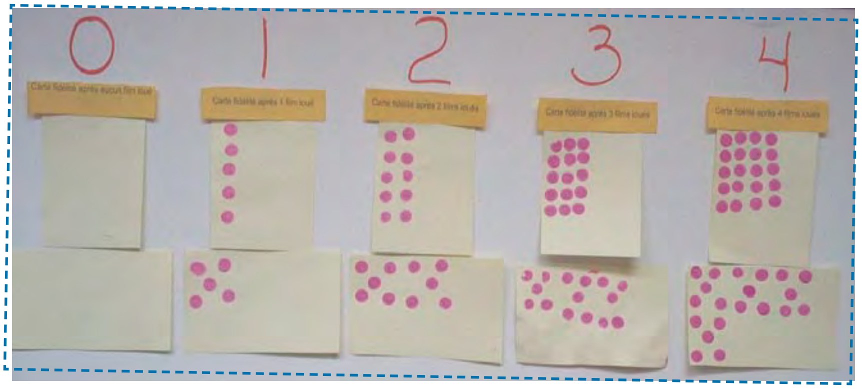
– « Si vous examinez la rangée intitulée "Nombre de films loués" dans la table de valeurs, que constatez-vous? » (*D'une colonne à l'autre, il y a toujours un film de plus que dans la colonne précédente. Donc, il y a une régularité de + 1.*)

– « Si vous examinez la rangée intitulée "Dépenses ($) au club" dans la table de valeurs, que constatez-vous? » (*D'une colonne à l'autre, il y a toujours 5 $ de plus que dans la colonne précédente. Donc, il y a une régularité de + 5.*)

– « Quelle relation remarquez-vous entre le nombre de films loués et la somme déboursée? » (*La somme déboursée est toujours 5 fois plus grande que le nombre de films loués.*)

Mentionner aux élèves que le club vidéo Extrême tient une carte de fidélité pour chacun de ses clients et clientes. Préciser qu'un tampon est apposé sur la carte pour chaque dollar dépensé au club vidéo.

Montrer à la classe la carte de fidélité d'un client qui n'a pas encore loué de film et celle de clients qui ont loué respectivement 1, 2, 3 et 4 films au club vidéo Extrême. La photo ci-après illustre deux exemples de séries de cartes de fidélité représentant la somme déboursée en fonction du nombre de films loués. Ainsi, après la location d'un film au coût de 5 $, il y a 5 tampons sur la carte, après la location d'un deuxième film, il y en a 10 et ainsi de suite.



Note : La suite non numérique à motif croissant ainsi créée par les représentations des cartes de fidélité permet de repérer plus facilement la régularité. Il est important de commencer la suite par la représentation d'une carte de fidélité sans aucune location de film, car dans les situations subséquentes, certains clubs vidéo exigeront un coût d'abonnement avant de pouvoir louer un film.

Amener les élèves à verbaliser une règle qui définit cette relation en posant des questions telles que :

- « Pouvez-vous décrire la carte de fidélité d'une cliente qui a loué 12 films? Combien la cliente a-t-elle dépensé à ce club vidéo? »
- « Après avoir loué 20 films, combien un client a-t-il dépensé à ce club? Qu'avez-vous fait pour trouver la réponse? »
- « Pouvez-vous trouver une façon rapide de déterminer la somme déboursée peu importe le nombre de films loués? »

Voici un exemple d'une règle exprimée en langage courant par une élève : « Sur la carte de fidélité après la location de 20 films, il y aura 20 colonnes de 5, donc 100 tampons. Chaque tampon représente 1 $ déboursé. Alors, on multiplie toujours par 5. »

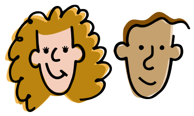
Afin d'aider cette élève à préciser sa pensée et à exprimer clairement sa règle, poser des questions telles que :

– « Qu'est-ce qu'on multiplie par 5? » (*Le nombre de films loués.*)

– « En multipliant le nombre de films loués par 5, qu'est-ce qu'on obtient? » (*La somme déboursée.*)

L'élève peut alors exprimer une règle plus précise : « Lorsque je multiplie le nombre de films loués par 5, j'obtiens la somme déboursée. »

Expliquer aux élèves que lorsqu'on décrit une façon rapide de déterminer la valeur d'un terme quelconque (p. ex., la somme déboursée) dans une suite, on exprime une **règle** définissant une relation entre les termes de la suite.



équipes de 2

Grouper les élèves par deux. Distribuer une copie des annexes 5.1A et 5.1B à chaque équipe et lire à haute voix la situation suivante.

> *Dans le quartier de Dimitri et Anouka, un nouveau club vidéo, Film Plus, vient d'ouvrir. Pour devenir membre du club, on doit payer un* ***abonnement de 4 $*** *lors de la première visite. La location de chaque film coûte ensuite 5 $. Donc, si on inclut le coût de l'abonnement, on aura déboursé 9 $, 14 $, 19 $ et 24 $ après avoir loué successivement 1 film, 2 films, 3 films et 4 films.*

Lire aussi les questions présentées à l'annexe 5.1A et s'assurer que les élèves saisissent bien la tâche à accomplir.

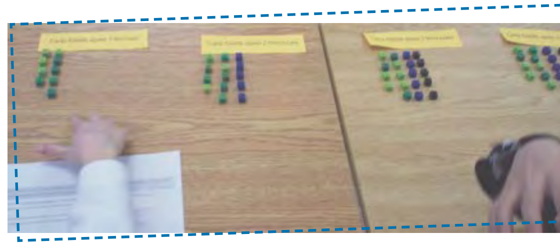
Note : L'avantage pour les élèves de débuter, à la question 1, avec une représentation concrète de la situation plutôt qu'avec une représentation semi-concrète telle qu'un dessin, c'est de pouvoir réorganiser rapidement le matériel en cas d'erreur au lieu d'avoir à effacer ou à tout recommencer. La plupart des élèves n'auront aucune difficulté à représenter la suite de cartes de fidélité pour les films loués, mais certains auront tendance à oublier de représenter la *Carte de fidélité après 0 film loué*. Les amener à reconnaître qu'un abonnement de 4 $ est exigé et qu'ils doivent représenter une carte de fidélité comprenant seulement ce montant.

Inviter les équipes à effectuer la tâche. Observer leur travail et intervenir au besoin. Veiller particulièrement à ce que les élèves construisent une suite non numérique à motif croissant qui montre clairement la régularité dans cette situation. Au besoin, poser des questions telles que :

- « Est-ce que l'ajout des cubes (jetons, tampons…) s'effectue toujours de la même façon et dans le même ordre? »
- « Qu'y a-t-il de semblable d'une carte à l'autre dans la suite que vous avez construite? »
- « Qu'y a-t-il de différent d'une carte à l'autre? »
- « Quelle est la régularité de cette suite? »
- « Combien y a-t-il de tampons d'apposés sur la *Carte de fidélité après 0 film loué*? Pourquoi? »

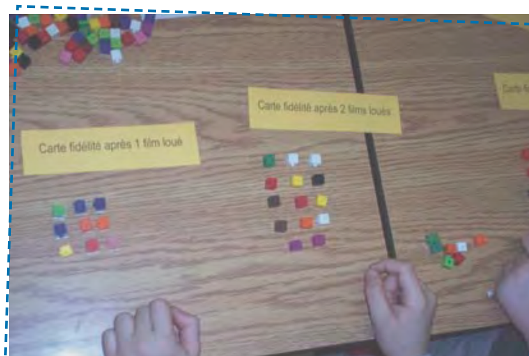
Voici quelques exemples de travaux d'élèves.

Exemple 1



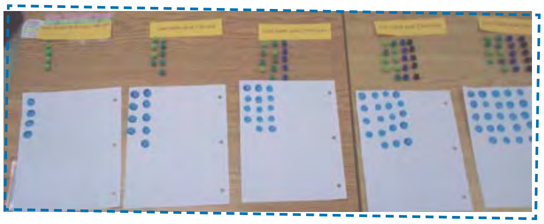
Cette équipe a représenté la somme déboursée après la location de 1 film, soit 9 $, par un groupe de 4 cubes et un groupe de 5 cubes. Puis, elle a ajouté successivement 5 cubes dans chacune des représentations subséquentes. Toutefois, elle n'a rien placé sous l'étiquette *Carte de fidélité après 0 film loué*.

Exemple 2

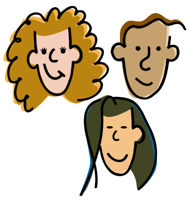


Cette équipe a simplement établi une correspondance entre chaque somme déboursée et le nombre de cubes utilisés pour la représenter, sans se préoccuper de leur disposition. Puisque la suite créée n'est pas à motif croissant, on ne peut repérer facilement l'ajout de 5 cubes d'une représentation à l'autre. Il est donc plus difficile de décrire la régularité et d'élaborer une règle qui définit la relation entre le nombre de films loués et la somme déboursée.

Exemple 3



Cette équipe a organisé le matériel de manipulation en respectant la régularité, créant ainsi une suite non numérique concrète. Elle a ensuite produit une suite non numérique semi-concrète de cartes de fidélité à l'aide d'un marqueur de bingo. En créant ces deux suites, cette équipe a représenté la situation de façon claire et précise. Il leur sera alors plus facile d'élaborer une règle correspondant à cette situation.



Lorsque les équipes ont terminé la tâche (annexe 5.1A), demander à quelques équipes choisies d'afficher leur suite de cartes de fidélité. En groupe classe, revoir les questions en vérifiant la pertinence des suites affichées.

Inciter les élèves à comparer les clubs vidéo Extrême et Film Plus et à élaborer une règle pour chacune des situations en posant des questions telles que :

– « Quel est le coût de location de 5 films dans chacun des clubs? »

[*Chez Extrême, le coût est de 25 $ (5 films × 5 $) et chez Film Plus, il est de 29 $, car on doit ajouter le coût de l'abonnement de 4 $.*]

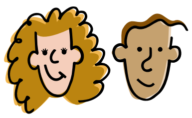
– « Qu'est-ce que les deux clubs ont de semblable et de différent? »

(*Ce qu'ils ont de semblable, c'est le coût de location de 5 $ par film et ce qu'ils ont de différent, c'est la présence ou l'absence d'un coût d'abonnement de 4 $.*)

– « Comment pourrions-nous déterminer rapidement la somme déboursée selon le nombre de films loués à chaque club? »

(*Afin de déterminer rapidement la somme déboursée au club vidéo Extrême, on multiplie le nombre de films loués par 5 tandis qu'au club vidéo Film Plus, on multiplie aussi le nombre de films loués par 5, puis on ajoute le coût de l'abonnement de 4 $.*)

Note : Il est important de reconnaître qu'une règle peut être exprimée différemment par les élèves selon la perception qu'ils se font de la relation (voir p. 54-64).


équipes de 2


environ
70 minutes

PENDANT L'APPRENTISSAGE (EXPLORATION)

Préparer les cinq scénarios suivants en inscrivant les caractéristiques de chacun dans les cases appropriées de copies de l'annexe 5.2 (*Nouveau club vidéo*).

Scénario	Coût de l'abonnement	Coût de la location par film
1	5 $	4 $
2	0 $	6 $
3	5 $	6 $
4	6 $	5 $
5	50 $	2 $

Présenter la situation suivante :

Dans l'activité précédente, nous avons analysé les sommes déboursées dans deux clubs vidéo. Dimitri et Anouka viennent d'apprendre qu'une entreprise prévoit ouvrir un troisième club vidéo dans leur quartier. L'entreprise étudie différents scénarios quant aux coûts de l'abonnement et de la location par film. Afin de prendre une décision éclairée, elle fait appel à vos services pour dresser un rapport détaillé sur chacun des scénarios possibles.

Former des équipes de deux. Distribuer un scénario à chaque équipe. S'assurer de répartir les cinq scénarios entre les équipes. Expliquer les composantes du rapport à soumettre à l'entreprise, soit :

- un exemple d'une suite de cartes de fidélité correspondant à la location de 0 film, de 1 film, de 2 films, de 3 films et de 4 films en n'oubliant pas d'inclure le coût de l'abonnement s'il y a lieu;
- une table de valeurs qui représente la relation entre le nombre de films loués et la somme dépensée;
- l'énoncé en mots d'une règle qui permet de déterminer rapidement la somme déboursée par un client ou une cliente en fonction du nombre de films loués;
- un nom pour le nouveau club vidéo.

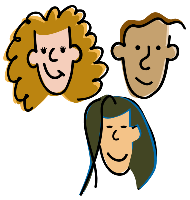
Inviter les équipes à accomplir la tâche. Circuler et intervenir au besoin. Porter une attention particulière à la façon dont les élèves organisent les éléments (tampons) sur les cartes de fidélité.

Observations possibles	Interventions possibles
Une équipe n'arrive pas à organiser les tampons sur les cartes de fidélité.	Suggérer de représenter d'abord la situation avec du matériel concret. Poser ensuite des questions telles que : – « Est-ce qu'il y a un abonnement à payer dans votre scénario? » – « Quel est le coût de location d'un film? » – « Quelle est la somme déboursée si un client ou une cliente paye un abonnement sans louer de film? » – « Quelle est la somme totale dépensée après la première location? »
Une équipe qui a le scénario 1 a oublié de tenir compte du coût de l'abonnement (5 $) et a représenté uniquement le coût de la location des films (4 $ par film loué). 	Poser des questions telles que : – « Combien aurez-vous dépensé après la location d'un film selon votre scénario? » – « Y a-t-il un abonnement exigé dans votre scénario? Si oui, quel est son coût? » – « Est-ce que le coût de l'abonnement fait partie de la somme dépensée après une ou plusieurs locations? »
Une équipe qui a le scénario 4 organise les tampons sans créer une suite non numérique à motif croissant. La quantité est respectée, mais l'organisation ne permet pas de voir facilement l'ajout de 5 d'une carte à l'autre.	Amener les élèves à reconnaître que les tampons doivent être ajoutés dans un ordre précis en posant des questions telles que : – « Combien avez-vous apposé de tampons sur la carte de fidélité après 0 film loué? » – « Combien avez-vous ajouté de tampons additionnels entre la 1^re^ et la 2^e^ location? Où ont-ils été ajoutés? » – « Est-ce que vous pouvez voir l'ajout d'un groupe sur chaque carte de fidélité? » – « Est-ce que l'ajout de ce groupe de tampons est toujours fait de la même façon? » – « Comment pouvez-vous organiser les tampons pour éviter ce problème? »

Observations possibles	Interventions possibles
Une équipe qui a représenté correctement le scénario n'arrive pas à communiquer une règle en mots.	Inciter les élèves à analyser leur représentation du scénario (table de valeurs ou la suite de cartes de fidélité) en posant des questions telles que : – « Dans votre scénario doit-on payer un abonnement? Combien coûte-t-il? » – « Est-ce que ce coût fait partie de la somme totale dépensée? » – « Chaque fois qu'on loue un film, est-ce que le coût de l'abonnement est inclus dans la somme dépensée? Comment le voit-on sur les cartes de fidélité? » – « De quoi aurait l'air la carte après 10 films loués? Combien y aura-t-il de tampons? Comment avez-vous déterminé ce nombre? » – « De quelle façon pouvez-vous déterminer le nombre de tampons sur une carte de fidélité? »

Demander aux équipes d'afficher les composantes de leur rapport sur une grande feuille (voir l'annexe 5.3 pour des exemples de rapport). Assigner à chaque équipe un type de présentation à suivre (voir *Types de présentations* ci-après). Allouer le temps nécessaire pour leur permettre d'élaborer une présentation claire et précise. Une fois la tâche accomplie, demander aux équipes d'afficher leur rapport sur les murs de la classe.

APRÈS L'APPRENTISSAGE (OBJECTIVATION/ÉCHANGE MATHÉMATIQUE)



Inviter quelques équipes choisies à venir, à tour de rôle, présenter leur rapport.

environ
20 minutes

Types de présentations

1. Certaines équipes peuvent présenter leur rapport **en donnant des explications sur leur démarche**. Voici quelques exemples d'explications d'élèves :

– Lorsque nous avons reçu notre scénario, nous savions que pour aucun film loué il y aurait quand même une somme dépensée parce qu'il y a un abonnement à payer.

– Puisque le prix de location est de 6 $ par film, alors on sait que pour chaque film loué, on devra débourser 6 $ et ajouter 6 tampons sur la carte de fidélité.

– Au début, on a mis les tampons n'importe comment sur les cartes, puis on s'est rendu compte qu'il était difficile de voir la régularité. On a donc refait les cartes en réorganisant les tampons pour mieux la voir.

– En examinant notre suite de cartes de fidélité, on peut remarquer la présence d'un coût d'abonnement et l'ajout de 6 tampons d'une carte à l'autre puisque, selon notre scénario, chaque film coûte 6 $.
Note : L'élève appuie ses explications en utilisant la suite de cartes de fidélité.

2. Certaines équipes peuvent présenter leur rapport **en posant des questions d'interprétation** telles que :

– « Est-ce que quelqu'un peut nous dire combien coûte la location d'un film dans ce club? »

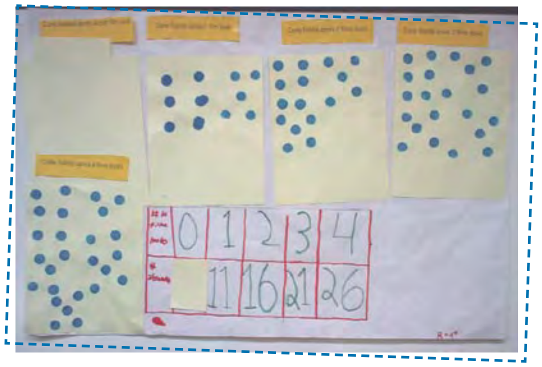
– « Parmi les clubs vidéo affichés au tableau, est-ce qu'il y en a un qui présente la même situation que la nôtre? Lequel et pourquoi? »

– « Pouvez-vous nous dire si ce club exige un abonnement? Si oui, combien coûte-t-il? »

– « À l'aide de la suite de cartes de fidélité ou de la table de valeurs, qui peut nous dire de quoi aurait l'air la carte après 15 films loués dans ce club? »

– « Quelqu'un peut-il expliquer dans ses propres mots une règle qui définit la relation entre le nombre de films loués et la somme dépensée à ce club? »

3. D’autres équipes peuvent présenter leur rapport **en cachant certains éléments**, par exemple, la carte de fidélité affichant 0 film loué et le terme sous le 0 dans la table de valeurs (voir photo ci-contre). En posant des questions, les membres de l’équipe amènent les autres élèves à identifier les éléments cachés et à déterminer la règle qui définit la relation dans ce scénario.



Inciter les élèves à réagir à chacune des présentations et à faire part de leurs observations ou de leurs questions. Faciliter le déroulement de l’échange mathématique en posant au besoin des questions telles que :

– « Lorsque vous avez reçu votre scénario, par quel modèle de représentation avez-vous commencé (matériel de manipulation, tampons, table de valeurs)? »

– « Qui peut expliquer dans ses mots la disposition des tampons sur les cartes de fidélité qu’on vient de présenter? »

– « Est-ce que vous avez utilisé du matériel de manipulation avant de représenter votre scénario sur des cartes de fidélité? Si oui, est-ce que cela vous a facilité la tâche? »

– « Ces deux équipes avaient le même scénario, mais leurs cartes de fidélité sont différentes. Comment peut-on justifier qu’elles représentent bel et bien ce scénario? »

– « Selon le scénario qu’on vient d’examiner, de quoi aurait l’air la carte de fidélité après 6 films loués? 10 films loués? »

– « Comment s’y prend-on pour déterminer le nombre de tampons sur d’autres cartes de fidélité? Quelle règle définit la relation dans ce scénario? »

ADAPTATIONS

L'activité peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• remettre le scénario 2 pour lequel il n'y a pas de frais d'abonnement; • simuler une visite à un club vidéo pour aider les élèves à comprendre que le coût de la location est ce qui est toujours ajouté sur la carte de fidélité et que le coût d'abonnement n'est payé qu'une fois, soit lors de l'abonnement, mais qu'il demeure dans la somme déboursée.	• ajouter une variante à un des cinq scénarios, soit que la location du premier film seulement est offerte au prix spécial de 1 $; • demander aux élèves d'exprimer la règle à l'aide d'une équation, où chacune des variables est définie.

SUIVI À LA MAISON

À la maison, les élèves font part de la situation d'apprentissage vécue en classe à un membre de leur famille, puis présentent les tables de valeurs ci-dessous. Ensemble, ils comparent les coûts et déterminent une règle qui définit la relation entre le nombre de films loués et la somme dépensée dans chaque club vidéo afin de répondre aux questions suivantes :

1. « Quel club est le plus avantageux pour quelqu'un qui loue 7 films? »
   (*Le club vidéo 1*)
2. « Quel club est le plus avantageux pour quelqu'un qui loue 20 films? »
   (*Le club vidéo 2*)

Club vidéo 1

Nombre de films loués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Somme déboursée ($)	**0**	**6**	**12**	**18**	**24**	**30**

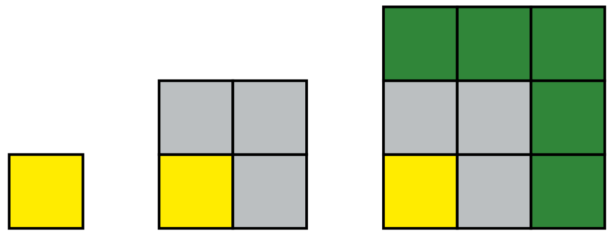
Club vidéo 2

Nombre de films loués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Somme déboursée ($)	**30**	**32**	**34**	**36**	**38**	**40**

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 1

Un carré, des carrés

Présenter aux élèves la suite suivante et leur demander de tracer le quatrième dallage.



Dallage 1 Dallage 2 Dallage 3

Inviter les élèves à déterminer la régularité et à l'utiliser afin de tracer le cinquième dallage. Leur demander ensuite de construire une table de valeurs qui représente la relation entre le numéro du dallage et le nombre de carrés qui le composent.

Numéro du dallage	1	2	3	4	5	6
Nombre de carrés	1	4	9	16	25	?

Afin d'amener les élèves à analyser la relation entre le numéro du dallage et le nombre de carrés qui le composent, poser des questions telles que :

– « Quel est le prochain nombre de carrés à inscrire dans le tableau? Comment l'avez-vous déterminé? »

– « Peut-on créer un tel dallage avec 15 carrés? 49 carrés? 81 carrés? 50 carrés? Expliquez. »

– « Dans cette suite, comment peut-on déterminer le nombre de carrés nécessaires pour construire un dallage quelconque? »

– « Combien de carrés composeront le 10e dallage? le 12e dallage? le 20e dallage? »

– « Qu'est-ce que tous les nombres de carrés ont de particulier? »

– « Quelle est la relation entre le numéro du dallage et le nombre de carrés? »

Afin d'amener les élèves à reconnaître que le nombre de carrés qui composent un dallage correspond toujours au carré du numéro du dallage (ou à l'aire du dallage), lire les valeurs de la table à voix haute (6, 36; 5, 25; 4, 16…).

Inciter les élèves à examiner les dallages par rapport au nombre de rangées et de colonnes (p. ex., le 3e dallage est composé de 3 rangées de 3 carrés ou 3 colonnes de 3 carrés) ou à penser aux faits de multiplication.

– « Connaissez-vous le nom qu'on utilise pour identifier les nombres 1, 4, 9, 16…? »

Expliquer que ces nombres sont appelés les nombres carrés. Le nom vient de la forme carrée d'un arrangement d'un tel nombre d'objets. Par exemple, 81 est un nombre carré, car on peut créer un dallage carré (9 sur 9) avec 81 carrés alors que 24 ne l'est pas puisqu'on ne peut créer que des dallages de forme rectangulaire (1 sur 24, 2 sur 12, 3 sur 8 et 4 sur 6) avec 24 carrés.

Prolongement

Inviter les élèves à examiner les ajouts de carrés dans la suite de dallages. On peut reconnaître que d'un dallage à l'autre, on ajoute toujours un nombre impair de carrés.

Construire un tableau similaire à celui ci-dessous.

Numéro du dallage	1	2	3	4	5
Nombre de carrés	1	4	9	16	…
Nombre de carrés par couleur	1 carré jaune	1 carré jaune 3 carrés gris	1carré jaune 3 carrés gris 5 carrés verts	1 carré jaune 3 carrés gris 5 carrés verts 7 carrés…	…

À l'aide de questions, amener les élèves à formuler une généralisation telle que *la somme des premiers nombres impairs consécutifs est toujours un nombre carré*. Leur demander ensuite de vérifier si cette généralisation s'applique aussi aux nombres pairs.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 2

Stratège

Expliquer les règles du jeu *Stratège*. Le jeu se joue à deux et se déroule sur une bande comme celle-ci :

0	1	2	3	4	5	6	7	8

Voici les règles du jeu :

- En partant de « 0 », on déplace le jeton à tour de rôle vers la droite.
- On peut avancer le jeton d'une case ou de deux cases.
- La première personne qui arrive sur la case « 8 » perd la joute.

Grouper les élèves par deux et leur remettre une copie de l'annexe 5.5 (*Stratège*). Inviter les élèves à jouer en notant le déroulement du jeu sur l'annexe 5.5 afin de pouvoir l'analyser et déterminer des régularités dans les résultats.

Exemple

0	~~1~~	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	~~8~~

Le joueur X a perdu.

Pendant le jeu, poser la question : « Y a-t-il une stratégie qui assure la victoire? » Un peu plus tard, poser la question : « Y a-t-il une stratégie qui permet au joueur ou à la joueuse qui joue en premier de s'assurer de la victoire? » Dire aux élèves que lorsqu'ils découvrent une stratégie gagnante, ils doivent l'expliquer clairement par écrit.

Voici un exemple d'explication d'élève :

« Afin de gagner, le premier joueur (A) doit placer le jeton sur la case 1. Après, il contrôle le jeu. Peu importe ce que l'autre joueur (B) décide de faire, le joueur A doit se rendre à la case 4 et ensuite à la case 7. De cette façon, le joueur B devra toujours jouer un tour en partant du 7 et se rendre au 8 et… perdre. En résumé, le joueur A peut toujours gagner s'il dépose successivement son jeton sur les cases 1, 4 et 7. »

0	1	2	3	4	5	6	7	8
	A			A			A	B

B avance d'une ou de deux cases   B avance d'une ou de deux cases

Inviter ensuite les élèves à jouer avec un jeu contenant un autre nombre de cases et à vérifier si la stratégie gagnante reste la même ou si elle doit être modifiée.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 3

Une régularité : Plusieurs relations

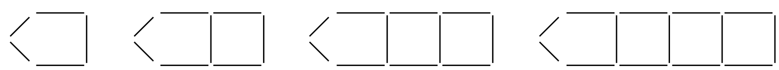


Figure 1   *Figure 2*   *Figure 3*   *Figure 4*

Suite 1

Indiquer aux élèves qu'on s'intéresse à la relation entre le numéro de la figure et le nombre de cure-dents qui la composent. Inviter les élèves à analyser la suite de figures, à prolonger la suite, à construire une table de valeurs qui représente la relation, à déterminer le nombre de cure-dents dans une figure lointaine (p. ex., la 10^{e}) et à formuler une règle (voir *Règle*, p. 52-66).

Numéro de la figure, *n*	1	2	3	4	…	10
Nombre de cure-dents, *c*	5	8	11	14	…	32

(*D'après la table de valeurs, le nombre de cure-dents augmente de 3 chaque fois. On peut le voir dans la suite non numérique, car pour passer d'une figure à la suivante, il faut ajouter 3 cure-dents, soit*).

Exemple de règle pour la suite 1

Chaque figure est composée de 2 cure-dents et de l'ajout de groupes de 3 cure-dents. Le nombre de ces groupes correspond au numéro de la figure.

La 10e figure sera donc composée de 2 cure-dents et de 10 fois l'ajout de 3 cure-dents (30), soit de 32 cure-dents.

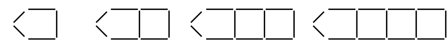


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Note : Cette règle en mots correspond à l'équation $c = 2 + 3 \times n$, où n représente le numéro de la figure et c, le nombre de cure-dents qui la composent.

Répéter la même démarche avec les deux suites suivantes :

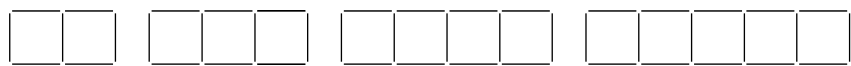


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Suite 2

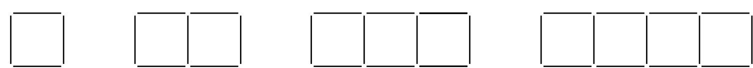


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Suite 3

Ensuite, inviter les élèves à comparer les trois situations et les règles qui représentent la relation entre le numéro de la figure et le nombre de cure-dents qui la composent. Les amener à reconnaître que les trois situations présentent la même régularité (une figure est toujours formée en ajoutant, de la même façon, 3 cure-dents à la figure précédente), mais que les relations diffèrent parce que les figures initiales (Figure 1) sont différentes.

Exemple de règle pour la suite 2

Chaque figure est composée de 4 cure-dents et de l'ajout de groupes de 3 cure-dents. Le nombre de ces groupes correspond au numéro de la figure.

La 10e figure sera donc composée de 4 cure-dents et de 10 fois l'ajout de 3 cure-dents (30), soit de 34 cure-dents.

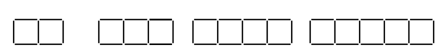
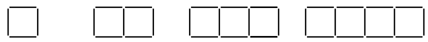


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Note : Cette règle en mots correspond à l'équation $c = 4 + 3 \times n$, où n représente le numéro de la figure et c, le nombre de cure-dents qui la composent.

Exemple de règle pour la suite 3

Chaque figure est composée de 1 cure-dent et de l'ajout de groupes de 3 cure-dents. Le nombre de ces groupes correspond au numéro de la figure. La 10e figure sera donc composée de 1 cure-dent et de 10 fois l'ajout de 3 cure-dents (30), soit de 31 cure-dents.	 *Figure 1* *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*
Note : Cette règle en mots correspond à l'équation $c = 1 + 3 \times n$, où n représente le numéro de la figure et c, le nombre de cure-dents qui la composent.	

Ensuite, inviter les élèves à décrire les suites numériques qui se rattachent aux situations.

Exemple de réponses

Suite 1 : Pour reproduire la suite, on commence avec 5 puis on ajoute toujours 3 (5, 8, 11, 14, 17…).

Suite 2 : Pour reproduire la suite, on commence avec 7, puis on ajoute toujours 3 (7, 10, 13, 16, 19…).

Suite 3 : Pour reproduire la suite, on commence avec 4, puis on ajoute toujours 3 (4, 7, 10, 13, 16…).

ANNEXE 5.1A

Mise en situation

Dans le quartier de Dimitri et Anouka, un nouveau club vidéo, Film Plus, vient d'ouvrir. Pour devenir membre du club, on doit payer un ***abonnement de 4 $*** lors de la première visite. La location de chaque film coûte ensuite 5 $. Donc, si on inclut le coût de l'abonnement, on aura déboursé 9 $, 14 $, 19 $ et 24 $ après avoir loué successivement 1 film, 2 films, 3 films et 4 films.

1) Représentez la situation à l'aide de matériel de manipulation. On doit voir clairement la somme que Dimitri et Anouka ont déboursée au club après l'abonnement, puis après la location de 1 film, de 2 films, de 3 films et de 4 films.

2) Représentez une carte de fidélité après l'abonnement, puis après la location de 1 film, de 2 films, de 3 films et de 4 films. Sur chaque carte, un tampon apposé représente 1 $ déboursé.

3) Expliquez la régularité représentée par votre suite de cartes de fidélité.

4) Déterminez le nombre de tampons qu'il y aurait sur une carte de fidélité après la location de 13 films, décrivez leur disposition et représentez cette carte.

5) Écrivez une règle qui permet de déterminer la somme déboursée en fonction du nombre de films loués.

ANNEXE 5.1B

Étiquettes

Carte de fidélité après 0 film loué
Carte de fidélité après 1 film loué
Carte de fidélité après 2 films loués
Carte de fidélité après 3 films loués
Carte de fidélité après 4 films loués

ANNEXE 5.2

Nouveau club vidéo

Vous avez la chance de participer à l'ouverture d'un club vidéo

Scénario ☐

Coût de l'abonnement	Coût de la location par film

Vous devez présenter le scénario qui vous a été assigné en créant un rapport qui contient :

- un exemple d'une suite de cartes de fidélité correspondant à la location de 0 film, de 1 film, de 2 films, de 3 films et de 4 films en n'oubliant pas d'inclure le coût de l'abonnement s'il y a lieu;
- une table de valeurs qui représente la relation entre le nombre de films loués et la somme déboursée;
- l'énoncé en mots d'une règle qui permet de déterminer rapidement la somme déboursée par un client ou une cliente en fonction du nombre de films loués;
- un nom pour le nouveau club vidéo.

ANNEXE 5.3

Exemples de rapport

Scénario	Coût de l'abonnement	Coût de la location par film
1	5 $	4 $

Nombre de films loués	0	1	2	3	4
Somme déboursée ($)	5	9	13	17	21

La somme déboursée, en dollars, est déterminée en multipliant le nombre de films par 4 et en ajoutant 5.

Scénario	Coût de l'abonnement	Coût de la location par film
2	0 $	6 $

Nombre de films loués	0	1	2	3	4
Somme déboursée ($)	0	6	12	18	24

La somme déboursée, en dollars, est déterminée en multipliant le nombre de films par 6.

ANNEXE 5.3 (suite)

Scénario	Coût de l'abonnement	Coût de la location par film
3	5 $	6 $

Nombre de films loués	0	1	2	3	4
Somme déboursée ($)	5	11	17	23	29

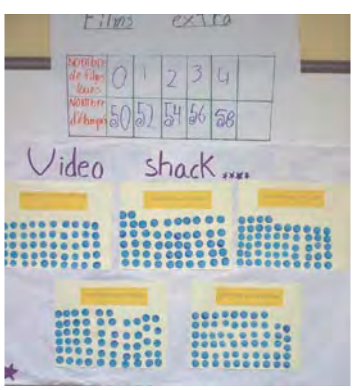
La somme déboursée, en dollars, est déterminée en multipliant le nombre de films par 6 et en ajoutant 5.

Scénario	Coût de l'abonnement	Coût de la location par film
4	6 $	5 $

Nombre de films loués	0	1	2	3	4
Somme déboursée ($)	6	11	16	21	26

La somme déboursée, en dollars, est déterminée en multipliant le nombre de films par 5 et en ajoutant 6.

Scénario	Coût de l'abonnement	Coût de la location par film
5	50 $	2 $



Nombre de films loués	0	1	2	3	4
Somme déboursée ($)	50	52	54	56	58

La somme déboursée, en dollars, est déterminée en multipliant le nombre de films par 2 et en ajoutant 50.

ANNEXE 5.4

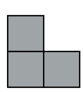
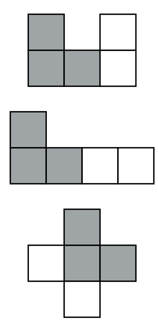
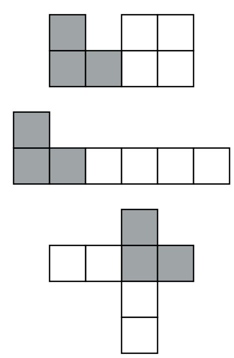
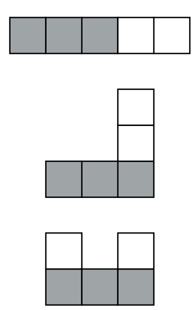
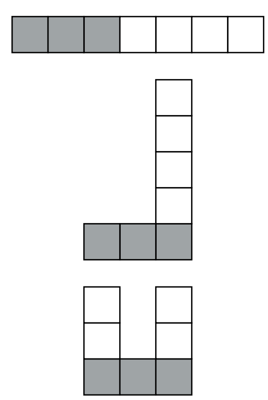
Activité préparatoire facultative : Suite non numérique à motif croissant

Grouper les élèves par deux. Distribuer des cubes à chaque équipe et leur expliquer qu'ils construiront une suite non numérique à motif croissant. Leur demander :

1. de construire une structure avec trois cubes de la même couleur (différentes possibilités);
2. de construire la même structure à côté de la première et d'y ajouter deux cubes;
3. de prolonger la suite en construisant deux autres structures.

Rappeler aux élèves que pour créer une suite non numérique à motif croissant, les cubes ajoutés au motif de base doivent toujours être disposés selon un ordre et une régularité.

Exemples

Structure 1 (motif de base)	Structure 2	Structure 3
		
		

ANNEXE 5.4 (suite)

Si certains élèves construisent les structures sans respecter le motif de base, l'ordre ou la régularité, leur poser des questions telles que :

– « Qu'est-ce qui est différent entre chaque structure? »

– « Qu'est-ce qui est identique entre cette structure et la précédente? et la première structure? »

– « Où avez-vous ajouté les deux cubes? Les avez-vous toujours placés de la même façon? »

– « Pouvez-vous décrire la régularité avec précision? »

Enfin, inviter quelques élèves à présenter leur suite de structures et à en décrire la régularité. Faire ressortir le fait que même si les suites présentées ne sont pas identiques, chacune correspond à la suite numérique 3, 5, 7… Souligner aussi qu'il y a un motif de base repérable dans chaque structure et que, d'une structure à l'autre, la quantité de cubes ajoutés est la même et leur disposition aussi.

ANNEXE 5.5

Stratège

Règles du jeu pour deux :

- En partant de « 0 », on déplace le jeton à tour de rôle vers la droite.
- On peut avancer le jeton d'une case ou de deux cases.
- La première personne qui arrive sur la case « 8 » perd la joute.

0	1	2	3	4	5	6	7	8

Pendant la joute, chaque joueur ou joueuse détermine (p. ex., en marquant d'un code comme X ou 0) les cases sur lesquelles le jeton tombe afin de mieux analyser le déroulement du jeu et de développer une stratégie gagnante.

									Gagnant (X ou O)
0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Décrivez une stratégie qui permet de gagner chaque joute.

Situation d'apprentissage, 6^e année

Énigmes de nombres

GRANDE IDÉE : RELATIONS

SOMMAIRE

Dans cette situation d'apprentissage, les élèves ont recours à un raisonnement algébrique pour créer une énigme de nombres fondée sur une séquence d'opérations arithmétiques.

INTENTION PÉDAGOGIQUE

Cette situation d'apprentissage a pour but d'amener les élèves :

- à élaborer une séquence d'opérations arithmétiques;
- à représenter concrètement et semi-concrètement une séquence d'opérations arithmétiques en mettant l'accent sur une inconnue;
- à utiliser l'inconnue pour représenter un nombre dont la valeur est indéterminée;
- à raisonner algébriquement.

Matériel

- transparents des annexes 6.1 et 6.2
- annexe 6.3 (1 copie par équipe)
- grandes feuilles de papier (1 feuille par équipe)
- jetons ou cubes
- récipients opaques (p. ex., verre, sac)

ATTENTES ET CONTENUS D'APPRENTISSAGE

Attentes

L'élève doit pouvoir :

- résoudre des problèmes portant sur des relations en utilisant différentes stratégies;
- déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation.

Contenus d'apprentissage

L'élève doit :

– décrire et représenter une relation à l'aide de mots, de dessins, de symboles ou d'une table de valeurs (p. ex., relation entre le nombre de billets vendus et le temps de la vente);

– expliquer la règle d'une relation par des énoncés simples en langage courant et à l'aide de symboles;

– utiliser une lettre pour représenter une inconnue dans une équation;

– substituer une variable par des valeurs dans une équation (comportant jusqu'à deux opérations) et déterminer (par inspection ou par essais systématiques) la valeur de l'inconnue.

Durée approximative de la situation d'apprentissage : **100 minutes**

CONTEXTE

Au cours des années d'études précédentes, les élèves ont appris à représenter des situations d'égalité et des équations simples. À l'aide de diverses représentations, ils ont aussi appris à déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation simple. En 6e année, ils sont aptes à représenter des situations d'égalité dans le cadre de contextes plus complexes, en utilisant une inconnue et des variables. Ils peuvent aussi déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation par inspection ou par essais systématiques.

PRÉALABLES

La présente situation d'apprentissage permet aux élèves de consolider leur compréhension de l'inconnue et de parfaire l'utilisation des concepts algébriques à l'étude.

Pour être en mesure de réaliser cette situation d'apprentissage, les élèves doivent pouvoir représenter des équations simples de différentes façons (concrète, semi-concrète et symbolique).

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Inconnue, représentation, équation.

environ
40 minutes

AVANT L'APPRENTISSAGE (MISE EN TRAIN)

Animer une discussion au sujet des énigmes afin que tous en saisissent bien le sens. Enchaîner en expliquant aux élèves que dans la présente situation d'apprentissage, ils devront chercher à comprendre, à expliquer et à créer des énigmes de nombres.

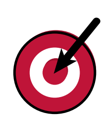
Note : Dans les énigmes de nombres suivantes, le nombre de départ est limité aux nombres de 1 à 10 afin de restreindre la quantité de matériel de manipulation et de dessins nécessaires aux représentations. Cette restriction facilite aussi le calcul des opérations à effecteur à chaque étape de l'énigme. Toutefois, l'énigme s'applique à tous les nombres, petits ou grands.

Proposer aux élèves l'énigme suivante et leur demander d'effectuer, à l'aide d'une feuille et d'un crayon, les opérations demandées à chacune des étapes :

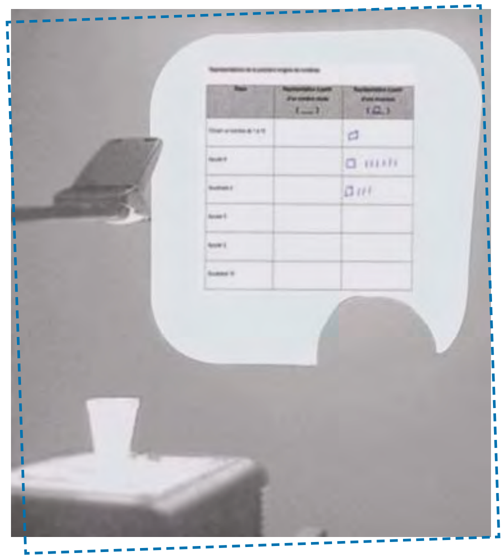
1. Choisir un nombre naturel de 1 à 10.
2. Ajouter 6 à ce nombre.
3. Soustraire 3.
4. Ajouter 5.
5. Ajouter 2.
6. Soustraire 10.

Animer un échange pour faire ressortir le fait que le résultat correspond au nombre choisi au départ en posant des questions telles que :

– « Que remarquez-vous? »
– « Y a-t-il d'autres élèves qui ont noté cela avec d'autres nombres de départ? »
– « Comment peut-on expliquer cette situation? »
– « Y a-t-il des élèves qui n'ont pas obtenu leur nombre de départ comme résultat? »



Note : Il est possible qu'au cours de la discussion certains élèves soulèvent le fait que les quantités soustraites annulent les quantités additionnées (p. ex., un élève pourrait dire que tout au long de l'énigme on a ajouté 13 et on a soustrait 13). Cette observation est très intéressante, mais il faut amener les élèves à recourir à une représentation généralisée pour démontrer, à l’aide d’une inconnue, que l’énigme fonctionne avec tous les nombres. Un *modelage* permet de faire ressortir le raisonnement algébrique utilisé pour résoudre l’énigme.



Déposer sur un rétroprojecteur le transparent de l’annexe 6.1 (*Représentations de la première énigme de nombres*) et un récipient opaque dans lequel vous aurez déposé un certain nombre de cubes ou de jetons (p. ex., 3) sans le dévoiler aux élèves. Préciser aux élèves que le récipient représente l’inconnue puisqu’il contient un nombre inconnu d’objets. Modeler ensuite les opérations demandées à chacune des étapes en utilisant des cubes ou des jetons. Effectuer les ajouts ou les retraits à côté du récipient. Au fur et à mesure, illustrer chaque étape dans la colonne de « Représentation à partir d’une inconnue ».

Exemple de représentations de la première énigme de nombres

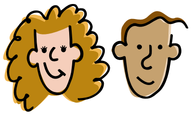
Étapes	Représentation à partir d’un nombre choisi (3)	Représentation à partir d’une inconnue (●)
Choisir un nombre de 1 à 10	///	◯
Ajouter 6	/// //////	◯ //////
Soustraire 3	/// ///	◯ ///
Ajouter 5	/// /// /////	◯ /// /////
Ajouter 2	/// /// ///// //	◯ /// ///// //
Soustraire 10	///	◯

Modeler une deuxième fois la représentation de la première énigme de nombres, mais cette fois-ci en montrant le nombre d'objets dans le récipient (p. ex., 3 objets). Représenter ce nombre dans la première case de la colonne « Représentation à partir d'un nombre choisi » (voir exemple précédent). Effectuer les ajouts et les retraits de manière à faire ressortir la quantité de cubes de départ. Au fur et à mesure, indiquer dans la colonne l'opération effectuée. Un tel modelage permet de faire un lien entre les deux représentations.

Présenter ensuite aux élèves la deuxième énigme de nombres et leur demander d'effectuer, à l'aide d'une feuille et d'un crayon, les opérations demandées à chacune des étapes :

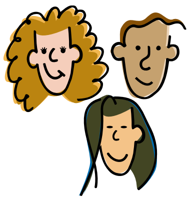
1. Choisir un nombre naturel de 1 à 5.
2. Doubler le nombre.
3. Ajouter 6.
4. Doubler la somme.
5. Soustraire 4.
6. Diviser par 4.
7. Soustraire 2.

Demander ensuite aux élèves de comparer leur nombre choisi au départ avec celui obtenu à la fin. Discuter des résultats.



équipes de 2

Grouper les élèves par deux. Distribuer des cubes ou des jetons aux équipes. Projeter le transparent de l'annexe 6.2 (*Représentations de la deuxième énigme de nombres*). Inviter les équipes à choisir un nombre de 1 à 5 et à représenter chaque étape de la deuxième énigme de nombres à l'aide des cubes ou des jetons.



Inviter ensuite une équipe à venir démontrer concrètement les étapes de l'énigme. Au fur et à mesure, reproduire sur le transparent ces étapes dans la colonne « Représentation à partir d'un nombre choisi » (voir exemple ci-après).

Remplir ensuite la colonne « Représentation à partir d'une inconnue » avec la participation des élèves (voir exemple ci-après). Discuter de l'importance de cette étape pour vérifier si l'énigme fonctionne avec n'importe quel nombre qui est représenté par l'inconnue (concrètement par le récipient, symboliquement par le carré).

Exemple de représentations de la deuxième énigme de nombres

Étapes	Représentation à partir d'un nombre choisi (2)	Représentation à partir d'une inconnue (□)
Choisir un nombre de 1 à 5	//	□
Doubler le nombre	// //	□ □
Ajouter 6	// ////// //	□ ////// □
Doubler la somme	// ////// // // ////// //	□ ////// □ □ ////// □
Soustraire 4	// //// // // //// //	□ //// □ □ //// □
Diviser par 4	// / /	□ / /
Soustraire 2	//	□

Présenter à la classe le problème intitulé *Nombres énigmatiques!* (Annexe 6.3) comme suit :

> *C'est à votre tour de créer une énigme de nombres dont le résultat correspond au nombre de départ. Votre énigme doit comprendre au moins six étapes, dont une impliquant la multiplication. Vous devrez la représenter à partir d'un nombre choisi et à partir de l'inconnue.*

S'assurer que la tâche à effectuer a été bien comprise en demandant à quelques élèves de l'expliquer en leurs propres mots.

PENDANT L'APPRENTISSAGE (EXPLORATION)

équipes de 2

environ **35 minutes**

Grouper les élèves par deux et leur distribuer une copie de l'annexe 6.3 (*Nombres énigmatiques*!). Mettre à leur disposition des récipients opaques et du matériel de manipulation (p. ex., jetons, cubes) et les inviter à s'acquitter de la tâche.

Circuler et soutenir les élèves dans leur travail sans toutefois leur dire comment relever le défi. Par des interventions stratégiques, les amener plutôt à réfléchir à l'utilisation d'une inconnue, aux stratégies à utiliser pour créer l'énigme et aux différentes formes de représentation. Pour ce faire, poser des questions telles que :

– « Comment pouvez-vous vous assurer que votre énigme de nombres fonctionne? »

– « Est-ce que votre énigme fonctionnerait avec tous les nombres? »

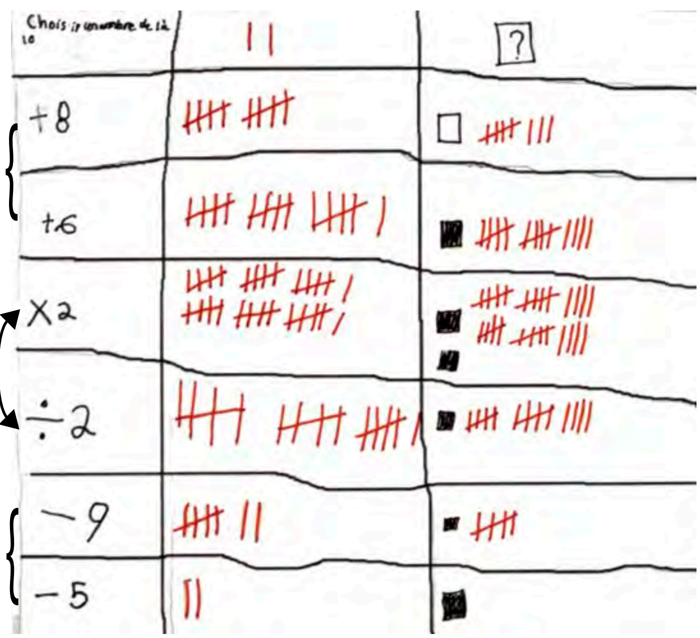
Allouer suffisamment de temps pour donner la chance aux élèves d'explorer diverses stratégies pour créer l'énigme de nombres et d'en discuter. Par exemple, ils peuvent :

- travailler par essais et erreurs (p. ex., commencer par un nombre choisi et formuler une série d'opérations);
- se servir de matériel de manipulation afin de représenter l'énigme et l'inconnue;

- utiliser du matériel de manipulation avec un nombre choisi (p. ex., utiliser des cubes emboîtables pour représenter le nombre choisi et effectuer une série d'opérations);

- annuler les opérations (p. ex., en multipliant par deux et en divisant par deux).

Exemple



Observations possibles	Interventions possibles
Certaines équipes ont du mal à créer une énigme de nombres qui fonctionne avec n'importe quel nombre.	Encourager les élèves à utiliser le matériel de manipulation pour créer l'énigme de nombres.
Une équipe commence par une soustraction et éprouve des difficultés à représenter cette étape avec du matériel concret lorsque le nombre de départ est inconnu.	Poser des questions telles que : – « Comment pourriez-vous représenter la soustraction? » – « Pouvez-vous revoir les étapes de votre énigme afin de procéder autrement? »
Une équipe commence par une division et représente cette étape en séparant l'inconnue en parties. Toutefois, à la fin de l'énigme, l'équipe se retrouve seulement avec une partie de l'inconnue.	Rappeler qu'on doit se trouver à la fin de l'énigme avec le même symbole qu'au départ, donc l'inconnue doit se retrouver en entier.

Demander aux élèves de noter leur énigme et leurs représentations sur une grande feuille en vue de l'échange mathématique.

Sélectionner les équipes qui présenteront lors de l'échange de façon à faire ressortir les diverses stratégies utilisées pour créer une énigme. Il est parfois utile de discuter d'une stratégie qui n'a pas donné les résultats escomptés puisque l'énigme de nombres ne fonctionne pas. Ceci donne aux élèves l'occasion d'élaborer des solutions de rechange.

APRÈS L'APPRENTISSAGE (OBJECTIVATION/ÉCHANGE MATHÉMATIQUE)

environ
25 minutes

Demander aux équipes sélectionnées de venir, une à la fois, expliquer leur énigme de nombres et ses représentations.

Après chaque exposé, les autres élèves enrichissent l'échange mathématique en posant des questions et en faisant des observations pertinentes dans un climat de respect. Intervenir au besoin en posant des questions telles que :

– « Comment pouvez-vous vous assurer que votre énigme de nombres fonctionne? »

– « Peut-on essayer l'énigme avec d'autres nombres? »

– « Est-ce que cette séquence d'opérations fonctionne avec tous les nombres? »

– « Si vous aviez à créer une autre énigme, que feriez-vous autrement? de semblable? »

Note : Le but de cette dernière question est de faire ressortir que l'utilisation de l'inconnue (représentée par un carré, une tasse, un sac…) facilite la création de l'énigme. Insister sur le fait que l'utilisation d'une inconnue nous assure que l'énigme fonctionne avec tous les nombres. Rappeler aux élèves qu'un symbole a le même référent tout au long d'une même situation, donc tout au long de la séquence d'opérations.

Au fur et à mesure, faire ressortir les ressemblances et les différences entre certaines énigmes de nombres. Voici quelques constatations possibles :

- Plusieurs énigmes commencent avec une addition.
- Certaines équipes ont effectué une division afin d'annuler une multiplication précédente.
- Dans certaines énigmes, une étape annule une étape précédente (p. ex., + 3 et un peu plus tard, – 3).
- L'addition augmente les quantités alors que la soustraction les diminue.
- Dans cette énigme, on ajoute 6 en une étape (p. ex., + 6) alors que dans l'autre, on le fait en deux étapes (p. ex., + 2 suivi de + 4).
- Lorsqu'on effectue une multiplication, il faut l'appliquer à toute la quantité précédente.

ADAPTATIONS

L'activité peut être modifiée pour répondre aux différents besoins des élèves.

Pour faciliter la tâche	Pour enrichir la tâche
• diminuer le nombre prescrit d'étapes; • demander aux élèves d'utiliser seulement l'addition et la soustraction pour créer leur énigme; • inviter les élèves à déterminer, à partir d'une représentation d'une énigme, la séquence d'opérations de cette énigme. **Exemple** ☐ ☐ //// ☐ //// // ☐	• demander aux élèves de représenter chaque étape de l'énigme de façon symbolique à l'aide d'une expression algébrique; • augmenter le nombre d'étapes.

SUIVI À LA MAISON

À la maison, les élèves peuvent créer une énigme de nombres, la soumettre à quelques membres de la famille pour vérifier si elle fonctionne et, par la suite, expliquer pourquoi elle fonctionne pour tous les nombres. Le lendemain, l'enseignant ou l'enseignante peut inviter quelques élèves à présenter leur énigme au groupe classe et à expliquer la stratégie utilisée pour la créer.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 1

La représentation symbolique

À l'aide d'un transparent de l'annexe 6.4 (*Représentation symbolique de la première énigme*), revoir la représentation à partir d'une inconnue de la première énigme de nombres. Avec la participation des élèves, déterminer l'expression algébrique qui décrit chaque étape de l'énigme. Leur préciser que la lettre (*n* dans l'exemple ci-dessous) remplace le cercle pour représenter l'inconnue et que ce symbole peut signifier n'importe quel nombre de départ.

Exemple

Étapes	Représentation à partir d'une inconnue (●)	Représentation symbolique
Choisir un nombre de 1 à 10	○	*n*
Ajouter 6	○ //////	*n* + 6
Soustraire 3	○ ///	*n* + 3
Ajouter 5	○ /// /////	*n* + 8
Ajouter 2	○ /// ///// //	*n* +10
Soustraire 10	○	*n*

Grouper les élèves par deux et remettre à chaque équipe une copie de l'annexe 6.5 (*Représentation symbolique de la deuxième énigme*). Leur demander d'écrire une expression algébrique correspondant aux résultats de chaque étape de la deuxième énigme.

Exemple

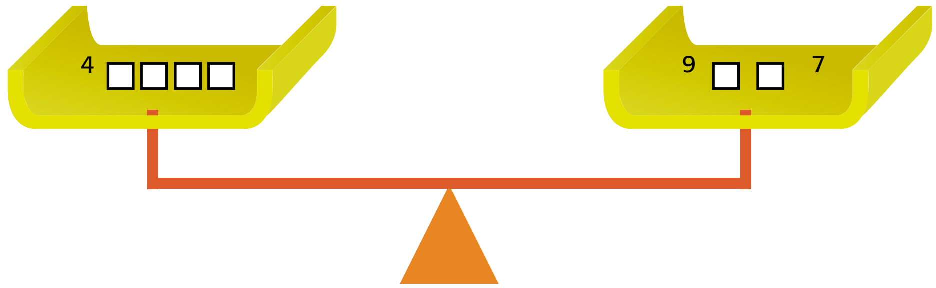
Étapes	Représentation à partir d'une inconnue (□)	Représentation symbolique
Choisir un nombre de 1 à 5	□	n
Doubler le nombre	□ □	$2 \times n$
Ajouter 6	□ ////// □	$2 \times n + 6$
Doubler la somme	□ ////// □ □ ////// □	$4 \times n + 12$
Soustraire 4	□ //// □ □ //// □	$4 \times n + 8$
Diviser par 4	□ / /	$n + 2$
Soustraire 2	□	n

Animer une discussion au sujet des différentes expressions algébriques en reconnaissant la possibilité d'avoir plusieurs expressions algébriques équivalentes pour une même étape.

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 2

Gardons l'équilibre!

Dessiner un schéma de la situation suivante au tableau.



Grouper les élèves par deux. Demander aux équipes d'écrire une équation représentant la relation d'égalité (p. ex., $4 + a + a + a + a = 9 + a + a + 7$ ou $4 + 4a = 9 + 2a + 7$).

Pour plus de renseignements au sujet des stratégies, voir *Équation à résoudre* (p. 90-92).

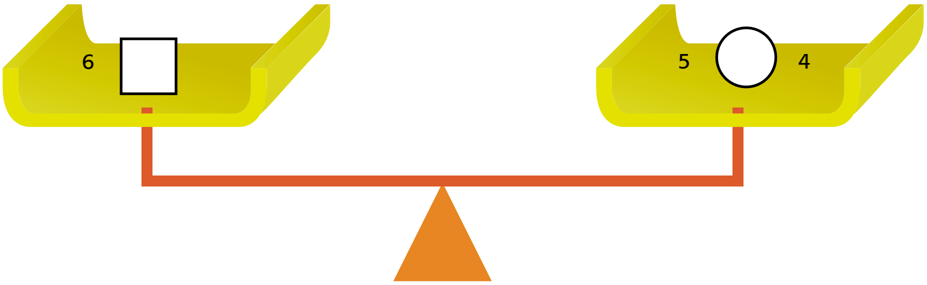
Annoncer aux élèves qu'ils doivent déterminer la valeur de l'inconnue (le cube, la lettre a) à l'aide du modèle de la balance mathématique ou de l'équation. Leur rappeler, au besoin, que dans une même situation, chaque inconnue représentée par un même symbole doit avoir la même valeur. Allouer le temps nécessaire pour que les élèves accomplissent la tâche demandée. Puis, animer un échange mathématique sur les différentes stratégies employées pour déterminer la valeur de l'inconnue ($a = 6$). Faire ressortir les stratégies utilisées telles que :

- modifier l'équation (p. ex., en enlevant a deux fois de chaque côté, l'égalité est maintenue et on analyse alors l'équation $4 + a + a = 9 + 7$. Ensuite en enlevant 4 de chaque côté, l'égalité est maintenue et on analyse alors l'équation $a + a = 9 + 3$);
- faire des essais systématiques.

Enfin, proposer d'autres situations d'égalité similaires.

Dans un deuxième temps, inviter les élèves à explorer des situations d'égalité contenant des variables.

Exemple



Demander aux élèves d'écrire une équation pour représenter la situation d'égalité, puis de remplacer une variable par une valeur et de déterminer la valeur de l'autre. Par exemple :

$6 + c = 5 + s + 4$

Si $c = 3$, alors $s = 0$

Si $c = 10$, alors $s = 7$

Note : Les différentes valeurs peuvent être inscrites dans une table de valeurs.

c	3	10			
s	0	7			

ACTIVITÉ SUPPLÉMENTAIRE - 3

Combien de traversées?

Présenter à la classe le problème suivant :

Par une belle journée d'été, un groupe de 7 adultes et de 2 enfants décident de faire une promenade dans les bois près d'une rivière. La nuit approche et le pont traversé au début de la journée est maintenant loin. Un adulte aperçoit un petit bateau qui pourrait être utilisé pour rejoindre l'autre rive.

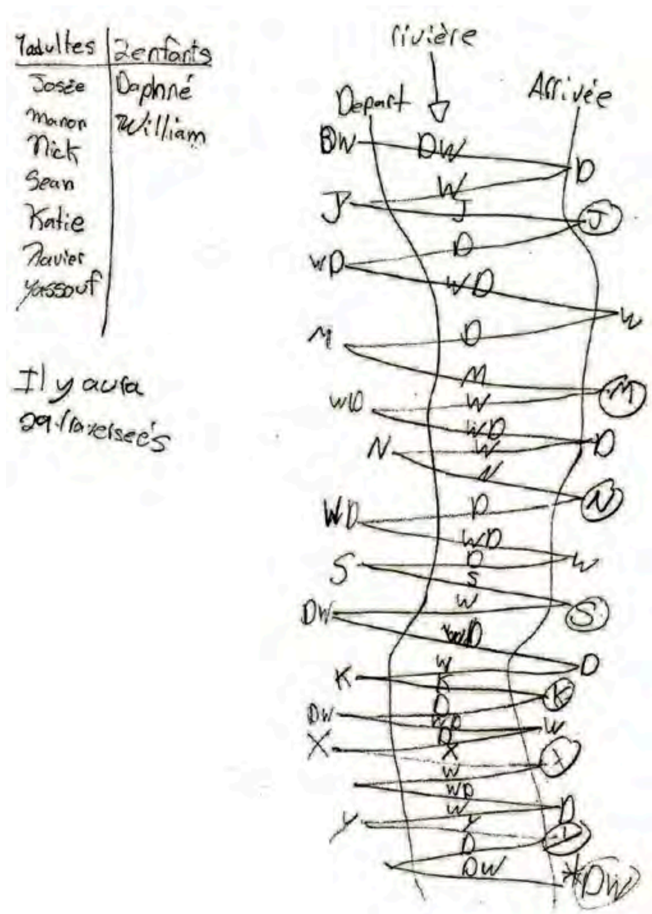
Toutefois, le bateau est si petit qu'il peut seulement accommoder :

- *un adulte seul;*
- *un enfant seul;*
- *ou deux enfants.*

Si toutes les personnes sont en mesure de ramer, comment doivent-elles procéder pour que tous traversent la rivière en bateau? Quel est le plus petit nombre de traversées qui peuvent être effectuées?

Grouper les élèves par deux pour qu'ils trouvent la solution. Ce problème permet aux élèves d'utiliser plusieurs modes de représentation. Pour résoudre le problème, ils peuvent, par exemple, mettre en scène la situation, utiliser du matériel concret (p. ex., les blocs mauves représentent les adultes et les blancs représentent les enfants) ou encore créer une illustration comme dans l'exemple suivant.

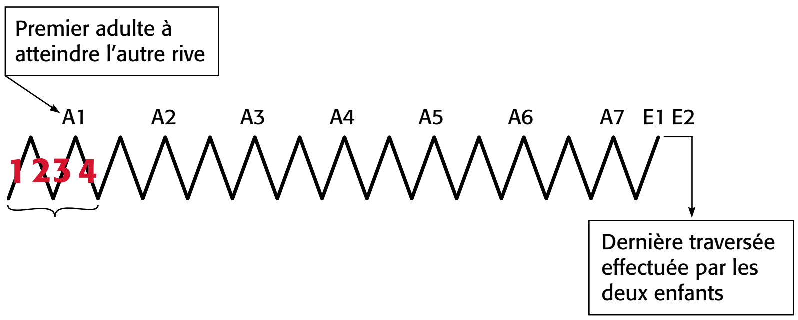
Exemple



Note : Sur cette représentation, les lettres encerclées représentent les adultes et les enfants qui atteignent et demeurent sur l'autre rive.

Inviter quelques équipes à expliquer la stratégie utilisée pour déterminer qu'il faut 29 traversées. Au besoin, demander à des élèves de mimer la situation. Ensuite, analyser d'autres situations similaires afin d'examiner la relation entre le nombre d'adultes dans le groupe et le nombre de traversées à effectuer.

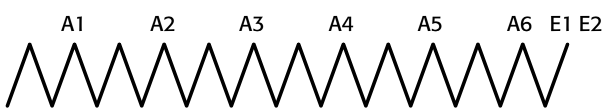
Note : Voici un exemple d'interprétation de la relation de cette situation : il faut effectuer 3 traversées pour permettre à 1 adulte d'atteindre l'autre rive et ensuite, 1 autre traversée pour qu'un enfant puisse rapporter le bateau (donc 4 traversées par adulte). À la fin, les deux enfants effectuent ensemble une dernière traversée (7 × 4 + 1 = 29).

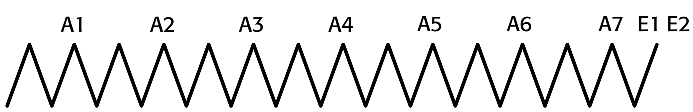


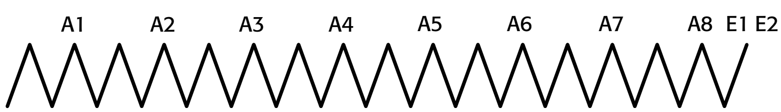
Inviter les élèves à déterminer le nombre de traversées qu'un groupe de 6 adultes et de 2 enfants et qu'un groupe de 8 adultes et de 2 enfants doivent effectuer. Leur demander de représenter les traversées et d'inscrire les diverses valeurs dans une table de valeurs. Plusieurs élèves reconnaîtront la présence d'une régularité de 4 traversées supplémentaires pour chaque adulte supplémentaire.

Exemple

Nombre d'adultes	1	2	3	4	5	6	7	8	…	
Nombre de traversées à effectuer						25	29	33	…	





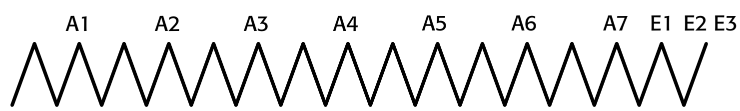


Demander aux élèves de décrire ce qu'auraient l'air les représentations des situations s'il y avait 4 adultes et 2 enfants, 3 adultes et 2 enfants, 2 adultes et 2 enfants, 1 adulte et 2 enfants, de les dessiner et de déterminer combien de traversées seraient nécessaires dans chaque cas.

Demander ensuite aux élèves de décrire la représentation s'il y avait 12 adultes et 2 enfants et même, s'il y a avait 50 adultes et 2 enfants. Poser des questions afin qu'ils décrivent la relation entre le nombre d'adultes et le nombre de traversées d'une situation à l'aide d'une règle exprimée sous forme symbolique (p. ex., $t = 4 \times n + 1$, où t représente le nombre de traversées et n, le nombre d'adultes qui accompagnent les 2 enfants).

Prolongement

Il est possible d'examiner des situations similaires dans lesquelles il y a 3 enfants au lieu de 2 (il faut 2 traversées de plus – une afin de permettre à un enfant de revenir chercher le dernier enfant et une autre afin que les deux derniers enfants traversent). Voici une représentation des traversées d'un groupe composé de 7 adultes et de 3 enfants.



Note : La relation entre le nombre d'adultes et le nombre de traversées à effectuer peut être exprimée par $t = 4 \times n + 3$, où t représente le nombre de traversées et n, le nombre d'adultes.

ANNEXE 6.1

Représentations de la première énigme de nombres

Étape	Représentation à partir d'un nombre choisi (___)	Représentation à partir d'une inconnue (___)
Choisir un nombre de 1 à 10		
Ajouter 6		
Soustraire 3		
Ajouter 5		
Ajouter 2		
Soustraire 10		

ANNEXE 6.2

Représentations de la deuxième énigme de nombres

Étape	Représentation à partir d'un nombre choisi (___)	Représentation à partir d'une inconnue (___)
Choisir un nombre de 1 à 5		
Doubler le nombre		
Ajouter 6		
Doubler la somme		
Soustraire 4		
Diviser par 4		
Soustraire 2		

ANNEXE 6.3

Nombres énigmatiques!

C'est à votre tour de créer une énigme avec des nombres dont le résultat correspond au nombre de départ. Votre énigme doit comprendre au moins six étapes, dont une impliquant une multiplication. Inscrivez au fur et à mesure dans le tableau les diverses représentations des étapes de votre énigme.

Étape	Représentation à partir d'un nombre choisi (___)	Représentation à partir d'une inconnue (___)

ANNEXE 6.4

Représentation symbolique de la première énigme

Étape	Représentation à partir d'une inconnue (○)	Représentation symbolique
Choisir un nombre de 1 à 10	○	
Ajouter 6	○ //////	
Soustraire 3	○ ///	
Ajouter 5	○ /// /////	
Ajouter 2	○ /// ///// //	
Soustraire 10	○	

ANNEXE 6.5

Représentation symbolique de la deuxième énigme

Étape	Représentation à partir d'une inconnue (□)	Représentation symbolique
Choisir un nombre de 1 à 5	□	
Doubler le nombre	□ □	
Ajouter 6	□ ////// □	
Doubler la somme	□ ////// □ □ ////// □	
Soustraire 4	□ //// □ □ //// □	
Diviser par 4	□ / /	
Soustraire 2	□	

ANNEXES

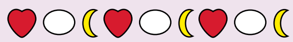
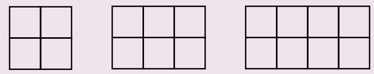
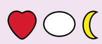
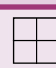
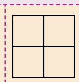
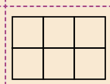
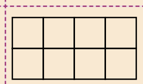
Les trois annexes dans cette section présentent des renseignements supplémentaires relatifs au domaine Modélisation et algèbre que l'enseignant ou l'enseignante peut consulter au besoin.

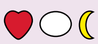
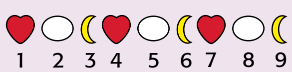
L'annexe A reprend, en résumé, le vocabulaire lié aux suites non numériques et numériques, vocabulaire qui a été présenté dans le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année, Modélisation et algèbre*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a).

L'annexe B présente trois stratégies qui permettent aux élèves d'analyser une égalité et qui mettent l'accent sur la compréhension du sens de l'égalité plutôt que sur l'utilisation d'opérations arithmétiques.

L'annexe C présente une variété d'outils que les élèves du cycle moyen peuvent utiliser pour représenter leurs idées et communiquer leur compréhension en modélisation et algèbre.

Annexe A – Vocabulaire lié aux suites

Suite non numérique à motif répété	Suite non numérique à motif croissant	Suite numérique
Suite A 	Suite B  Figure 1 Figure 2 Figure 3	Suite C 1, 3, 5…
Ensemble de figures ou d'objets, disposés selon un ordre et une régularité, dans lequel on retrouve un motif répété.	Ensemble de figures ou d'objets, disposés selon un ordre et une régularité, dans lequel on distingue un motif de base qui croît d'un terme au suivant.	Ensemble de nombres disposés selon un ordre et une régularité.
Motif : La plus petite partie d'une suite non numérique à partir de laquelle la régularité est créée.		
Le motif est 	Le motif est  En examinant chacune des figures de la suite, on peut reconnaître qu'elles sont construites en relation avec le motif, puisqu'on peut le repérer à l'intérieur de chaque figure.	Le motif est un élément visuel, donc ce concept ne s'applique pas à la suite numérique.
Terme : Chaque figure, nombre ou objet qui compose une suite.		
1er terme : cœur rouge 2e terme : ovale blanc 3e terme : lune jaune …	1er terme :  2e terme :  3e terme :  …	1er terme : 1 2e terme : 3 3e terme : 5 …

Suite non numérique à motif répété	Suite non numérique à motif croissant	Suite numérique
Rang : Position qu'occupe un terme dans une suite. Le rang est indiqué par un nombre.		
Les cœurs occupent les rangs 1, 4, 7… Les ovales occupent les rangs 2, 5, 8… Les lunes occupent les rangs 3, 6, 9…	La figure 1 occupe le rang 1. La figure 2 occupe le rang 2. La figure 3 occupe le rang 3. …	Le nombre 1 occupe le rang 1. Le nombre 3 occupe le rang 2. Le nombre 5 occupe le rang 3. …
Régularité : Phénomène uniforme qui définit une suite et qui permet de déterminer chacun de ses termes.		
Le motif  est répété.	Chaque terme est de forme rectangulaire et contient 2 carrés de plus que le terme précédent.	Chaque terme est 2 de plus que le terme précédent.
Règle : Expression qui permet de générer les termes d'une suite, étant donné leur rang.		
 Exemple de règle en mots : Si le rang est un multiple de 3, le terme est une lune. Si le rang donne un reste de 1 lorsqu'on le divise par 3, le terme est un cœur. Si le rang donne un reste de 2 lorsqu'on le divise par 3, le terme est un ovale.	Exemple d'une règle en mots : Chaque terme est composé de colonnes de 2 carrés chacune. Il y a toujours 1 colonne de plus que le numéro du terme. Exemple d'une règle sous forme d'équation : $c = 2 \times (n + 1)$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de carrés qui la composent.	Exemple d'une règle en mots : Pour déterminer la valeur de n'importe quel terme, je double la valeur de son rang et j'enlève 1. Exemple d'une règle sous forme d'équation : $t = 2 \times r - 1$, où t est la valeur du terme et r, son rang.

Annexe B – Stratégies liées à l'analyse d'une égalité

Il est important de discuter d'une stratégie de façon explicite avec les élèves, et ce, de préférence après que celle-ci a été utilisée spontanément par un ou une élève.

(Small, 2005, p. 93, traduction libre)

Pour faciliter l'apprentissage du concept d'égalité, l'enseignant ou l'enseignante doit proposer aux élèves des activités qui les incitent à analyser des situations d'égalité et à les traiter de manière algébrique. Il ou elle discute ensuite avec les élèves des stratégies utilisées pour analyser les égalités en privilégiant celles qui font appel aux représentations concrètes et semi-concrètes, et qui mettent l'accent sur le sens de l'égalité plutôt que sur l'application mécanique d'une procédure ou de calculs fastidieux.

Les stratégies suivantes permettent notamment aux élèves d'analyser une égalité en misant sur leur sens du nombre, des opérations, du symbole et de l'égalité :

- comparer des termes;
- décomposer des nombres;
- modifier la phrase mathématique.

Au cycle primaire, les élèves ont amorcé l'exploration de ces stratégies. Au cycle moyen, les élèves doivent les consolider puisqu'elles sont à la base d'une bonne compréhension des manipulations algébriques auxquelles ils seront exposés au cours des années d'études suivantes. Ils peuvent aussi avoir recours à ces stratégies pour résoudre des équations simples.

Dans ce qui suit, on présente d'abord chacune de ces stratégies dans un contexte de développement du sens de l'égalité. Ensuite, on propose une démarche d'exploration des stratégies dans un contexte de résolution d'une équation.

Contexte de développement du sens de l'égalité

Comparer des termes

QUOI?

Cette stratégie consiste à lire attentivement la phrase mathématique donnée et à comparer les expressions de part et d'autre du signe =.

POURQUOI?

Les élèves utilisent la comparaison de termes pour analyser l'égalité au lieu d'effectuer des calculs. Cette stratégie est donc directement liée au sens de l'égalité.

COMMENT?

Écrire l'égalité 86 + 234 + 92 = 234 + 86 + 92 au tableau.

Afin d'amener les élèves à examiner et à utiliser la stratégie et à en discuter, poser des questions telles que :

– « Cette égalité est-elle vraie? Pouvez-vous le vérifier sans faire de calculs? »

– « Comment le fait de comparer ce qu'il y a de chaque côté du signe = vous aide-t-il? »

– « Comment effectuez-vous la comparaison? »

– « Comment pouvez-vous décrire votre raisonnement? »

– « Comment pouvez-vous représenter ce raisonnement à l'aide de matériel semi-concret ou concret? »

– « Est-ce que ce genre de comparaison peut être utilisé afin de vérifier la vraisemblance d'autres égalités? »

Les élèves peuvent représenter symboliquement la stratégie de comparaison des termes de la façon suivante :

$$86 + 234 + 92 = 234 + 86 + 92$$

Présenter ensuite une égalité fausse comme 512 + 389 + 688 = 389 + 690 + 512. Poser les questions suivantes :

– « Cette égalité est-elle vraie? Pouvez-vous le vérifier sans faire de calculs? »

– « Comment pouvez-vous expliquer votre raisonnement? »

– « Quelle différence y a-t-il entre la comparaison effectuée pour justifier cette phrase et celle pour justifier la précédente? »

– « Comment peut-on rétablir l’égalité? »

Voici deux représentations symboliques possibles de la stratégie de comparaison des termes :

$$512 + 389 + 688 = 389 + 690 + 512$$

$$+\ 2$$

$$\cancel{512} + \cancel{389} + 688 = \cancel{389} + 690 + \cancel{512}$$

$$+\ 2$$

En reconnaissant les différences et les ressemblances entre les termes, les élèves peuvent déterminer ce qu’il faut faire pour rétablir l’égalité. Ils peuvent, par exemple,

- ajouter une quantité au membre de droite :
  512 + 389 + 688 + 2 = 389 + 690 + 512;
- soustraire une quantité du membre de gauche :
  512 + 389 + 688 = 389 + 690 + 512 – 2.

Présenter ensuite d’autres exemples d’égalités vraies ou fausses qui incitent les élèves à utiliser la stratégie de comparaison des termes.

Décomposer des nombres

QUOI?

Cette stratégie consiste à porter une attention particulière aux nombres de chaque côté du signe = et à les décomposer au besoin afin de mieux reconnaître des éléments égaux.

POURQUOI?

La stratégie implique que les élèves réfléchissent au sens des opérations et des nombres dans une phrase mathématique au lieu d'effectuer des calculs fastidieux. Elle favorise le développement du sens du symbole et du sens de l'algèbre. L'utilisation de cette stratégie implique aussi l'utilisation de la stratégie *comparer des termes.*

COMMENT?

Demander aux élèves si les égalités suivantes sont vraies.

327 = 300 + 20 + 7 (*vraie*)

647 + 321 = 600 + 300 + 30 + 20 + 7 + 1 (*fausse*)

700 + 80 + 14 + 38 = 795 + 38 (*fausse*)

754 + 79 = 500 + 250 + 4 + 70 + 9 (*vraie*)

35 + 47 = 30 + 40 + 14 (*fausse*)

150 + 75 = 200 + 25 (*vraie*)

Note : Pour aider les élèves à comprendre et à utiliser cette stratégie, il est important de choisir les égalités de manière que les décompositions de nombres soient facilement repérables.

Inciter les élèves à comparer les termes de chaque côté du signe = et leur demander de justifier leur réponse en posant des questions telles que :

– « Comment le savez-vous? »

– « Pouvez-vous modifier l'égalité en décomposant un ou des nombres? »

– « Comment la décomposition vous aide-t-elle à vérifier si l'égalité est vraie? » (*La décomposition des nombres permet de comparer plus facilement chaque membre de l'égalité.*)

– « Pouvez-vous représenter la décomposition à l'aide de matériel concret ou de dessins? Comment? »

– « Comment le matériel de base dix aide-t-il à déterminer si l'égalité est vraie ou fausse? »

– « Est-ce possible de vérifier l'égalité sans matériel concret et sans effectuer de calculs? Comment? »

– « Comment peut-on rétablir l'égalité dans la situation où elle se révèle fausse? »

Les deux exemples ci-dessous démontrent, pour les deux dernières égalités données, comment les élèves pourraient représenter la décomposition des nombres et la comparaison des éléments égaux de chaque côté.

Exemple 1	**Exemple 2**
$35 + 47 = 30 + 40 + 14$ $30 + 5 + 40 + 7 = 30 + 40 + 14$ $30 + 5 + 40 + 7 = 30 + 40 + 14$ $12 \longrightarrow + 2$ Donc, l'égalité $35 + 47 = 30 + 40 + 14$ est fausse.	$150 + 75 = 200 + 25$ $100 + 25 + 25 + 75 = 100 + 100 + 25$ $100 + 25 + 25 + 75 = 100 + 100 + 25$ 100 Donc, l'égalité $150 + 75 = 200 + 25$ est vraie.

Modifier la phrase mathématique

QUOI?

Cette stratégie consiste à transformer la phrase mathématique à l'aide d'opérations stratégiques qui mettent l'égalité en évidence.

POURQUOI?

Le fait de modifier de façon stratégique la phrase mathématique permet de reconnaître et de justifier plus facilement l'égalité. La phrase modifiée, qui représente toujours une égalité, peut au besoin être analysée en utilisant une autre stratégie. Les élèves sont encore encouragés à réfléchir au sens des opérations et des nombres dans l'égalité au lieu de procéder aveuglément à des calculs.

COMMENT?

Indiquer aux élèves qu'il est possible de modifier une phrase mathématique de différentes façons sans en modifier le sens. Par exemple, on peut modifier une phrase mathématique en additionnant ou en soustrayant une même quantité de chaque côté du signe =, en annulant des termes égaux ou en effectuant quelques calculs simples. Dans tous ces cas, l'égalité demeure soit vraie, soit fausse, comme elle l'était au départ.

Présenter aux élèves l'égalité 48 + 12 = 50 + 10. Modeler l'utilisation de la stratégie en démontrant comme ci-dessous comment l'addition de 2 de chaque côté du signe = met l'égalité en évidence.

Exemple

48 + 12 = 50 + 10

48 **+ 2** + 12 = 50 **+ 2** + 10 (l'ajout de 2 de chaque côté maintient l'égalité)

50 + 12 = 50 + 12 (égalité vraie)

Donc, l'égalité 48 + 12 = 50 + 10 est aussi vraie.

Présenter ensuite aux élèves d'autres égalités à vérifier à l'aide de cette stratégie. Voici deux exemples possibles, chacun utilisant une approche différente.

Exemple 1 (soustraire une même quantité de chaque côté du signe =)

12 + 88 = 90 + 12

12 **– 12** + 88 = 90 + 12 **– 12**

88 = 90 (égalité fausse)

Donc, l'égalité 12 + 88 = 90 + 12 est aussi fausse.

Exemple 2 (effectuer quelques calculs simples)

24 + 6 + 83 = 30 + 81 + 2

30 + 83 = 30 + 83 (égalité vraie)

Donc, l'égalité 24 + 6 + 83 = 30 + 81 + 2 est aussi vraie.

Inciter les élèves à justifier leur réponse en posant des questions telles que :

– « Cette phrase est-elle vraie ou fausse? »

– « Comment le savez-vous? »

– « Quelles modifications faites-vous à l'équation? Pourquoi l'égalité est-elle maintenue? »

– « Si l'égalité est fausse, comment pouvez-vous rétablir l'égalité? »

Contexte de résolution d'une équation

Au cycle moyen, les élèves doivent résoudre des équations simples par inspection. L'enseignant ou l'enseignante peut les aider à reconnaître comment les stratégies liées à l'analyse d'une égalité qui ont été vues précédemment (comparer des termes, décomposer des nombres et modifier la phrase mathématique) peuvent être utilisées dans un contexte de résolution d'équation. Pour ce faire, il ou elle doit leur présenter des équations qui, en raison de leur structure, se prêtent naturellement à l'utilisation de l'une ou l'autre de ces stratégies.

Voici un exemple d'une démarche d'exploration des stratégies qui peut être utilisée avec les élèves.

	Exemple pour la stratégie *comparer des termes*
1. Présenter une équation pour laquelle la stratégie visée (p. ex., comparer des termes) est clairement applicable.	$423 + 42 = n + 42$
2. Inviter les élèves à la résoudre en utilisant la stratégie visée.	$423 + 42 = n + 42$ $n = 423$
3. Présenter d'autres équations qui ont une structure semblable et demander aux élèves de les résoudre en utilisant la même stratégie.	$35 + 153 = 35 + n$
4. Poursuivre avec des équations qui ont une structure différente, mais qui peuvent aussi être résolues à l'aide de la même stratégie.	$36 + g = 39 + 26$

Tout au long de l'exploration, afin d'amener les élèves à bien comprendre la stratégie visée, poser des questions telles que :

– « Quelle est la valeur de l'inconnue? Comment le savez-vous? »

– « Expliquez la stratégie utilisée. Où s'effectue la comparaison, la décomposition ou la modification? »

– « Comment pouvez-vous justifier que l'égalité est maintenue? »

– « Y a-t-il d'autres façons d'utiliser la stratégie? »

– « Y a-t-il des termes de même valeur qui se retrouvent de chaque côté du signe =? »

– « Est-ce possible de résoudre l'équation autrement? »

– « Y a-t-il un lien entre ces deux stratégies utilisées par les élèves? »

– « Expliquez la comparaison, la décomposition ou la modification que vous effectuez? »

– « Pourquoi la stratégie aide-t-elle à résoudre l'équation? »

– « Comment pouvez-vous représenter la stratégie en utilisant une balance? »

– « Comment pouvez-vous représenter la stratégie concrètement ou à l'aide de matériel de base dix? »

Le tableau suivant présente divers exemples de l'utilisation de chacune des stratégies pour résoudre une équation. Dans chaque cas, l'approche utilisée est conforme à ce qu'il est convenu d'appeler une résolution d'équations par inspection (voir p. 91-92).

	Comparer des termes	
$423 + 42 = n + 42$	Un élève compare chaque côté du signe = et reconnaît qu'on obtient le même résultat en ajoutant 42 à 423 et à *n*. Il conclut alors que $n = 423$.	$423 + 42 = n + 42$
	Un autre élève compare les termes de chaque côté du signe = et constate que le terme 42 paraît de chaque côté. Donc, pour que l'égalité soit maintenue, *n* doit prendre la valeur de 423.	$423 + 42 = n + 42$
$36 + g = 39 + 26$	Une élève compare les quantités de part et d'autre du signe =. Elle reconnaît que 36 est 3 de moins que 39 et conclut que pour maintenir l'égalité, il faut que *g* soit 3 de plus que 26. Elle détermine alors que *g* prend la valeur de 29.	*3 de moins* $36 + g = 39 + 26$ 3 de plus
	Une autre élève explique qu'en comparant 36 et 39, elle voit l'opération + 3. Elle conclut que pour maintenir l'égalité, elle doit effectuer l'opération – 3 lorsqu'elle compare *g* et *26*. Donc, $g = 29$.	- 3 $36 + g = 39 + 26$ + 3
	Décomposer des nombres	
$492 = 90 + \square + 2$	Un élève décompose 492 et obtient $400 + 90 + 2$. Ensuite, il compare les deux membres de l'équation et détermine que $\square = 400$.	$492 = 90 + \square + 2$ $400 + 90 + 2 = 90 + \square + 2$

3 456 + 800 + △ = 813 + 3 456	Une élève compare les deux membres de l'équation et remarque que le nombre 3 456 paraît dans chacun. Ce nombre, additionné à 800 +△ , donne la même somme que lorsqu'il est additionné à 813. Donc, 800 + △ = 813. Elle décompose ensuite 813 en 800 + 13 et conclut que △ = 13.	$3\,456 + 800 + \triangle = \underbrace{813}_{800\,+\,13} + 3\,456$
	Modifier la phrase mathématique	
423 + 42 = *n* + 42	Une élève reconnaît que lorsque l'on enlève une même quantité de chaque côté du signe =, l'égalité est maintenue. Elle enlève donc 42 de chaque côté et elle obtient 423 = *n*.	$423 + 42 = n + 42$ $423 + 42 - 42 = n + 42 - 42$ $423 = n$
	Un élève reconnaît que puisque le nombre 42 apparaît de chaque côté du signe =, il peut modifier l'équation en faisant abstraction de cette quantité. Il obtient alors 423 = *n*.	$423 + 42 = n + 42$ $423 + \cancel{42} = n + \cancel{42}$ $423 = n$
35 − *n* = 27	Un élève reconnaît que s'il ajoute une même quantité de chaque côté du signe =, l'égalité est maintenue. Il ajoute alors 3 de chaque côté et obtient 38 − *n* = 30. Il conclut que c'est 8 qui doit être soustrait de 38 pour obtenir 30. Donc, *n* = 8.	$35 - n = 27$ $35 + 3 - n = 27 + 3$ $38 - n = 30$ $n = 8$
2*a* + 5 = 25	Une élève reconnaît que si elle enlève une même quantité de chaque côté du signe =, l'égalité est maintenue. Elle enlève alors 5 de chaque côté et obtient l'équation 2*a* = 20. Elle conclut que *a* = 10 puisqu'elle sait que 2 × 10 = 20.	$2a + 5 - 5 = 25 - 5$ $2a = 20$ $a = 10$
33 + 12 = □ + 40	Un élève reconnaît que l'on maintient l'égalité même si on effectue quelques calculs simples. Il additionne donc 33 et 12 et obtient l'équation 45 = □ + 40. Il reconnaît ensuite que c'est 5 que l'on doit ajouter à 40 pour obtenir 45 et conclut que □ = 5.	33 + 12 = □ + 40 45 = □ + 40 □ = 5

Annexe C – Représentations en modélisation et algèbre

> *[…] les représentations ont tendance à influer sur la capacité de l'élève à généraliser […]. Il semble y avoir un lien entre l'habileté à représenter et la facilité à généraliser, la généralisation étant une compétence importante en algèbre.*
>
> (Rivera, 2006, p. 307, traduction libre)

Représenter, c'est véhiculer des idées. En mathématiques, la représentation se traduit par une communication d'idées, de concepts, de stratégies ou par l'interprétation d'une situation. L'utilisation de diverses représentations par l'enseignant ou l'enseignante et par les élèves aide au développement de la pensée algébrique.

Les enseignants et les enseignantes utilisent diverses représentations pour	Les élèves utilisent diverses représentations pour
• présenter un nouveau concept • modeler des stratégies • vérifier la compréhension des élèves	• approfondir leur compréhension • communiquer leurs idées mathématiques • résoudre des problèmes

Les représentations peuvent être perçues comme étant des outils facilitant l'établissement de liens entre le quotidien, la réalité et le monde des mathématiques.

(Post et Cramer, 1989, p. 223, traduction libre)

D'ailleurs selon Driscoll (1999, p. 141), les représentations multiples d'une même situation contribuent à l'acquisition de la pensée algébrique, en forçant les élèves à établir des liens entre chacune. La modélisation facilite l'exploration de relations et permet aux élèves d'accéder progressivement à un niveau d'abstraction plus élevé. Il importe alors que l'enseignant ou l'enseignante propose une variété de représentations et encourage les élèves à les utiliser afin de structurer leur raisonnement.

En modélisation et algèbre, l'enseignant ou l'enseignante et les élèves peuvent entre autres, représenter des idées mathématiques, des situations et des relations à l'aide :

- de matériel de manipulation;
- d'une illustration;
- d'un tableau de nombres;
- d'une grille de nombres;
- d'un tableau;
- d'une balance à plateaux;
- d'une droite numérique;
- d'une disposition rectangulaire;
- d'une table de valeurs;
- d'un diagramme;
- d'un plan cartésien;
- d'une équation.

Dans les pages qui suivent, on présente une brève explication de chacun de ces outils et quelques exemples de leur utilisation en modélisation et algèbre. Certains outils sont utilisés tout au long du document pour illustrer des habiletés et représenter des concepts reliés au domaine Modélisation et algèbre.

Note : Plusieurs outils technologiques sont disponibles pour représenter des situations (p. ex., tableur, calculatrice à affichage graphique, logiciel de construction de diagrammes). Il faudrait encourager les élèves à les utiliser. Pour plus d'informations sur les outils technologiques, consulter le module Modélisation et algèbre, 4e à la 6e, sur le site atelier.on.ca.

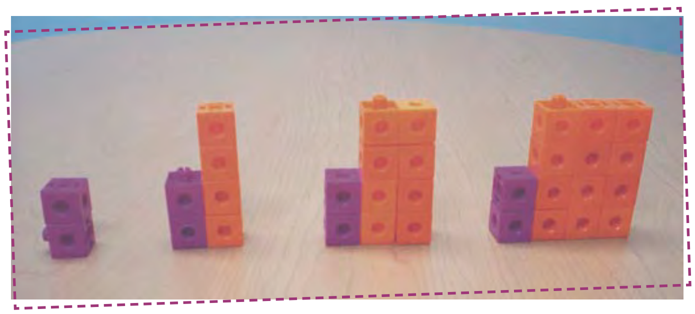
atelier.on.ca

Matériel de manipulation

Le matériel de manipulation (p. ex., carreaux algébriques, cubes emboîtables, jetons, réglettes Cuisenaire) est très varié. Son utilisation aide les élèves à explorer, à représenter et à faire des modifications facilement en cours d'essais. Voici des exemples d'utilisation de matériel de manipulation.

Exemple 1 – Représentation d'une suite numérique

Demander aux élèves de représenter la suite numérique 2, 6, 10, 14… de façon concrète afin de rendre la régularité plus visible, et ce, en construisant une suite non numérique à motif croissant à l'aide du matériel de manipulation de leur choix. Les encourager à ajouter le matériel (cubes, jetons, etc.) toujours de la même façon d'une structure à l'autre et de le réorganiser au besoin.



Questions pertinentes

– « Combien de cubes (jetons, blocs…) utiliserez-vous pour représenter concrètement le premier terme de la suite numérique? le deuxième terme? le troisième terme?... »

– « Quel changement remarquez-vous d'une structure à l'autre? »

– « Est-ce que vos cubes sont ajoutés de la même façon d'une structure à l'autre? »

– « Comment décririez-vous l'apparence de la prochaine structure dans cette suite à motif croissant? »

– « Combien de cubes la dixième structure contiendra-t-elle? Comment pouvez-vous le déterminer? »

– « Quelle est la régularité? Comment le savez-vous? »

Exemple 2 – Représentation d'une équation

Demander aux élèves de représenter l'équation $e + e + 10 = 22$ de façon concrète et de manipuler le matériel afin de déterminer la valeur de l'inconnue.

Un éléve a représenté l'équation comme ci-dessous (Photo A).

$e + e + 10 = 22$

Photo A

L'élève a ensuite enlevé une dizaine de chaque côté (Photo B), puis a réparti les cubes en deux groupes égaux, soit deux groupes de 6 cubes (Photo C). En procédant ainsi, il a pu conclure que e vaut 6 (Photo D).

$e + e = 12$ *Photo B*

$e + e = 6 + 6$ *Photo C*

$e = 6$ *Photo D*

Questions pertinentes

– « Est-il possible de simplifier la représentation concrète de l'équation? Comment? »

– « Quelle équation représente la situation après l'avoir simplifiée? »

– « Tout au long de la résolution, comment peut-on s'assurer que l'égalité soit maintenue? »

– « Comment peut-on déterminer la quantité que représente l'inconnue? »

– « De quelle autre façon peut-on trouver la réponse? »

– « Quelle est la valeur de l'inconnue? »

Illustration

L'illustration permet aux élèves de créer une représentation personnelle semi-concrète de leurs observations et de leur compréhension, ce qui les aide à clarifier leur pensée. Elle s'avère particulièrement avantageuse pour les élèves qui éprouvent de la difficulté à écrire ou à utiliser des symboles comme moyen de représentation, les dessins tenant lieu de justifications ou d'explications.

De nombreux types de problèmes incitent naturellement les élèves à faire un dessin pour les aider à les résoudre. Il arrive aussi qu'ils aient recours au matériel de manipulation en même temps. Or, plus ils acquièrent une pensée abstraite, plus ils délaissent le matériel de manipulation pour des dessins. Voici des exemples d'utilisation d'une illustration.

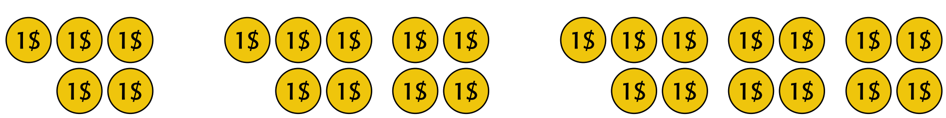
Exemple 1 – Représentation d'une situation par une suite non numérique à motif croissant

Présenter la situation suivante aux élèves :

> *Simon veut se procurer un jouet, mais il n'a pas assez d'argent dans sa tirelire. Ses parents décident de lui remettre chaque semaine une même somme d'argent qu'il dépose dans sa tirelire. Afin de tenir compte de la somme accumulée dans sa tirelire, Simon a créé la table de valeurs suivante :*

Numéro de la semaine	1	2	3	4		
Somme dans la tirelire ($)	5	9	13	17		

Demander aux élèves d'illustrer la situation et de déterminer la somme d'argent que les parents lui donnent chaque semaine et la somme accumulée de semaine en semaine.



Semaine 1 Semaine 2 Semaine 3

Questions pertinentes

– « De quelle façon l’illustration aide-t-elle à déterminer la régularité? »

– « Quelle somme d’argent Simon aura-t-il dans la tirelire la 5e semaine? Comment le savez-vous? »

– « Si Simon reçoit une même somme chaque semaine, comment expliquer qu’il a 5 $ après la 1re semaine? »

– « Comment pouvez-vous déterminer la somme dans la tirelire après un grand nombre de semaines, par exemple, la 10e semaine? »

– « Après combien de semaines Simon aura-t-il assez d’argent pour acheter un jeu vidéo au prix de 45 $ (taxes incluses)? »

– « Par quelle équation la relation entre le numéro de la semaine et la somme accumulée dans la tirelire peut-elle être représentée? »

Exemple 2 – Représentation d’une situation-problème

Inviter les élèves à illustrer la situation-problème suivante :

À la ferme, j’ai vu 12 cochons, des vaches et 4 bœufs. En tout, il y avait 25 bêtes. Combien de vaches y avait-il?

Questions pertinentes

– « Que représente ton illustration? »

– « Pourquoi y a-t-il des lignes entre les animaux et le nombre 25? »

– « Quelle équation correspond à la situation et à ton illustration? »
(12 + ? + 4 = 25)

Tableau de nombres

Le tableau de nombres est une grande affiche de 100 petites pochettes dans lesquelles on peut insérer, déplacer, retourner ou retirer facilement et rapidement des cartons portant un nombre ou un symbole.

L'utilisation du tableau de nombres permet aux élèves d'explorer, de représenter, d'analyser et de créer des suites numériques. C'est un outil polyvalent, car il est facile de déplacer les cartons pour créer une grille de dimensions différentes. Le tableau peut aussi aider les élèves à travailler avec une grille de nombres. De plus, il permet d'explorer un grand nombre de régularités. Voici un exemple d'utilisation d'un tableau de nombres.

Exemple – Représentation d'une suite numérique

Placer des cartons portant des nombres dans les pochettes pour créer une suite numérique d'au moins trois termes (p. ex., 2, 4, 6). Placer des cartons portant une étoile (★) à divers endroits dans le tableau. Proposer aux élèves de déterminer la valeur des nombres que l'on placerait à la place des étoiles, selon la suite donnée.

2	4	6							★
				★					
		★							
★									★

Questions pertinentes

– « Quel nombre placera-t-on dans la 4e pochette? la 5e? Comment le savez-vous? »

– « Quels nombres devraient remplacer les étoiles? Qu'avez-vous fait pour les trouver? »

– « Est-ce que votre stratégie peut être utilisée pour déterminer n'importe quel nombre dans le tableau? »

– « Dans ce tableau de nombres, quelle relation y a-t-il entre deux pochettes adjacentes dans la même rangée? dans la même colonne? »

– « Quelle règle définit cette suite numérique? »

– « Si les premiers nombres de la suite étaient 3, 6, 9, quels nombres seraient placés à la place des étoiles? Comment le savez-vous? »

Grille de nombres

La grille de nombres est une grille dans laquelle des nombres sont placés dans un ordre particulier. La grille de 10 carrés sur 10 carrés, qui contient les nombres de 1 à 100, s'appelle *grille de 100*. Même si on la trouve plus souvent dans ce format, une grille de nombres peut avoir des dimensions différentes. Par exemple, le calendrier est une grille de nombres. La grille de nombres est semblable au tableau de nombres, sauf qu'il est impossible de manipuler les nombres qu'elle contient puisqu'il s'agit d'une représentation semi-concrète.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

L'utilisation de la grille de nombres permet de faire ressortir des régularités. Elle est utile pour explorer, pour représenter et pour créer des suites numériques ou pour analyser diverses régularités. Voici des exemples d'utilisation d'une grille de nombres.

Exemple 1 – Représentation de régularités

Remettre aux élèves une grille de 15 × 15 et inscrire les trois premiers nombres, soit 1, 2 et 3.

1	2	3												15
	17													
														…

Leur demander d'utiliser les régularités de la grille pour situer quelques nombres tels que 17, 44, 61 et 119, et de justifier leur emplacement.

Un élève pourrait justifier une position choisie en disant : « J'ai vérifié les dimensions de la grille qui sont de 15 × 15. Donc, sans remplir la grille, je savais que le 17 était dans la 2^{e} case de la 2^{e} rangée, car dans la première case de la 2^{e} rangée, c'est 1 de plus que 15 et dans la 2^{e} case, c'est 2 de plus. »

Demander de situer les mêmes nombres dans une grille de format différent et amener les élèves à justifier leurs choix de position. Les inviter à établir des liens entre les régularités contenues dans deux grilles de nombres différentes.

1	2	3		
	17			
				…

Questions pertinentes

– « Dans cette grille de nombres, quelle relation y a-t-il entre deux cases adjacentes dans la même rangée? dans la même colonne? »

– « Qu'est-ce qui détermine la relation entre deux cases adjacentes dans la même colonne? »

– « Quelles seraient les différences entre deux cases adjacentes à la verticale si les dimensions de la grille étaient 20 × 20? Comment le savez-vous? »

– « Quelles pourraient être les dimensions de votre grille si le dernier nombre doit être 24? »

– « Quelles doivent être les dimensions de votre grille si la différence entre les cases verticales doit être 13 et si le dernier nombre de la grille doit être 78? »

Exemple 2 – Représentation de relations entre des nombres

Montrer, à l'aide d'un rétroprojecteur, un pochoir (Figure 1) placé sur une grille de 100 en mettant en évidence le nombre dans la case de départ et celui dans la case d'arrivée (Figure 2).

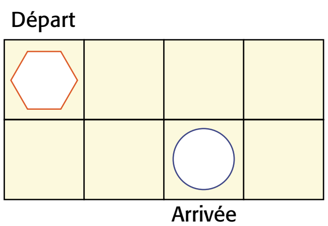


Figure 1

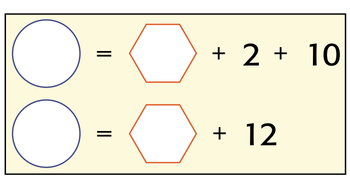
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52				56	57	58	59	60
61			64		66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 2

Déplacer le pochoir à quelques reprises sur la grille et inviter les élèves à examiner les régularités afin d'établir un lien entre le nombre qui paraît dans la case de départ et celui dans la case d'arrivée.

Dans l'exemple de la figure 2, les élèves devraient voir qu'on ajoute 2 unités et 1 dizaine au nombre de la case de départ pour obtenir le nombre de la case d'arrivée ($52 + 2 + 10 = 64$).

Inviter les élèves à verbaliser la régularité (p. ex., il y a toujours une différence de 12 entre les nombres ou le nombre d'arrivée est toujours 12 de plus que le nombre de départ) et les amener à écrire une équation correspondante.



Inviter les élèves à construire des pochoirs (selon une forme prescrite ou une forme de leur choix), à les mettre à l'essai, à examiner la relation entre le nombre dans la case de départ et celui dans la case d'arrivée et à représenter cette relation par une équation.

Note : La relation dépend de l'orientation du pochoir, des dimensions de la grille utilisée et de la position des cases de départ et d'arrivée sur le pochoir.

Questions pertinentes

– « Quelle règle définit la relation entre les deux nombres dans cette grille de 100? »

– « Pouvez-vous créer une table de valeurs pour représenter la relation entre les deux nombres? »

– « La règle sera-t-elle différente si le pochoir est utilisé sur une grille de 20 × 20? »

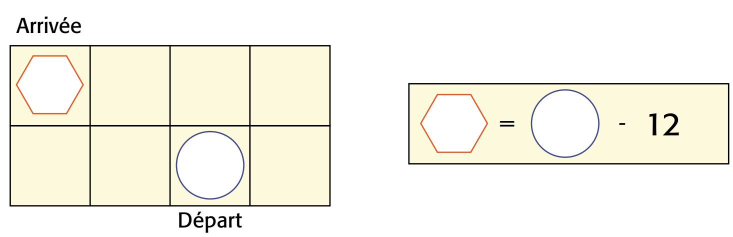
Nombre dans la case de départ	Nombre dans la case d'arrivée
1	13
2	14
15	27
…	…

– « Est-ce possible de créer un pochoir différent qui présenterait la même relation dans cette grille de 100? »

– « Qu'est-ce qui arriverait à la relation générée par ce pochoir si on lui faisait subir une rotation de un quart de tour, de un demi-tour ou de trois quarts de tour dans le sens des aiguilles d'une montre? dans le sens contraire des aiguilles d'une montre? »

– « Qu'est-ce qui arriverait à la relation générée par ce pochoir si on lui faisait subir une réflexion par rapport à un axe vertical? »

– « Qu'est-ce qui arrive à l'équation de la relation lorsqu'on intervertit la case de départ et la case d'arrivée? » (*L'équation contient l'opération inverse*)



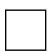
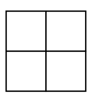
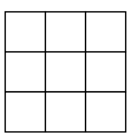
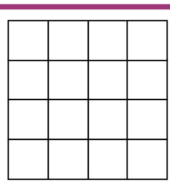
– « Qu'est-ce qui arriverait à la relation générée par ce pochoir si on utilisait une grille de 100 de format 20 × 5 au lieu de 10 × 10? »

Tableau

Le tableau permet de compiler et d'organiser des données de façon semi-concrète. Son organisation en rangées et en colonnes peut favoriser l'analyse des données, la reconnaissance de relations entre les nombres et la résolution de problèmes. Voici des exemples d'utilisation d'un tableau.

Exemple 1 – Représentation de valeurs ou de données

Inviter les élèves à déterminer le périmètre des carrés présentés dans le tableau suivant.

Carré	Calcul effectué	Périmètre
	1 + 1 + 1 + 1 ou 4 × 1	4
	2 + 2 + 2 + 2 ou 4 × 2	8
	3 + 3 + 3 + 3 ou 4 × 3	12
	4 + 4 + 4 + 4 ou 4 × 4	16

Questions pertinentes

– « Quelles régularités remarquez-vous dans ce tableau? »

– « Comment pourrait-on déterminer le périmètre du prochain carré? d'un carré de 15 sur 15? »

– « Quelle est la longueur des côtés d'un carré qui a un périmètre de 48? »

– « Comment pourrait-on déterminer le périmètre de n'importe quel carré? »

– « Quelle règle permet de calculer le périmètre de n'importe quel carré? »
(*$p = c + c + c + c$ ou $p = 4 \times c$, où p est le périmètre et c, la longueur d'un côté*)

Exemple 2 – Représentation organisée de données

Présenter la situation suivante :

J'ai 9 pièces de monnaie dans la poche, soit 3 pièces de 25 ¢, 3 pièces de 10 ¢ et 3 pièces de 5 ¢. Je prends 3 pièces au hasard. Dans un tableau, dresse la liste de toutes les combinaisons de pièces possibles et des sommes d'argent correspondantes. Avant de le remplir, pense à une méthode pour organiser ta liste afin de ne pas oublier de combinaisons.

Nombre de pièces de 25 ¢	Nombre de pièces de 10 ¢	Nombre de pièces de 5 ¢	Valeur totale
3	0	0	0,75 $
2	1	0	0,60 $
2	0	1	0,55 $
1	2	0	0,45 $
1	1	1	0,40 $
1	0	2	0,35 $
0	3	0	0,30 $
0	2	1	0,25 $
0	1	2	0,20 $
0	0	3	0,15 $

Questions pertinentes

– « Combien y a-t-il de combinaisons possibles en tout dans le tableau? Comment savez-vous que vous avez trouvé toutes les combinaisons? »

– « Pouvez-vous expliquer l'ordre dans lequel vous avez écrit vos combinaisons? »

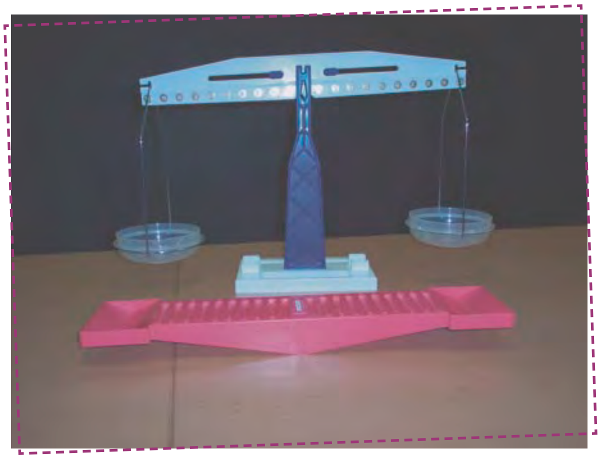
– « Quelle est la plus petite valeur totale dans le tableau? La plus grande? »

– « Les combinaisons étant placées de façon ordonnée, quelles régularités remarque-t-on dans ce tableau? » (*Dans le tableau, il y a **1** seule possibilité si je pige 3 pièces de 25 ¢; ensuite, **2** possibilités si j'en prends 2, **3** possibilités si j'en prends 1 et finalement, **4** possibilités si je ne prends aucune (0) pièce de 25 ¢.*)

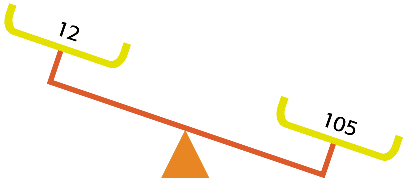
– « Si j'ai 3 pièces de 1 ¢, 3 pièces de 5 ¢ et 3 pièces de 10 ¢, y aura-t-il le même nombre de combinaisons, y en aura-t-il plus ou y en aura-t-il moins? Est-ce que les valeurs totales seront les mêmes? Comment le savez-vous? »

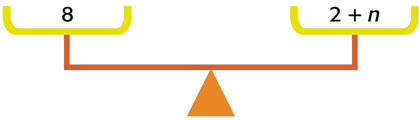
Balance à plateaux

La balance à plateaux est utilisée au cycle primaire pour démontrer l'égalité ou l'inégalité de deux quantités que l'on place sur les plateaux. Elle facilite donc l'étude des relations de grandeur (plus grand que, plus petit que, est égal à). Il importe toutefois de rappeler aux élèves que ce sont des quantités de même masse qui sont comparées puisqu'en réalité, la balance est un outil qui compare des masses.



Au cycle moyen, on utilise surtout une version semi-concrète de la balance. Par exemple :

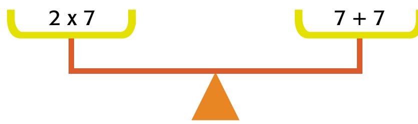




Le concept d'équilibre ou d'égalité est fondamental en algèbre. L'utilisation d'une balance aide les élèves à confirmer ou à infirmer des situations d'égalité ou d'inégalité. Elle leur permet aussi d'explorer diverses stratégies pour représenter, maintenir ou établir l'égalité. Pour plus de renseignements en ce qui a trait à ces stratégies, voir l'annexe B (p. 200-209). Voici des exemples d'utilisation d'un modèle de balance.

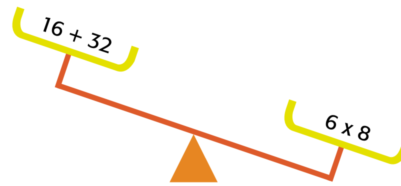
Exemple 1 – Représentation d'une phrase mathématique

Dessiner une balance (en équilibre ou en déséquilibre) et inscrire une expression numérique dans chaque plateau, puis demander aux élèves si la représentation de la balance est juste et, de ce fait, si la phrase mathématique représentée est vraie ou fausse. Par exemple :



2 x 7 = 7 + 7

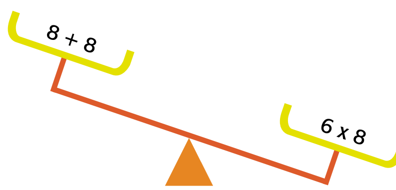
Phrase mathématique vraie



16 + 32 < 6 x 8

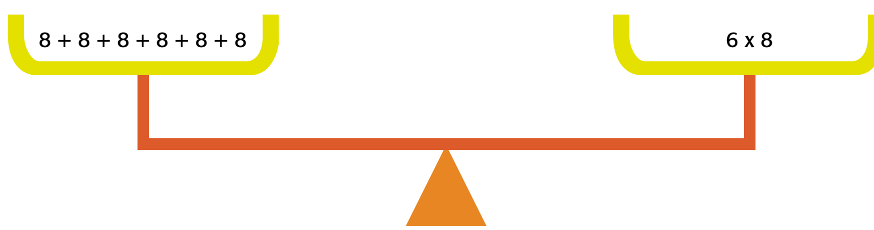
Phrase mathématique fausse

Demander aux élèves de mettre la balance en équilibre et d'expliquer la stratégie utilisée pour y arriver.



8 + 8 < 6 x 8

Sachant que dans le plateau de gauche il y a l'expression 8 + 8, ce qui équivaut à 2 × 8, et que dans le plateau de droite il y a l'expression 6 × 8, on peut établir l'égalité en ajoutant 4 × 8 ou 8 + 8 + 8 + 8 au plateau de gauche.



Questions pertinentes

– « Que faut-il faire pour transformer les phrases mathématiques fausses en phrases vraies? pour placer la balance en équilibre? »

– « Si la balance est en équilibre, quel changement peut-on y faire tout en maintenant l'égalité? »

– « Pourquoi votre façon d'établir l'égalité fonctionne-t-elle? Est-ce que cette stratégie fonctionne pour rétablir l'égalité de n'importe quelle inégalité? »

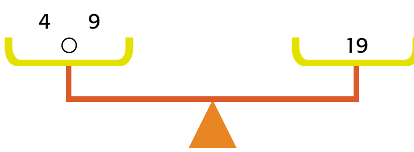
– « Quelles différences et ressemblances y a-t-il entre les stratégies proposées? »

– « Pouvez-vous écrire la phrase mathématique qui représente l'égalité et l'expliquer? »

– « Que remarquez-vous au sujet des expressions des deux côtés du signe d'égalité? »

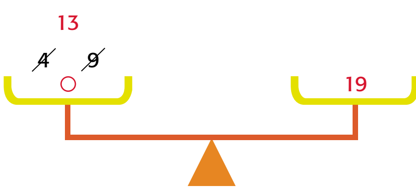
Exemple 2 – Représentation d'une situation d'égalité

Présenter la balance ci-dessous aux élèves. Leur demander de déterminer la valeur du cercle en utilisant des stratégies qui permettent de maintenir l'équilibre.

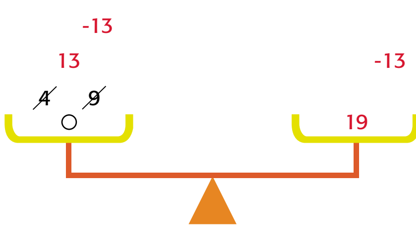


Stratégies possibles

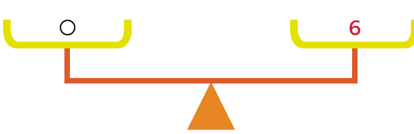
Les élèves peuvent maintenir l'équilibre en **effectuant des calculs** sur un plateau de la balance.



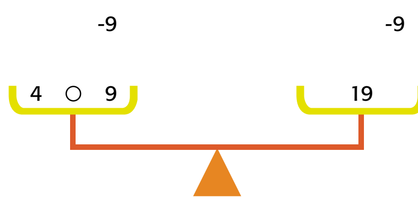
Ils peuvent ensuite **soustraire des quantités égales** de chaque plateau.

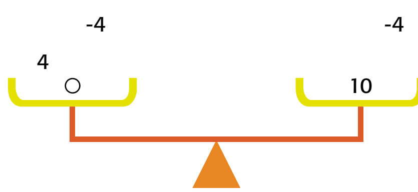


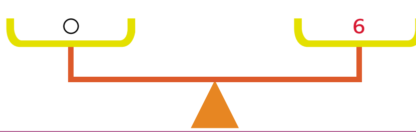
Ils peuvent alors conclure que ○ = 6.



Les élèves peuvent maintenir l'équilibre en **soustrayant des quantités égales** de chaque plateau.







Questions pertinentes

– « Pouvez-vous vérifier que la valeur déterminée permet de maintenir l'équilibre? »

– « Quelle équation cette situation représente-t-elle? Pouvez-vous l'expliquer? »

– « Qu'est-ce qui est identique de chaque côté? Qu'est-ce qui est différent? »

– « Qu'avez-vous fait pour déterminer la valeur de l'inconnue? »

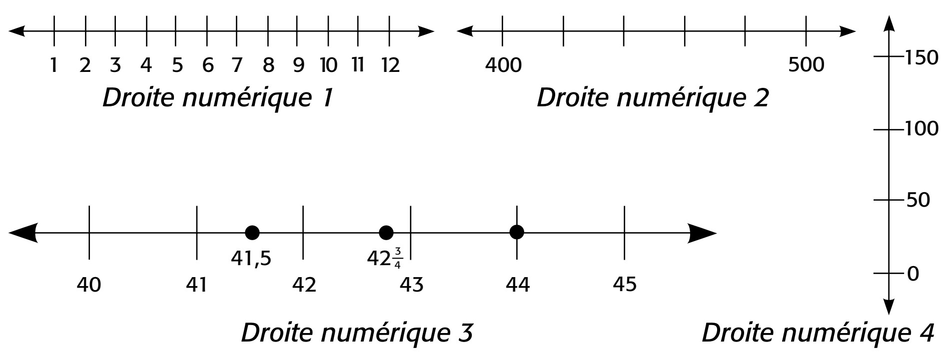
– « Dans la stratégie utilisée pour déterminer la valeur de l'inconnue à l'aide de la balance et celle utilisée à l'aide de l'équation, qu'y avait-il de semblable? »

– « Peut-on résoudre l'équation d'une autre manière? »

– « Est-il nécessaire de faire des calculs pour déterminer l'inconnue? »

Droite numérique

La droite numérique permet de représenter de façon semi-concrète des opérations et des nombres. Elle est généralement placée à l'horizontale ou à la verticale. Elle est souvent graduée, c'est-à-dire qu'une certaine longueur définit un même intervalle sur l'ensemble de la droite. Par exemple, les droites numériques 1 et 3 sont graduées par intervalles de 1, la droite numérique 2 est graduée par intervalles de 20 et la droite numérique 4 est graduée par intervalles de 50.



Droite numérique 1

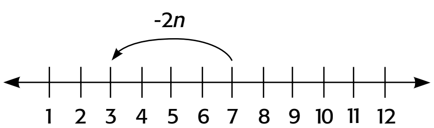
Droite numérique 2

Droite numérique 3

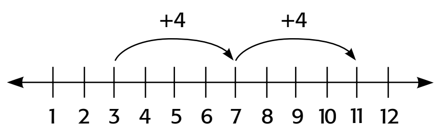
Droite numérique 4

Note : Quoiqu'une droite numérique puisse être tracée sans flèche ou avec une ou deux flèches qui indiquent l'infini, à l'élémentaire, la droite numérique avec une flèche à chaque extrémité est plus fréquente.

Sur une droite numérique, les opérations peuvent être représentées par des bonds. La longueur du bond correspond à la quantité, tandis que le sens du bond indique l'opération : une flèche vers la droite indique un ajout (addition) et une flèche vers la gauche indique un retrait (soustraction). Une multiplication peut être indiquée par un bond vers la droite ou par une série de bonds vers la droite (addition répétée).

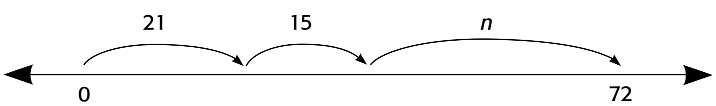


7 - 2*n* = 3



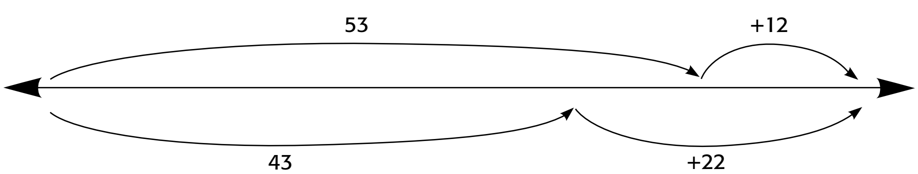
3 + (2 x 4) = 11

Une droite numérique peut ne pas être graduée. Elle est tout de même « numérique », car on l'utilise comme si elle était graduée. L'étendue des bonds tracés sur la droite est à peu près proportionnelle aux quantités utilisées. Les élèves qui ont l'habitude de représenter des relations d'égalité acquièrent l'habileté à dessiner des bonds proportionnels. La droite non graduée est parfois appelée droite numérique ouverte ou droite numérique vide.



21 + 15 + *n* = 72

Lorsque deux expressions numériques sont reportées en haut et en bas d'une droite, on l'appelle droite numérique ouverte double.



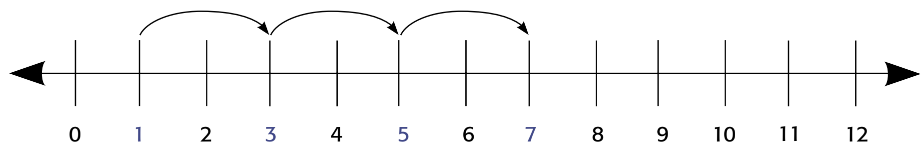
53 + 12 = 43 + 22

En modélisation et algèbre, la droite numérique permet de représenter des suites, des équations et des inéquations ainsi que des égalités et des inégalités. Elle permet aussi de faire ressortir les relations entre les nombres et les opérations. Voici des exemples d'utilisation d'une droite numérique.

Exemple 1 – Représentation d'une suite

Demander aux élèves de représenter la suite non numérique à motif croissant suivante sur une droite numérique en indiquant le nombre de signes @ qui composent chaque terme.

@ @@@ @@@@@...



Questions pertinentes

– « Comment la droite numérique nous aide-t-elle à voir la régularité? »

– « À quelle opération se rapportent les bonds répétitifs? »

– « Quel sera le prochain terme de la suite? Quel est votre raisonnement pour le déterminer? »

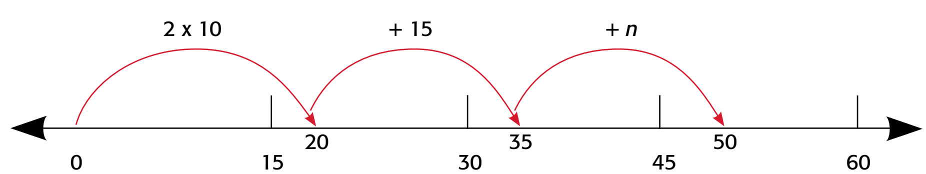
– « Combien y aura-t-il de signes @ dans le 10e terme? Justifiez votre réponse. »

– « Comment pouvez-vous déterminer le nombre de signes @ qui composent un terme quelconque? »

Exemple 2 – Représentation d'une situation-problème

Demander aux élèves de représenter la situation suivante sur une droite numérique :

> *Jean a 50 gommettes. Il remet 2 colonnes de 10 gommettes à Pierre et 15 gommettes à Pauline. Il remet le reste à Abel. Combien de gommettes Abel reçoit-il?*



Questions pertinentes

– « Que représentent les bonds sur la droite? »

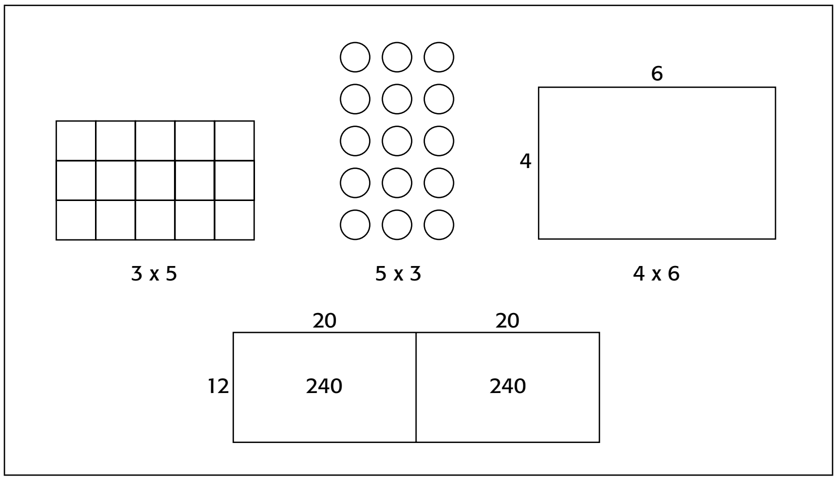
– « Que représentent les nombres sur la droite? »

– « Comment avez-vous déterminé la longueur des bonds? »

– « Quelle équation correspond à la situation? » ($2 \times 10 + 15 + n = 50$)

Disposition rectangulaire

La disposition rectangulaire est une représentation de forme rectangulaire. Elle peut être composée d'un ensemble d'objets (mode concret) ou de dessins (mode semi-concret) disposés en rangées et en colonnes, ou il peut s'agir de simples rectangles.



Une disposition rectangulaire est très utile pour représenter des nombres, des opérations (particulièrement la multiplication) et leurs propriétés. Elle permet également d'explorer et de visualiser facilement les relations entre des faits numériques de multiplication. Voici des exemples d'utilisation d'une disposition rectangulaire.

Note : Pour des renseignements en ce qui a trait à l'utilisation de la disposition rectangulaire, voir le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4^e^ à la 6^e^ année, Numération et sens du nombre, Nombres naturels*, fascicule 1 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008c, p. 134-137).

Exemple 1 – Représentation d'une suite de figures

Présenter la suite de figures suivante :

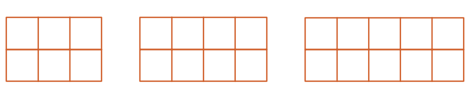


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Demander aux élèves de construire la 4^e^ et la 5^e^ figure. Avec eux, remplir une table de valeurs qui représente la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent.

Inviter les élèves à décrire les figures en fonction de ce qu'ils voient. Par exemple :

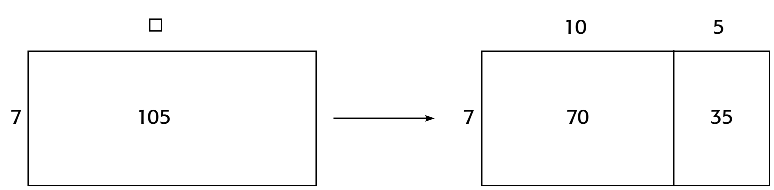
Dans la figure 1, il y a 2 rangées de 3 carrés.
Dans la figure 2, il y a 2 rangées de 4 carrés.
Dans la figure 3, il y a 2 rangées de 5 carrés.

Leur demander de décrire ce qu'aurait l'air la 10e figure, de déterminer le nombre de carrés dont elle serait composée et de prolonger la suite jusqu'à la 10e figure pour vérifier si leur description s'avère exacte.

Note : Selon l'année d'études, on peut poursuivre le questionnement pour amener les élèves à exprimer la relation entre le numéro d'une figure et le nombre de carrés qui la composent et à formuler une règle sous la forme d'une équation [p. ex., $c = (n + 2) \times 2$, où n est le numéro de la figure et c, le nombre de carrés qui la composent].

Exemple 2 – Représentation d'une équation

Présenter l'équation $7 \times \square = 105$ et demander aux élèves de déterminer la valeur de l'inconnue à l'aide d'une disposition rectangulaire.



Donc, $\square = 15$.

Questions pertinentes

– « Comment avez-vous fait pour trouver l'inconnue? »

– « Pourquoi votre façon de procéder fonctionne-t-elle? »

– « Est-ce que votre stratégie peut être utilisée pour résoudre $8 \times$ ____ $= 128$? ____ $\times 4 = 96$? $105 \div \square = 7$? »

– « Comment peut-on résoudre l'équation avec d'autres représentations? »

Table de valeurs

La table de valeurs permet de représenter semi-concrètement la relation entre deux quantités changeantes (variables), dont l'une dépend de l'autre. À la fin du cycle primaire, les élèves ont appris à construire des tables de valeurs pour représenter des relations dans des situations-problèmes.

La table de valeurs est souvent construite pour représenter la relation entre des valeurs numériques associées aux termes d'une suite non numérique à motif croissant et le rang de ces termes.

Exemple

On peut étudier la relation entre le numéro d'une figure dans une suite non numérique et le nombre d'objets qui la composent. Le numéro de la figure (son rang) est inscrit dans la première colonne (ou rangée) et le nombre d'objets qui composent la figure (valeur du terme) est inscrit dans la deuxième colonne (ou rangée). La régularité des termes de la deuxième colonne (ou rangée) peut être utilisée pour prolonger la table de valeurs.

Numéro de la figure	Nombre d'objets
1	2
2	4
3	6
…	…

Numéro de la figure	1	2	3	…
Nombre d'objets	2	4	6	

On peut également se servir de la table de valeurs pour présenter des valeurs de variables d'une équation ou dans un contexte de résolution de problèmes. Voici des exemples d'utilisation d'une table de valeurs.

Exemple 1 – Représentation de la relation entre deux quantités changeantes

Présenter la suite de figures suivante :

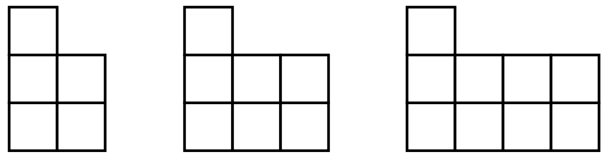


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

Demander aux élèves de créer une table de valeurs qui représente la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés qui la composent.

Relation entre le numéro des figures

+ 1 + 1 + 1

Numéro de la figure	1	2	3	...
Nombre de carrés	5	7	9	...

Relation entre le numéro de la figure et le nombre de carrés

+ 2 + 2 + 2

Relation entre le nombre de carrés

Questions pertinentes

– « Quelles sont les régularités dans la table de valeurs? »

– « Quelle est la valeur des prochains termes? »

– « Quel lien y a-t-il entre la suite non numérique et la table de valeurs? »

Exemple 2 – Représentation de valeurs des variables

Présenter l'équation $g + k = 11$ et demander aux élèves de déterminer les valeurs entières possibles de g et de k.

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Questions pertinentes

– « Si g prend la valeur de 10, quelle valeur la variable k doit-elle prendre? »

– « Si k prend la valeur de 8, quelle valeur la variable g doit-elle prendre? »

– « Y a-t-il d’autres valeurs possibles? Comment pouvez-vous le vérifier? »

– « Comment pouvez-vous organiser les différentes possibilités dans une table de valeurs? »

Diagramme

Un diagramme permet de représenter de façon schématique un ensemble de données. Au cycle moyen, dans le domaine Traitement des données et probabilité, les élèves apprennent notamment à représenter des données en utilisant différents diagrammes. Il peut arriver qu’ils veuillent se servir de ces connaissances dans le domaine Modélisation et algèbre. L’allure de l’ensemble des données dans un diagramme (p. ex., bandes en ordre croissant ou décroissant) permet une analyse du changement et facilite l’interpolation et l’extrapolation. Voici des exemples d’utilisation d’un diagramme.

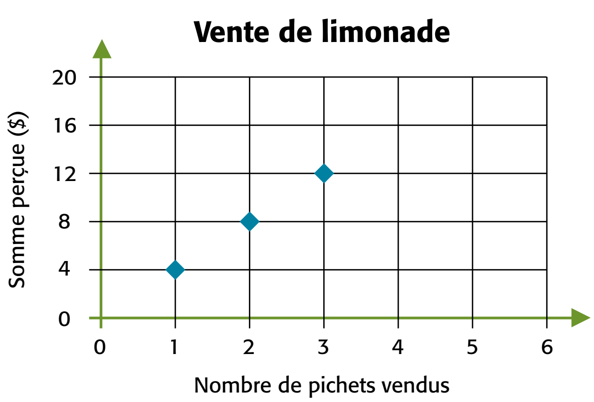
Exemple 1 – Représentation de la relation entre deux quantités changeantes

Présenter la situation suivante :

> *Samedi dernier, pendant le marathon, Louis et Gaëlle ont vendu de la limonade. À chaque pichet vendu, ils comptaient l’argent reçu. La table de valeurs ci-dessous représente la relation entre le nombre de pichets vendus et la somme perçue.*

Nombre de pichets vendus	1	2	3		
Somme perçue ($)	4	8	12		

Ensuite, représenter les données dans un diagramme comme celui présenté ci-après.



Questions pertinentes

– « Quels changements y a-t-il de la vente d'un pichet à l'autre? Ces changements sont-ils toujours les mêmes? Pourquoi? »

– « En examinant le diagramme, comment est-ce possible de déterminer la prochaine entrée d'argent? »

– « Quelle est la relation entre le nombre de pichets vendus et la somme perçue? »

– « Comment les trois premières valeurs représentées dans le diagramme peuvent-elles vous aider à déterminer la somme perçue après la vente de 8 pichets? »

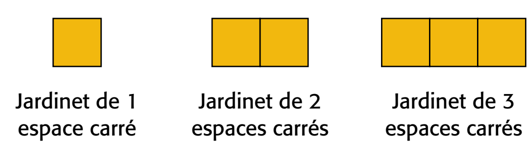
– « Combien de pichets devaient-ils vendre s'ils voulaient une somme d'environ 50 $? »

Exemple 2 – Représentation de la relation entre deux quantités changeantes

Présenter la situation suivante :

> *Édenville loue des jardinets aux personnes de sa communauté. Un jardinet d'un espace carré a un périmètre de 4 mètres, un jardinet de 2 espaces carrés a un périmètre de 6 mètres, un jardinet de 3 espaces carrés a un périmètre de 8 mètres, et ainsi de suite.*

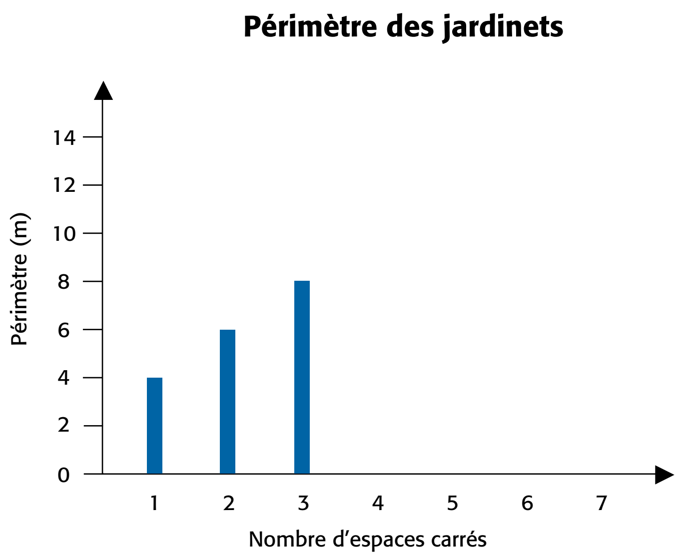
Représenter avec les élèves les jardinets à l'aide d'une illustration. Par exemple :



Représenter par une table de valeurs la relation entre le périmètre d'un jardinet et le nombre d'espaces carrés qu'il occupe.

Nombre d'espaces carrés	Périmètre (m)
1	4
2	6
3	8

Ensuite, représenter les données dans un diagramme tel que celui présenté ci-dessous.



Questions pertinentes

– « Quel changement y a-t-il entre les valeurs du nombre d'espaces carrés? entre les valeurs des périmètres? Pourquoi? »

– « Quelles seraient les prochaines entrées dans la table de valeurs? »

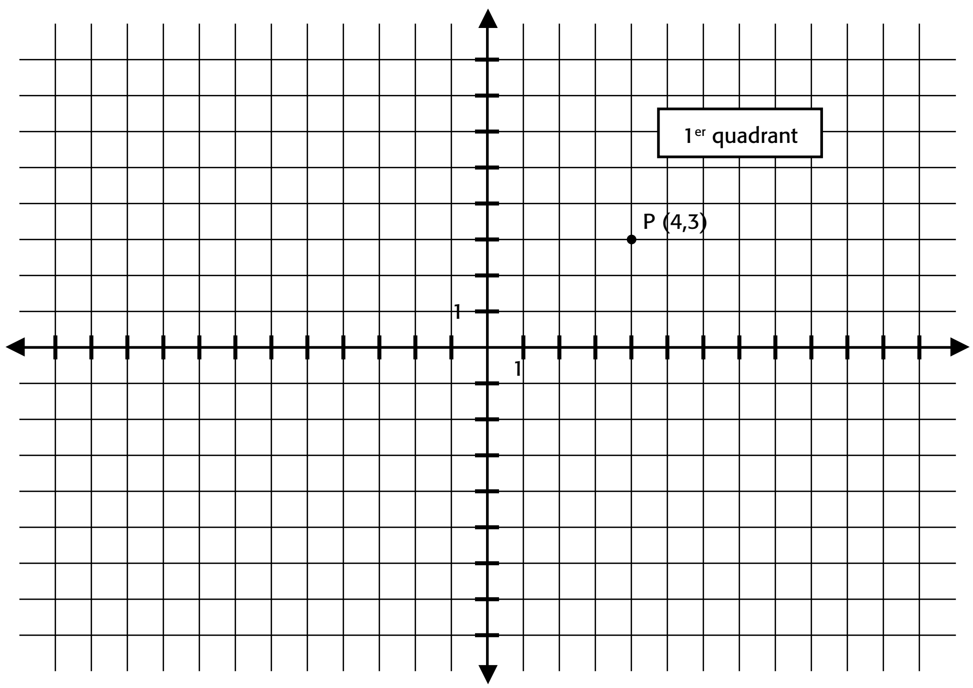
– « Quelle est la relation entre le nombre d'espaces carrés et le périmètre d'un jardinet? »

– « Comment pourriez-vous utiliser le diagramme pour déterminer le périmètre d'un jardinet de 8 espaces carrés?

– « Un jardinet qui a un périmètre de 16 m occupe combien d'espaces carrés? »

Plan cartésien

Le plan cartésien est un plan divisé en quatre quadrants par deux droites perpendiculaires graduées. Ainsi constitué, il est muni d'un système de repérage cartésien qui permet de situer des points définis par des couples ordonnés, par exemple P(4,3). En 6e année, ayant appris à situer des points dans le premier cadran du plan cartésien en *Géométrie et sens de l'espace*, les élèves peuvent utiliser le plan cartésien pour créer des représentations graphiques. L'analyse de l'allure (p. ex., ascendante ou descendante) de la courbe produite par l'ensemble des points est utile pour interpoler et extrapoler.

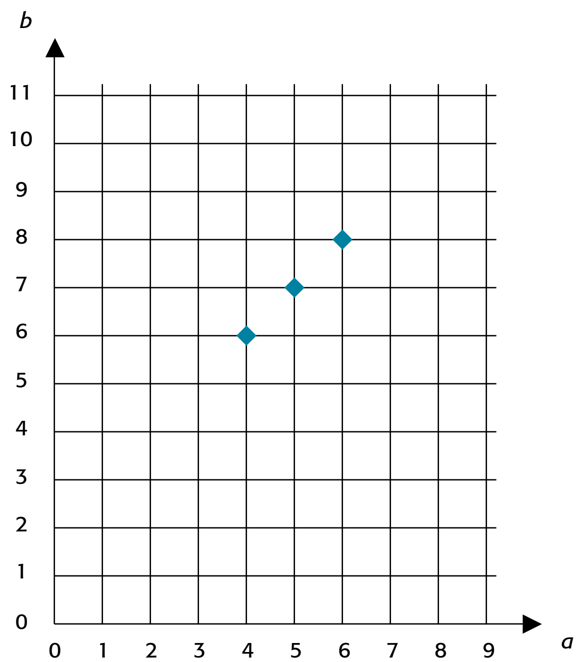


Exemple – Représentation de valeurs de variables

Déterminer avec les élèves les valeurs de b dans l'équation $7 + a = 5 + b$, si a prend une valeur de 4, 5 et 6, en les notant dans une table de valeurs.

a	4	5	6		
b	6	7	8		

Transférer ces données dans un plan cartésien et inviter les élèves à les analyser en leur posant diverses questions.



Questions pertinentes

– « Y a-t-il d'autres valeurs possibles pour a et b? »

– « Quel changement y a-t-il d'un point à l'autre sur le plan cartésien? »

– « Quelle représentation permet de déterminer la régularité plus rapidement? Pourquoi? »

– « Quelle relation est montrée dans ce plan cartésien? »

– « Comment les trois points relevés peuvent-ils vous aider à déterminer l'emplacement d'autres points? Où situeriez-vous les deux prochains points? »

– « Quelle est la valeur de a si b prend la valeur de 14? Quelle est la valeur de b si a prend la valeur de 1? »

Équation

L'équation est une phrase mathématique qui comporte une inconnue ou plusieurs variables et le symbole de l'égalité (signe =). Elle constitue une représentation symbolique d'une relation (p. ex., $15 + \square = 35$, $p = 4 \times c$). Les élèves peuvent utiliser l'équation pour représenter une situation-problème. En 6e année, ils apprennent à représenter des relations entre deux quantités changeantes par des équations. Voici deux exemples d'utilisation d'une équation.

Exemple 1 – Représentation de la relation entre deux quantités changeantes

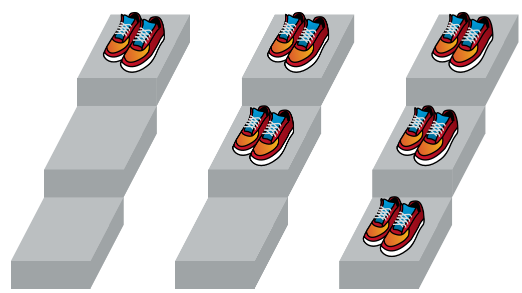
Écrire l'équation $c = i \times 2$ au tableau et présenter le contexte d'où elle provient :

Éric invite des amis chez lui. Lorsqu'ils entrent, il leur demande d'enlever leurs chaussures et de les placer sur une marche de l'escalier. On s'intéresse à la relation entre le nombre d'invités (i) et le nombre de chaussures (c).

Avec les élèves, construire une table de valeurs représentant la relation ainsi qu'une suite non numérique.

Exemple

Nombre d'invités (i)	1	2	3	...
Nombre de chaussures (c)	2	4	6	...



Demander aux élèves d'expliquer ce que représentent la variable i (le nombre d'invités), la variable c (le nombre de chaussures) et le « × 2 » (le nombre de chaussures par personne).

Questions pertinentes

– « Comment pouvez-vous représenter cette situation à l'aide d'un autre modèle? »

– « Quelle est la régularité dans la suite de nombres de chaussures? Que représente-t-elle? »

– « Comment avez-vous trouvé le nombre total de chaussures dans la table de valeurs? »

– « Combien de chaussures se retrouveront dans l'escalier si Éric invite 6 amis? »

– « Combien de souliers y aura-t-il lorsque le 15e invité se déchaussera? »

– « Comment pourrait-on expliquer la situation si l'équation était $c = i \times 2 + 4$? Que représente le + 4? Comment pourrait-on représenter cette situation à l'aide d'illustrations? »

Exemple 2 – Représentation d'une situation d'égalité

Présenter le problème suivant aux élèves :

Sylvia possède une collection de figurines. Elle a trois figurines et sa tante lui en donne une. Pour que sa collection soit complète, elle doit avoir onze figurines. Combien lui en manque-t-il?

Leur demander d'écrire l'équation qui représente le mieux la situation et de la résoudre. Par exemple :

$$3 + 1 + f = 11$$

$$4 + f = 11$$

L'élève sait que $4 + 6 = 10$. Il ajoute alors 1 de plus pour obtenir 11. Donc $f = 7$.

Questions pertinentes

– « Pouvez-vous expliquer le problème dans vos propres mots? »

– « Pourquoi a-t-on choisi d'utiliser la lettre *f* pour représenter l'inconnue? »

– « Comment avez-vous fait pour déterminer la valeur de l'inconnue? »

– « Est-ce nécessaire de faire des calculs pour déterminer la valeur de l'inconnue? »

– « Comment pourrait-on utiliser une balance pour représenter cette situation? »

– « Est-ce que cette stratégie fonctionnerait avec d'autres nombres? Est-ce qu'elle fonctionnerait toujours? Comment le savez-vous? »

– « Comment doit-on s'y prendre pour déterminer le nombre de figurines manquantes si Sylvia a 15 figurines, que sa tante lui en donne 3 et que la collection complète est composée de 26 figurines? »

RÉFÉRENCES

BAROODY, Arthur J., et Ronald T. COSLICK. 1998. *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*, Mahwah (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, p. 16-3.

BARUK, Stella. 1995. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires : pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosité*, nouv. éd. enrichie de trois index, coll. « Science ouverte », Paris, Éditions du Seuil, p. 1162.

BERGSTEN, Christer. 1999. « From Sense to Symbol Sense », dans Inge Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I.II*, Osnabrück (Allemagne), Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik, p. 123, [En ligne], [www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings-1-vol2-v1-0.pdf] (Consulté le 9 juin 2008).

CHARLES, Randall I. 2005. « Big Ideas and Understanding as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics », *Journal of Mathematics Education Leadership*, Lakewood (CO), National Council of Supervisors of Mathematics, vol. 8, n° 1, p. 10.

CLEMENT, John. Janvier 1982. « Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 13, n° 1, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 16-30.

CONFREY, Jere, et Perry LANIER. Novembre 1980. « Students' Mathematical Abilities: A Focus for the Improvement of Teaching General Mathematics », School Science and Mathematics, vol. 80, n° 7, p. 549-556.

CONSEIL DES ÉCOLES CATHOLIQUES DE LANGUE FRANÇAISE DU CENTRE-EST, et coll. 2003. *Les mathématiques, un monde à apprivoiser – Guide d'enseignement, MFM1P, Module 3 : Algèbre*, Ottawa, Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, p. 11.

DEMONTY, Isabelle, et Joëlle VLASSIS. Mai 1999. « Les représentations pré-algébriques des élèves sortant de l'enseignement primaire : Synthèse de la recherche en pédagogie n° 231/97 », *Informations pédagogiques*, n° 47, Bruxelles (Belgique), Restode, p. 16-27, [En ligne], [www.restode.cfwb.be/download/infoped/info47b.pdf] (Consulté le 10 juin 2008).

DRISCOLL, Mark. 1999. *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*, Portsmouth (NH), Heinemann, p. 1-19, 123 et 141.

FOSNOT, Catherine Twomey, et Maarten DOLK. 2001. *Young Mathematicians at Work: Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*, Portsmouth (NH), Heinemann, p. 77.

KENNEY, Patricia Ann, et Edward A. SILVER. 1997. *Results from the Sixth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics.

KIERAN, Carolyn. Mars 1982. « The Learning of Algebra: A Teaching Experiment », Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

KIERAN, Carolyn, et Louise CHALOUH. 1993. « Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra », dans D.Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*, New York, Macmillan Publishing Company, p. 179-198.

KIERAN, Carolyn, et Louise CHALOUH. 1999. « Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra », dans Barbara Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 62.

LANIER, Perry. 1981. « Ninth-Grade General Mathematics Adds Up to Trouble », *IRT Communication Quarterly*, vol. 4, nº 4, Michigan State University, Institute for Research on Teaching, College of Education, p. 1 et 2.

Le nouveau petit Robert. 2006. Nouv. Éd. Amplifiée et remaniée, Paris, Dictionnaires Le Robert, p. 11.

LEE, Lesley. 1996. « An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities », dans Nadine Bednarz, Carolyn Kieran et Lesley Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, p. 105.

LODHOLZ, Richard D. 1990 « The Transition from Arithmetic to Algebra », dans Edgar L. Edwards, JR. (Ed.), *Algebra for Everyone*, 8e éd., Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 29.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 37-40.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. 2001. *Navigating through Algebra in Grades 3 – 5*, 3e éd., coll. « Navigations Series », Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 1.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 1999. *Des choix qui mènent à l'action : Politique régissant le programme d'orientation et de formation au cheminement de carrière dans les écoles élémentaires et secondaires de l'Ontario*, Toronto, le Ministère, p. 8.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2000. *MA-P-5, Modélisation et algèbre, Cycle primaire*, Toronto, le Ministère, p. 15 et 26.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2004a. *Enseigner et apprendre les mathématiques : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année*, Toronto, le Ministère, p. 21 et 35.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2004b. *Politique d'aménagement linguistique de l'Ontario pour l'éducation en langue française*, Toronto, le Ministère, 100 p.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2005. *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Mathématiques*, Révisé, Toronto, le Ministère, p. 10, 19, 74, 95, 96 et 101.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006a. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, Toronto, le Ministère, 5 fascicules.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006b. *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année – Français, Révisé*, Toronto, le Ministère, p. 101.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2008a. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année, Modélisation et algèbre*, fascicule 1, Toronto, le Ministère, 155 p.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2008b. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année, Modélisation et algèbre*, fascicule 2, Toronto, le Ministère, p. 39-48.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2008c. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année, Numération et sens du nombre*, fascicule 1, Toronto, le Ministère, p. 49-54 et 134-137.

PICCIOTTO, Henri, et Anita WAH. Mars 1993. « A New Algebra: Tools, Themes, Concepts », *Journal of Mathematical Behaviour*, vol. 12, no 1, Elsevier, p. 42, [En ligne], [www.picciotto.org/math-ed/new-algebra/new-algebra.html] (Consulté le 9 juin 2008).

POST, Thomas R., et Kathleen A. CRAMER. Mars 1989. « Knowledge, Representation, and Quantitative Thinking », dans M. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher –Special publication of the AACTE*, Oxford, Pergamon Press, p. 223, [En ligne], [www.education.umn.edu/rationalnumberproject/89_8.html] (Consulté le 2 juin 2008).

QUÉBEC. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2001. *Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, Québec, le Ministère, p. 125, 126 et 132.

RADFORD, Luis, et Serge DEMERS. 2004. *Communication et apprentissage : Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*, Toronto, le Ministère, p. 15-25.

RADFORD, Luis. 2006. « Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective », dans J. L. C. S. Alatorre, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, vol. 1, Mérida (Mexique), p. 2–21, [En ligne], [http://oldwebsite.laurentian.ca/educ/lradford/pmena06.pdf] (Consulté le 2 juin 2008).

RAYNAL, Françoise, et Alain RIEUNIER. 2003. *Pédagogie : dictionnaire des concepts clés; apprentissage, formation, psychologie cognitive*, coll. « Pédagogies/Outils », 4e éd., Paris, ESF éditeur, p. 13, 156 et 315.

RIVERA, Ferdinand D., et Joanne Rossi BECKER. Novembre 2005. « Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra », *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 11, nº 4, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 198 et 203.

RIVERA, Ferdinand D. Février 2006. « Changing the Face of Arithmetic: Teaching Children Algebra », *Teaching Children Mathematics*, vol. 12, nº 6, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 307.

ROEGIERS, Xavier. 2000. *Les mathématiques à l'école élémentaire : Tome 1*, Belgique, De Boeck, p. 77.

ROSNICK, Peter, et John CLEMENT. Automne 1980. « Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions », *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 3, nº 1, Elsevier, p. 3-28.

SMALL, Marian. 2005. *Patterns and Algebra: Background and Strategies*, coll. « PRIME », Toronto, Thomson, p. 64, 73 et 93.

SQUALLI, Hassane. Automne 2002. « Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques », *Instantanés mathématiques*, vol. XXXIX, Montréal, Service Apame, p. 4, 5, 8 et 9.

SQUALLI, Hassane, et Laurent THEIS. Novembre 2005. *Le développement de la pensée algébrique au primaire et chez des élèves en difficulté grave d'apprentissage*, atelier de formation à l'UQAM, p. 5.

TAYLOR-COX, Jennifer. Janvier 2003. « Algebra in the Early Years? Yes! », *Young Children: Teaching and Learning about MATH*, Washington (DC), National Association for the Education of Young Children, p. 17 et 19, [En ligne], www.journal.naeyc.org/btj/200301/Algebra.pdf] (Consulté le 10 juin 2008).

USISKIN, Zalman. Février 1997. « Doing Algebra in Grades K-4 », *Teaching Children Mathematics*, vol. 3, nº 6, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 346.

VANCE, James H. Janvier 1998. « Number Operations from an Algebraic Perspective », *Teaching Children Mathematics*, vol. 4, nº 5, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 282.

VAN DE WALLE, John A., et Sandra FOLK. 2005. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, éd. canadienne, Toronto, Pearson Education Canada, p. 401.

VAN DE WALLE, John A. 2007. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Boston (MA), Pearson Education, p. 260.

VAN DE WALLE, John A., et LouAnn H. LOVIN. 2008. *L'enseignement des mathématiques : L'élève au centre de son apprentissage, Tome 2*, éd. française, Saint-Laurent (Québec), Éditions du Renouveau Pédagogique, p. 326.

WAGNER, Sigrid. Mars 1981. « Conservation of Equation and Function Under Transformation of Variable », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 12, nº 2, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, p. 107-118.

Le ministère de l'Éducation tient à remercier les enseignants, les enseignantes et les élèves qui ont participé à la mise à l'essai des situations d'apprentissage.

Ministère de l’Éducation de l’Ontario
Imprimé sur du papier recyclé
08-057
ISBN 978-1-4249-5494-0