Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 7^e à la 10^e année

Fascicule 2

Algèbre

2019

Éditions cforp

Photos et illustrations : © iStock.com, © stock.adobe.com, Slash Photography

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario a fourni une aide financière pour la réalisation de ce projet. Cet apport financier ne doit pas pour autant être perçu comme une approbation ministérielle pour l'utilisation du matériel produit. Cette publication n'engage que l'opinion de ses auteures et auteurs, laquelle ne représente pas nécessairement celle du Ministère.

435, rue Donald, Ottawa (Ontario) K1K 4X5
Commandes : Tél. : 613 747-1553
Tél. sans frais (Canada) : 1 877 747-8003
Téléc. : 613 747-0866
Téléc. sans frais (Canada) : 1 877 747-8004
Site Web : cforp.ca/catalogue
Courriel : commandes@cforp.ca

PDF : ISBN 978-2-7657-0651-9
Dépôt légal – premier trimestre 2019

Bibliothèque et Archives Canada

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières

PRÉFACE

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario a publié, en 2006, une série de guides pédagogiques, composée d'un guide principal en cinq fascicules et de guides d'accompagnement pour chacun des domaines d'étude, appuyant la mise en œuvre des recommandations présentées dans les rapports de tables rondes d'experts en mathématiques. Le Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6e année a connu un énorme succès à l'élémentaire. En effet, il comble un grand besoin du personnel enseignant, relatif aux ressources d'appui en mathématiques. Il propose notamment des stratégies axées sur la mise en œuvre d'un programme de mathématiques efficace. De plus, il favorise la création d'une communauté d'apprenantes et d'apprenants en vue de développer et de valoriser le raisonnement mathématique.

Depuis la publication de cette série de guides pédagogiques, il y a eu une demande croissante pour une version similaire présentant les diverses composantes de l'enseignement efficace des mathématiques, de la 7e à la 10e année. Cette demande s'explique par le besoin qu'a le personnel enseignant de mieux comprendre ce que préconisent les plus récentes recherches quant à l'enseignement, à l'apprentissage et à l'évaluation des mathématiques au cycle intermédiaire. Toutes les consultations, menées auprès des parties concernées, ont clairement montré l'urgence et la nécessité de produire, sous forme de fascicules, un guide portant sur des stratégies efficaces relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, de la 7e à la 10e année.

Le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 7e à la 10e année* porte principalement sur la résolution de problèmes en tant que contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication considérée comme un moyen de développement et d'expression du raisonnement mathématique. Il tient compte également des stratégies d'évaluation énoncées dans Faire croître le succès – Évaluation et communication du rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010) et explique le rôle que joue l'apprentissage professionnel dans l'amélioration du rendement des élèves en mathématiques, en Ontario. Ce guide comprend trois fascicules. Le premier porte sur les principes de l'enseignement efficace des mathématiques. Il vient enrichir certains principes fondamentaux de la publication Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques M-12 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2011). Le deuxième est axé sur l'enseignement des concepts algébriques du domaine Modélisation et algèbre, en 7e et en 8e année, des domaines Relations et Numération et algèbre, en 9e année, ainsi que des domaines Fonctions affines et Fonctions du second degré, en 10^e année. Le troisième et dernier fascicule traite de l'enseignement des concepts de mesure et de géométrie des deux domaines en 7^e et en 8^e année, soit Géométrie et sens de l'espace et Mesure. Ces concepts sont également explorés dans le domaine Mesure et géométrie du curriculum de mathématiques de 9^e année, dans le domaine Géométrie analytique pour les cours de type théorique, en 9^e et en 10^e année, ainsi que dans le domaine Trigonométrie, en 10^e année.

Tous les fascicules sont conçus en vue d'aider l'enseignante ou l'enseignant à s'approprier les concepts pédagogiques propres à chaque domaine. Il importe de souligner que le contenu de chacun des fascicules tient compte des recherches actuelles sur l'apprentissage des mathématiques. Des situations d'apprentissage misant sur la résolution de problèmes suscitant le questionnement et la réflexion sont présentées dans les deux autres fascicules portant sur l'algèbre et la géométrie. Elles mettent en contexte les propos théoriques développés.

Ces documents d'appui aux programmes-cadres de mathématiques ont été élaborés en conformité avec les principales initiatives ministérielles pour soutenir la réussite scolaire de toutes et de tous les élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition de compétences en communication orale.

INTRODUCTION

> L'algèbre est le langage de communication privilégié des mathématiques. Les élèves doivent apprendre à utiliser l'algèbre comme outil de résolution de problèmes, c'est-à-dire comme un moyen de clarifier les concepts à un niveau abstrait avant de les appliquer. Le fait de connaître ce processus aide souvent les élèves à faire des généralisations et à approfondir leur apprentissage au-delà du contexte original (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 10).

L'étude de l'algèbre s'est développée en partant du besoin de comprendre le monde réel et de le représenter. Au fil des siècles, les mathématiciennes et mathématiciens ont tenté de résoudre des problèmes par l'observation de régularités et la modélisation de phénomènes (p. ex. déterminer le diamètre de la Terre, prédire le mouvement des marées, expliquer le déplacement des objets en chute libre). Leurs travaux ont contribué au développement de symboles mathématiques et de méthodes de calcul.

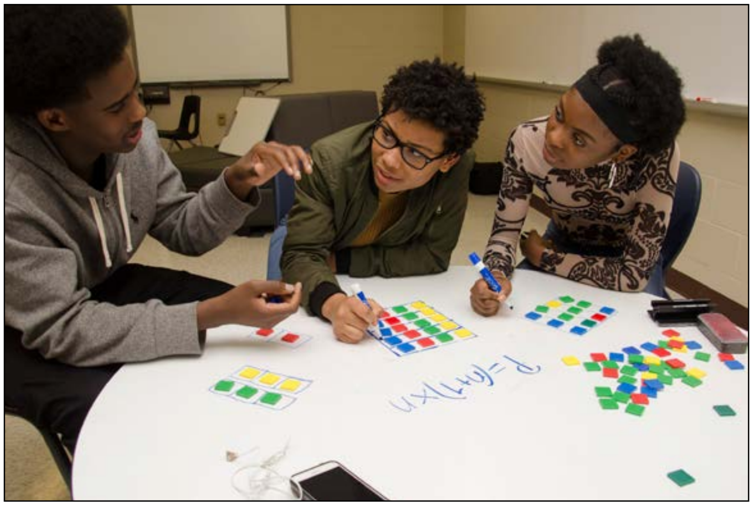
Le ministère de l'Éducation de l'Ontario, dans le document Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique M-12 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013), soutient que :

> [le] raisonnement algébrique sous-tend toute la pensée mathématique, y compris l'arithmétique, car il nous permet d'explorer la structure des mathématiques. Nous reconnaissons maintenant l'importance d'inclure le raisonnement algébrique dans l'enseignement des mathématiques dès un très jeune âge, afin de rendre accessibles à tous les élèves ces idées mathématiques très efficaces.
>
> Nous avons tous la capacité de penser algébriquement, car le raisonnement algébrique constitue, essentiellement, la façon dont les humains interagissent avec le monde. Dans notre quotidien, nous recherchons des régularités, nous prêtons attention à des aspects importants de ces régularités, puis nous faisons des généralisations tirées de situations familières pour les appliquer à des situations peu familières. (p. 3)

La **fonction affine** est une « [r]elation du premier degré définie par $y = ax + b$, et dont la représentation graphique est une droite, sauf la droite verticale » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 58). Dans le cas d'une fonction affine, les premières différences sont constantes.

L'étude de l'algèbre évolue tout le long des années d'études. De la 1re à la 8^{e} année, le domaine Modélisation et algèbre initie les élèves à l'étude de relations de différents phénomènes pour développer le raisonnement algébrique. Une modification importante concernant le programme-cadre de 9^{e} année est la réorganisation du domaine Modélisation et algèbre en deux domaines d'étude distincts, soit Relations et Numération et algèbre. Pour les deux cours, MPM1D et MFM1P, offerts à cette année d'études, le domaine d'étude Relations traite en particulier de la **fonction affine**. C'est en abordant des situations concrètes que les élèves consolident leur compréhension des représentations d'une situation (mots, figures d'une suite à motif croissant, représentation graphique, table de valeurs et équation) et formalisent les idées mathématiques à l'aide de symboles algébriques (variables). Il est à noter que le cours MPM1D aborde également l'étude des caractéristiques de la droite dans le domaine Géométrie analytique.

En ce qui a trait aux deux cours de 10^{e} année, MPM2D et MFM2P, bien qu'ils explorent des domaines d'étude dans lesquels les élèves manipulent des expressions algébriques, ils diffèrent grandement quant au niveau d'abstraction. Néanmoins, même s'il y a des similitudes dans les deux cours concernant le domaine Fonctions du second degré, l'algèbre est traitée de façon plus approfondie dans le cours théorique que dans le cours appliqué. Dans un cours comme dans l'autre, les apprenantes et apprenants devront analyser et interpréter diverses situations pouvant être modélisées à l'aide de différentes représentations.



LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE

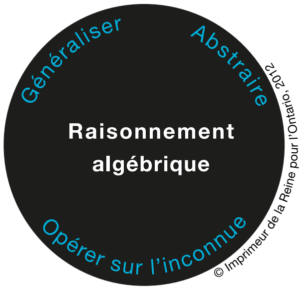
> Le raisonnement algébrique est présent dans tous les domaines mathématiques. Il consiste à décrire des régularités caractérisant des relations entre des quantités – contrairement à l'arithmétique qui consiste à effectuer des calculs portant sur des quantités connues. En gros, le raisonnement algébrique concerne la généralisation d'idées mathématiques et l'identification de structures mathématiques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 3).

Dans un cours de mathématiques « […] visant à développer la pensée algébrique chez les élèves, l'objectif traditionnel de l'enseignement, apprendre à calculer, n'est pas omis; il est largement dépassé » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 9). Le raisonnement algébrique fait passer la compréhension qu'a l'élève des mathématiques au-delà des résultats de calculs et de l'application procédurale de formules. Toutefois, contrairement à l'apprentissage naturel des nombres, le développement d'un raisonnement algébrique requiert de penser autrement que de façon arithmétique de la part de l'apprenante ou de l'apprenant. L'acquisition de cette forme de raisonnement est progressive. Elle évolue avec l'expérience qu'acquiert l'élève en explorant des situations pouvant être généralisées.

Tout en tenant compte des éléments propres au développement du raisonnement algébrique, l'enseignante ou l'enseignant doit intégrer, dans son enseignement, les éléments essentiels d'un enseignement efficace des mathématiques, notamment les compétences liées à la communication et à la résolution de problèmes, comme cela est décrit dans le fascicule 1.

(Adapté de EduGAINS.)

LES PROCESSUS FONDAMENTAUX LIÉS À LA PENSÉE ALGÉBRIQUE



Au cycle intermédiaire, le raisonnement algébrique évolue en mettant en pratique, dans des situations de plus en plus complexes, l'abstraction, la généralisation et l'opération sur l'inconnue. Ces trois processus du raisonnement algébrique sont d'ordre « interactif » et non « hiérarchique ». Ils facilitent la résolution de problèmes et amènent l'élève à penser de façon algébrique.

Abstraire

Abstraire est un des processus fondamentaux du raisonnement algébrique. « Abstraire, c'est se détacher de l'aspect sensoriel des choses pour raisonner à un niveau plus général (Raynal et Rieunier, 2003, p. 13, adaptation), c'est se représenter mentalement une situation concrète, c'est passer à un niveau de conceptualisation plus profond » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 9).

Exemple

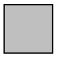


Figure 1

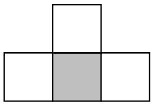


Figure 2

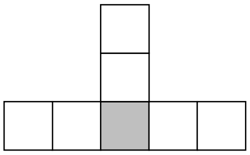


Figure 3

NIVEAU D'ABSTRACTION	RÉFLEXION DE L'ÉLÈVE
En analysant la suite à motif croissant ci-dessus, il est fréquent que l'élève donne assez rapidement la description d'une figure quelconque. Elle ou il explique la suite sans la représenter concrètement. Alors, elle ou il accomplit une première abstraction. En se basant sur des figures particulières, l'élève dit pouvoir décrire la 10^e figure et même la 100^e figure. Toutefois, quel que soit le rang de la figure, l'explication demeure parfois longtemps ancrée dans le processus de construction de ces figures particulières.	Dans la figure 4, il y aurait 3 carrés à gauche, 3 carrés à droite, 3 carrés au haut et 1 carré au milieu, au bas. En tout, ça fait 3 + 3 + 3 + 1 = 10 carrés. La 10^e figure aurait 9 carrés à gauche, 9 carrés à droite, 9 carrés au haut et 1 carré au milieu, au bas. En tout, ça fait 9 + 9 + 9 + 1 = 28 carrés.

NIVEAU D'ABSTRACTION	RÉFLEXION DE L'ÉLÈVE
L'élève doit accomplir une seconde abstraction pour arriver à « […] une généralisation algébrique, c'est-à-dire [à] une généralisation dont la variable est exprimée par un nombre indéterminé » (Radford, Demers et Miranda, 2009, p. 16). Elle ou il exprime d'abord la règle en mots, puis effectue une généralisation à l'aide d'une équation.	Je multiplie le numéro de la figure précédente par 3 et j'ajoute 1. Cela me donne le nombre de carrés qui composent la figure en question. ou À l'aide d'une équation $c = 3\ (n - 1) + 1$, où c représente le nombre de carrés et n, le numéro de la figure, je décris n'importe quelle figure quel que soit son rang.

(Tiré et inspiré de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 58 à 64.)

C'est le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant de faire évoluer le niveau d'abstraction des élèves en leur offrant des occasions de faire de telles généralisations à l'aide de problèmes à difficulté croissante (p. ex., le problème des hexagones se trouvant aux pages 40 et 41 du présent fascicule).

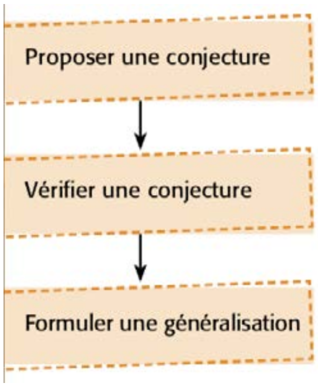
Généraliser

« Généraliser, c'est tirer des conclusions valables, vraies dans tous les cas, à partir de l'observation et de l'analyse de quelques exemples » (Squalli, 2002, p. 9, adaptation, cité dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 9). Le raisonnement algébrique est fondé sur la capacité de remarquer l'existence de régularités, de similarités et de différences pour dégager des généralisations. « La généralisation est au cœur des mathématiques et se manifeste sous de nombreuses formes. Si les enseignantes et enseignants […] n'ont pas l'habitude de demander aux élèves d'exprimer leurs propres généralisations, la pensée mathématique n'est pas présente » (Mason, 1996, p. 65, cité dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 4).

Pour amener les élèves à généraliser, l'enseignante ou l'enseignant doit modeler une marche à suivre favorisant le raisonnement algébrique. Cette marche à suivre engage l'élève à réaliser trois étapes : la proposition d'une conjecture, la vérification de cette conjecture et la formulation d'une généralisation.

« Une conjecture est l'expression d'une idée perçue comme étant vraie dans toute situation semblable » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 10).

Le mot *conjecture* s'apparente au mot *hypothèse* utilisé davantage dans les attentes et les contenus d'apprentissage du programme-cadre; par exemple, « formuler une hypothèse quant à l'existence d'une relation entre deux variables » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 30).



© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2008. Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.

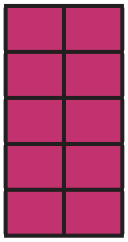
Aider les élèves à généraliser, c'est :

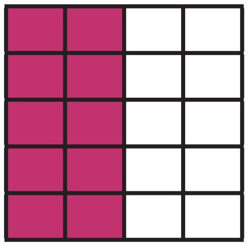
- les guider dans l'observation et l'analyse de situations;
- les initier à proposer des conjectures;
- leur demander d'appuyer leurs conjectures à l'aide de représentations mathématiques ou d'arguments mathématiques;
- les inviter à vérifier leurs conjectures dans d'autres situations;
- les accompagner dans la formulation d'une généralisation, si cela est possible.

Exemple

L'enseignante ou l'enseignant remet aux élèves un rectangle et leur demande d'en déterminer l'aire. Puis, elle ou il les invite à **proposer une conjecture** relative à la mesure de l'aire. « Si la mesure de la base du rectangle est doublée qu'arrive-t-il à la mesure de l'aire? » Un élève propose une conjecture : « L'aire va aussi doubler. »

Pour **vérifier la conjecture**, l'enseignante ou l'enseignant demande aux élèves de doubler la longueur de la base et de déterminer l'aire du nouveau rectangle. Ensuite, elle ou il les invite à analyser les résultats afin de déterminer ce qui arrive à l'aire d'un rectangle lorsque la mesure de sa base est doublée. Puis, elle ou il demande aux élèves de vérifier si la conjecture est vraie pour d'autres rectangles.


Rectangle


Rectangle dont la mesure de la base a été doublée

Reconnaissant que leur conjecture semble s'appliquer à toutes les situations similaires, les élèves peuvent **formuler une généralisation** en ayant recours à des mots ou en se servant de symboles.

RAISONNEMENT DE L'ÉLÈVE : SI LA LONGUEUR DE LA BASE D'UN RECTANGLE EST DOUBLÉE, L'AIRE DU RECTANGLE EST AUSSI DOUBLÉE.

SI $b \times h = A$, ALORS $2b \times h = 2A$.

Lorsque le développement du raisonnement algébrique devient un objectif d'apprentissage, l'enseignante ou l'enseignant propose aux élèves différentes explorations pour qu'elles et ils soient en mesure de généraliser. Ces différentes explorations devraient amener les élèves à faire des généralisations sur les propriétés des nombres en partant de l'observation de suites à motif croissant et à découvrir des formules et des généralisations relatives à la mesure et à la géométrie.

Opérer sur l'inconnue

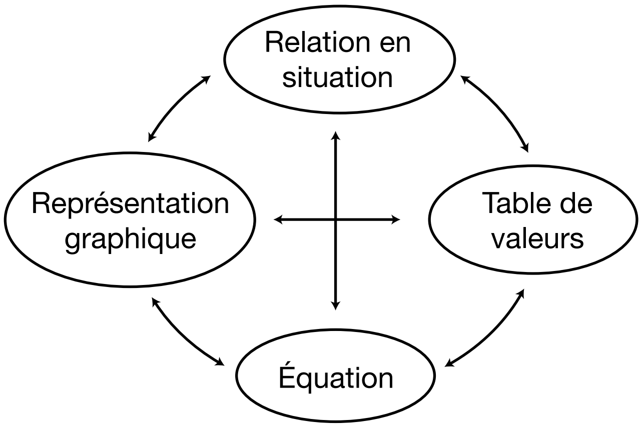
On fait ici allusion à l'*inconnu* dans le sens large du mot et non à l'*inconnue* dans le sens d'un symbole ou d'une valeur que l'on ne connaît pas.

Opérer sur l'*inconnue*, c'est l'action d'analyser et d'agir sur ce qui est inconnu. « C'est raisonner de manière analytique, c'est réfléchir sur les opérations, les généralisations et non sur les objets (Squalli et Theis, 2005, adaptation) » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 11). C'est aussi examiner les éléments d'une opération, d'une suite numérique pour en dégager le changement. En d'autres mots, « [l]e raisonnement algébrique […] permet de manipuler n'importe quelle quantité inconnue comme si elle était connue » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 4). L'inconnue, les variables et les symboles permettent d'observer et de décrire les actions posées pour résoudre un problème et en dégager une généralisation. Cela sera démontré dans les exemples présentés dans ce fascicule.

LES RELATIONS ET LEURS REPRÉSENTATIONS

Une situation visant à développer le raisonnement algébrique favorise l'exploration des processus fondamentaux expliqués à la section précédente, ainsi que l'établissement de relations et la représentation de celles-ci.

Une relation, selon le *Petit lexique mathématique*, est une « [c]orrespondance entre deux ensembles d'objets [ou un] ensemble de couples » (Champlain, Mathieu et Tessier, 1999, p. 232). Les élèves montrent leur compréhension des relations à l'aide de différentes représentations : relation en situation (mots, figures d'une suite à motif croissant), table de valeurs, équation et représentation graphique.



© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2013

Il est important pour les élèves de la 7^e à la 10^e année de continuer à représenter une situation à l'aide de matériel concret, de matériel semi-concret et de mots avant de passer à la représentation symbolique. L'analyse de suites à motif croissant les aide à développer leur habileté à traduire une situation en équation. Elles et ils parviennent à la généralisation algébrique en remplissant une table de valeurs, en décrivant verbalement des figures occupant des rangs plus loin dans la suite et en analysant des expressions numériques. Il importe aussi qu'elles et ils associent des suites à motif croissant à une histoire en contexte.

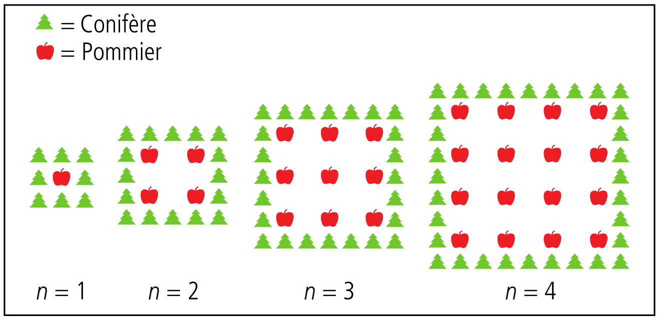
Exemple

Représentation à l’aide de mots

« Un fermier plante des pommiers en [formant des carrés]. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger » (Organisation de coopération et de développement économiques – PISA, [s. d.], p. 28).

Si n représente le numéro de la figure, alors combien y aura-t-il de pommiers et de conifères si $n = 8$?

Représentation à l’aide de figures (suites à motif croissant)



(Adapté du Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA).
© Imprimeur de la Reine pour l’Ontario, 2013)

Représentation à l’aide de tables de valeurs

Numéro de la figure, *n*	1	2	3	4
Nombre de pommiers, *p*	1	4	9	16

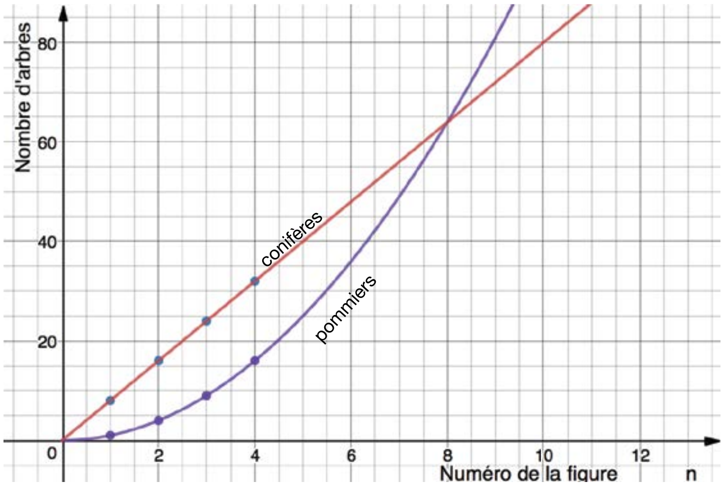
Numéro de la figure, *n*	**Nombre de conifères, *c***
1	8
2	16
3	24
4	32

Représentation à l’aide d’équations

Nombre de pommiers = (numéro de la figure)^2 ou $p = n^2$
Nombre de conifères = (numéro de la figure) × 8 ou $c = n \times 8$;

Représentation à l'aide d'un graphique

Nombre d'arbres en fonction du numéro de la figure



Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

La représentation graphique

Les élèves des cycles préparatoire, primaire et moyen produisent, analysent et interprètent des représentations graphiques, dans le domaine Traitement des données et probabilité, sans nécessairement établir de lien entre ces représentations et les autres représentations de relations. Il est important de noter que la représentation graphique d'une relation est présentée de façon formelle en 7^{e} année et qu'elle est de même importance que les autres représentations. La représentation graphique aide les élèves à représenter des situations du monde réel et à les analyser. Elle est très efficace pour interpréter une situation, puisqu'elle exprime et représente bien l'ensemble des relations en cause.

La technologie

La technologie est un outil puissant pour observer et analyser les relations entre les variables. La calculatrice à affichage graphique et certaines applications Web sont utiles pour représenter, créer et analyser des données. Le graphique qui découle de l'entrée de données permet aux élèves d'observer si les données ont été entrées correctement, de déterminer la relation représentée et de modifier certaines données pour vérifier l'effet de ces changements sur le graphique. L'utilisation de la calculatrice à affichage graphique ou d'une application exigera l'apprentissage du fonctionnement de l'outil. Le temps dédié à l'apprivoisement de la technologie est réinvesti dans l'analyse des relations représentées par un graphique dans un diagramme.

Les processus fondamentaux et les représentations de relations sont les composantes essentielles au développement des deux grandes idées du raisonnement algébrique. Dans les chapitres suivants, l'enseignement efficace de l'algèbre sera traité selon ces deux grandes idées : le raisonnement algébrique en tant que généralisation de l'arithmétique et la pensée fonctionnelle.

LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE : UNE GÉNÉRALISATION DE L'ARITHMÉTIQUE

> La distinction entre un raisonnement arithmétique et un raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique du raisonnement et non sur l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues » (Adihou et collab., 2016, p. 209).

Comme le précise le document *Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique M-12*, « la généralisation est au cœur des mathématiques […] (Mason, 1996, p. 65, cité dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 4) ». Lorsque l'enseignante ou l'enseignant désire développer chez les élèves le raisonnement algébrique en partant de la généralisation de l'arithmétique, cela modifie l'objectif d'apprentissage. En effet, celui-ci :

> […] devient la compréhension des propriétés des nombres et des opérations sur ceux-ci, plutôt que le fait d'effectuer des calculs. Ce changement permet aux élèves d'appliquer leurs connaissances à d'autres systèmes de nombres (p. ex., fractions, décimales, nombres entiers) et à des situations algébriques (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 6).

Aider les élèves à faire des généralisations leur permet d'approfondir leur apprentissage au-delà du contexte original et d'établir des liens entre diverses connaissances.

Cette section traitera des principaux objectifs de la généralisation de l'arithmétique soit :

- les opérations et leurs propriétés;
- l'égalité en tant que relation entre des quantités;
- le passage au symbolique.

LES OPÉRATIONS ET LEURS PROPRIÉTÉS

> C'est par l'exploration de certaines propriétés des nombres et des opérations que les élèves approfondissent leur compréhension du sens du symbole et du concept d'égalité. Mieux comprendre ces propriétés permet aux élèves de les utiliser plus souvent comme stratégie de résolution de problèmes (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008b, p. 90).

La plupart des contenus mathématiques liés à la numération et au sens du nombre, de la 7e à la 10e année, peuvent être abordés en misant sur l'objectif de développer la pensée algébrique. Au lieu de demander aux élèves de mémoriser des règles pour effectuer des opérations sur différents nombres, il est plus efficace de « […] les amener à dépasser ces cas particuliers et arriver à penser à la généralisation mathématique sous-jacente (Beatty et Bruce, 2012; ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005) » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 6). L'objectif est d'amener les élèves à observer et à analyser une situation, ainsi qu'à établir diverses relations en vue de formuler une généralisation. La compréhension des propriétés telles que la commutativité, l'associativité et la distributivité en numération est un préalable à la simplification d'expressions algébriques et à la résolution d'équations. Simplifier et résoudre des équations exigent aussi une bonne compréhension du sens d'une situation d'égalité et du sens du symbole égal.

Explorer les diverses propriétés des opérations, c'est examiner les relations entre les nombres, c'est-à-dire analyser des situations dans lesquelles le changement d'une quantité a un effet sur une autre quantité.

Commutativité de l'addition et de la multiplication

Lorsque deux nombres sont additionnés ou multipliés, l'égalité demeure vraie même si l'ordre des nombres est changé.

L'élève qui fait cette généralisation comprend la propriété de commutativité. Cette compréhension l'aide à simplifier des expressions algébriques et à résoudre des équations parce qu'elle ou il peut établir un lien avec une connaissance antérieure. Toutefois, l'élève qui ne comprend pas la propriété de commutativité effectuera l'addition ou la multiplication au lieu de comparer les termes de chaque côté du signe égal.

ADDITION	MULTIPLICATION
a) $77 + -2 = -2 + 77$ b) $4 + \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x + y$ c) $3x + 2 + 2x + 5 = 5x + 7$	a) $\frac{1}{4} \times 5 = 5 \times \frac{1}{4}$ b) $(x + 3)\ (x + 4) = (x + 4)\ (x + y)$ c) $3a \times 4 = 12a$

QUESTIONNEMENT

Que remarques-tu au sujet de l'ordre des termes?

Crois-tu que le changement de l'ordre des termes modifie la solution? Comment peux-tu le justifier?

Est-ce que les égalités dans les exemples a) sont vraies? Comment le sais-tu?

Comment as-tu déterminé la valeur de *y* dans les exemples b)?

As-tu pensé à une stratégie pour vérifier ta réponse?

Dans les deux exemples c), comment as-tu utilisé la propriété de commutativité pour simplifier les expressions?

Associativité

Lorsque les nombres sont additionnés ou multipliés, il est possible de les regrouper de diverses façons sans changer le résultat de l'opération; l'égalité demeure vraie. L'élève qui fait cette généralisation comprend la propriété d'associativité soit, que l'ordre des nombres est respecté, mais que les parenthèses sont déplacées. Comprendre cette propriété lui permet de simplifier des expressions algébriques et de résoudre des équations.

ADDITION	MULTIPLICATION
$(40 + -5) + -30 = 40 + (-5 + -30)$ $(2x + -3) + -4 = 2x + (-3 + -4)$	$(10 \times -2) \times 5 = 10(-2 \times 5)$ $(3x \times -2) \times 4 = 3x(-2 \times 4)$

QUESTIONNEMENT

Que compares-tu lorsque tu observes l'égalité?

Comment peux-tu expliquer les regroupements?

Que remarques-tu au sujet de l'ordre des termes?

Crois-tu que les changements liés aux regroupements modifient la solution? Comment peux-tu le justifier?

Distributivité

La distributivité de la multiplication sur l'addition ou sur la soustraction est une propriété qui transforme un produit de sommes ou de différences à une somme ou à une différence de produits. L'élève qui fait cette généralisation comprend qu'il est possible de répartir les termes de différente façon, c'est-à-dire de décomposer les nombres et d'obtenir le même résultat.

Le problème ci-dessous est un exemple typique de ce qui peut être présenté à l'élève pour l'amener à comprendre la propriété de distributivité de la multiplication.

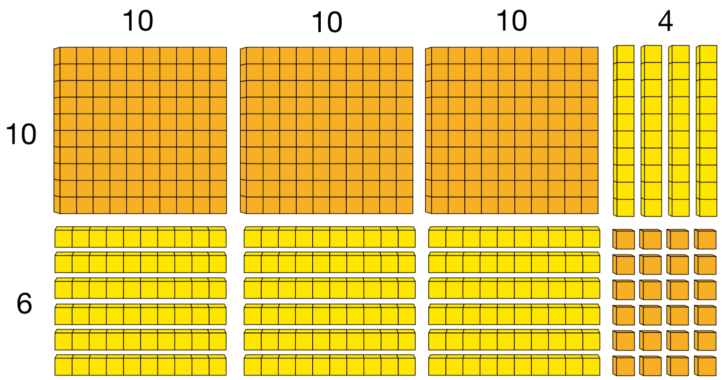
Exemple

Une salle de spectacle contient 16 rangées de 34 sièges. Combien de sièges y a-t-il dans la salle de spectacle?

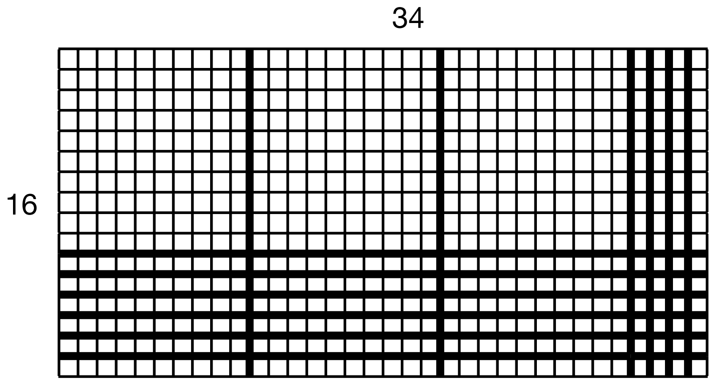
L'utilisation du contexte d'une salle de spectacle n'est pas un hasard. C'est un contexte propice à l'exploration d'un modèle d'aire appelé *disposition rectangulaire*.

Une séquence d'enseignement bien orchestrée amène l'élève à utiliser une disposition rectangulaire réalisée :

- à l'aide de matériel concret (p. ex., matériel de base dix, carreaux algébriques);



- à l'aide de matériel semi-concret (p. ex., papier quadrillé);

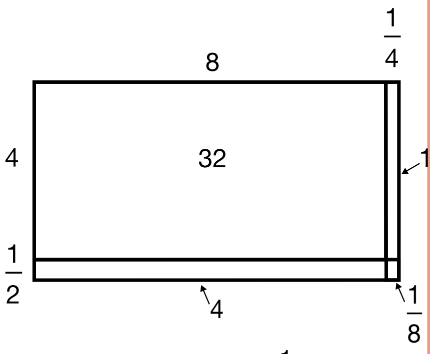
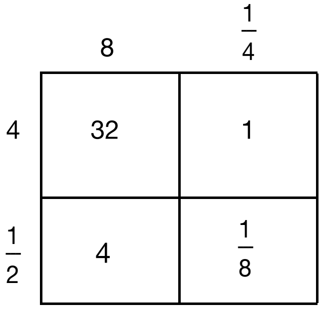
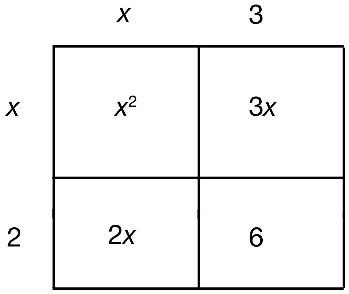


- à l'aide d'une représentation plus abstraite (p. ex., disposition rectangulaire ouverte).

	30	4
10	(10 × 30) 300 sièges	(10 × 4) 40 sièges
6	(6 × 30) 180 sièges	(6 × 4) 24 sièges

La stratégie liée au concept d'aire qui consiste à faire des sommes de produits partiels aide l'élève à généraliser et à découvrir la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

Cet apprentissage a son utilité à différents cycles, car la disposition rectangulaire peut s'appliquer à la multiplication dans d'autres systèmes de nombres (p. ex., fractions, nombres décimaux), ainsi qu'à des situations algébriques.

MULTIPLICATION DE FRACTIONS	**MULTIPLICATION D'EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES**
Calcule $4\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{4}$.	Simplifie $(x + 3)(x + 2)$.
 	 Photo : Hélène Matte. 
$4\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{4}$ $= (4 \times 8) + (4 \times \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} \times 8) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{4})$ $= 37\frac{1}{8}$	$(x + 3) \times (x + 2)$ $= x^2 + 3x + 2x + 6$ $= x^2 + 5x + 6$

MULTIPLICATION DE FRACTIONS	MULTIPLICATION D'EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES
QUESTIONNEMENT Comment la disposition rectangulaire facilite-t-elle la multiplication de fractions? Comment as-tu déterminé où placer les nombres naturels (4, 8) et les fractions $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$? Comment obtiens-tu les nombres dans les cases?	**QUESTIONNEMENT** Comment la disposition rectangulaire t'aide-t-elle à comprendre la multiplication de binômes? Comment as-tu déterminé où placer chaque terme des binômes? Comment obtiens-tu les expressions dans les cases?

Il est important que l'élève explore parallèlement si les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité s'appliquent à la soustraction et à la division. L'associativité et la commutativité ne s'appliquent pas à la soustraction ni à la division. La distributivité ne s'applique pas à la division.

	SOUSTRACTION	DIVISION
ASSOCIATIVITÉ	$(a - b) - c \neq a - (b - c)$ $(10 - 2) - 3 \neq 10 - (2 - 3)$ $5 \neq 11$	$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ $(48 \div 4) \div 2 \neq 48 \div (4 \div 2)$ $6 \neq 24$
COMMUTATIVITÉ	$a - b \neq b - a$ $36 - 27 \neq 27 - 36$	$a \div b \neq b \div a$ $120 \div 5 \neq 5 \div 120$
DISTRIBUTIVITÉ		$a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ $24 \div (4 + 8) \neq (24 \div 4) + (24 \div 8)$ $24 \div 12 \neq 6 + 3$ $2 \neq 9$

Élément neutre

Un nombre qui ne modifie pas le résultat d'une opération est appelé *élément neutre*. Le nombre 0 et le nombre 1 sont des éléments neutres dans diverses opérations, soit respectivement l'addition et la multiplication. Comprendre le rôle de chacun de ces nombres aide l'élève à formuler des conjectures qui s'appliquent à l'algèbre.

Proposer à l'élève les équations suivantes :

ÉLÉMENT NEUTRE DANS L'ADDITION	ÉLÉMENT NEUTRE DANS LA MULTIPLICATION
$786 + c = 786$ $(x + 2x) + c = x + 2x$ $36 = 36 - c$ $128 = c + 128$ $3xy - c = 3xy$	$786 \times a = 786$ $a(x^2 + y) = x^2 + y$ $135 = a \times 135$ $a(x + y + z) = x + y + z$ $3xy \times a = 3xy$
QUESTIONNEMENT Comment as-tu déterminé la valeur de *c*? Que modifie le nombre zéro dans l'addition? dans la soustraction?	**QUESTIONNEMENT** Comment as-tu déterminé la valeur de *a*? Que peux-tu dire du produit de la multiplication? Quel est le rôle du nombre 1 dans la multiplication?

Attention : Dans une soustraction, l'élément neutre zéro doit être le second terme, car les propriétés de commutativité et d'associativité ne s'appliquent pas à la soustraction.

Élément absorbant

En ayant recours à la multiplication, l'enseignante ou l'enseignant incite l'élève à observer le rôle du zéro dans cette opération en vue de formuler une généralisation et de l'appliquer à l'algèbre. Lorsque le nombre zéro est présent dans une multiplication, il est l'élément absorbant qui fait que le résultat est toujours zéro.

Quelle est la valeur de *k* dans les équations suivantes? $567 \times k = 0$ $xy \times k = 0$ $k(x^2 + y) = 0$ $(x^3 + 5)\, k\, (x + 4) = 0$
QUESTIONNEMENT Comment as-tu déterminé la valeur de *k*? Qu'arrive-t-il au produit lorsque tu multiplies un nombre par 0?

Autres propriétés intéressantes

Il importe de donner à l'élève la possibilité de généraliser en partant de conjectures moins explorées. L'enseignante ou l'enseignant peut proposer à l'élève des conjectures, c'est-à-dire des énoncés perçus comme étant vrais, et lui demander de les vérifier et de formuler une généralisation, si cela est possible. À son tour, l'élève propose à son enseignante ou à son enseignant des conjectures à vérifier.

Exemple d'une conjecture

Démontrer que la somme de deux nombres consécutifs, c'est-à-dire de deux nombres qui se suivent, est toujours un nombre impair.

Voici un exemple de réponses possibles d'élèves :

ÉLÈVE 1	ÉLÈVE 2
$1 + 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $4 + 5 = 9$ La conjecture est vraie.	$x + (x + 1) = 2x + 1$ Puisque $(2x)$ est divisible par 2, c'est donc pair. Ensuite, si j'ajoute 1, c'est impair.

L'**Élève 1** fait une généralisation limitée en n'utilisant que quelques exemples, sans prouver que la conjecture est vraie pour tous les nombres.

L'**Élève 2** fait une généralisation explicite à l'aide de variables, ce qui lui permet de donner n'importe quelle valeur à x. Ainsi, elle ou il peut prouver que la conjecture est vraie pour tous les nombres.

Pour l'élève qui est en mesure de justifier que la somme de deux nombres consécutifs est impaire, il lui devient possible d'explorer les caractéristiques des sommes de 3, de 4, de 5 et même de 10 nombres consécutifs.

Au lieu de « […] demander aux élèves de mémoriser des propriétés ou des règles, il est important de leur donner l'opportunité d'analyser de nombreux cas particuliers […] (Beatty et Bruce, 2012; ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005) » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 6) et de les laisser généraliser d'autres cas.

Généralisations algébriques

L'élève devrait maîtriser les généralisations algébriques ci-dessous relatives aux propriétés des nombres réels.

Commutativité :
Pour tous les a et b éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $a + b = b + a$.
Pour tous les a et b éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $a \times b = b \times a$.

Associativité :
Pour tous les a, b et c éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Pour tous les a, b et c éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Distributivité :
Pour tous les a, b et c éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $a(b+c) = ab + ac$.

Élément neutre :
Pour tous les a éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $a + 0 = 0 + a = a$.
Pour tous les a éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $a \times 1 = 1 \times a = a$.

Élément absorbant :
Pour tous les a éléments de $\mathbb{R}$ (nombres réels), $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

L'ÉGALITÉ EN TANT QUE RELATION ENTRE DES QUANTITÉS

> L'algèbre consiste à reconnaître les relations entre des quantités et des opérations. Lorsque des élèves travaillent avec des équations, il est impératif qu'ils comprennent que le signe égal représente une relation entre des quantités plutôt qu'un symbole indiquant qu'il faut effectuer un calcul (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 7).

Dans *Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique M-12* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013), il est expliqué que « […] de nombreux élèves ne reconnaissent pas que le signe égal indique une égalité » (p. 6), voire une équivalence entre deux expressions numériques. La « […] plupart des élèves ont interprété le symbole égal comme étant synonyme d'effectuer un calcul et [d']inscrire la réponse après le symbole égal » (p. 6). Cette idée relève d'une association faite avec l'arithmétique où souvent il est demandé à l'apprenante ou à l'apprenant d'évaluer des équations ayant la forme : a [signe d'opération] b = ?. De plus, l'utilisation de la calculatrice renforce cette idée, puisque la réponse est affichée lorsque l'élève appuie sur la touche =. Il est donc nécessaire de présenter aux élèves des situations arithmétiques qui leur demandent de vérifier si des égalités sont vraies ou fausses (p. ex., $14 + 3 = 16 + 1$), ainsi que des égalités ayant des formes inhabituelles ($17 = 3 + 14$). Pour faciliter le passage du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique, les élèves doivent développer certaines habiletés relatives aux relations entre des quantités.

Les habiletés décrites dans les pages suivantes aident les élèves à développer une compréhension approfondie de la relation d'égalité. Les activités présentées visent une compréhension de la relation entre les nombres avant l'application de procédures. Ces types d'activités favorisent un raisonnement par déduction pour résoudre les systèmes d'équations que prescrit le programme-cadre à partir de la 10^e année.

Habiletés pour construire le sens de l'égalité

Aux cycles primaire et moyen, les élèves ont exploré les relations d'égalité et les habiletés qui s'y rattachent en vue de comprendre diverses relations liées à des situations d'égalité.

Les habiletés à reconnaître, à expliquer, à créer, à rétablir et à maintenir une situation d'égalité soutiennent le développement de la pensée algébrique. Au cours des années précédentes, les élèves ont développé ces habiletés avec les opérations ainsi qu'avec des inconnues à l'aide de modèles spécifiques (p. ex., droite numérique, disposition rectangulaire) et de matériel concret, puis graduellement en se servant de la représentation symbolique. Aux différents cycles, le développement de ces habiletés se poursuit en y ajoutant des expressions algébriques.

HABILETÉ À RECONNAÎTRE UNE SITUATION D'ÉGALITÉ

« Reconnaître une situation d'égalité, c'est identifier que deux quantités ont la même valeur » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 75). L'utilisation de matériel concret et semi-concret pour représenter une égalité facilite le transfert aux égalités représentées à l'aide de symboles. Si les élèves sont habiles à utiliser des dispositions rectangulaires, alors reconnaître une situation d'égalité et la démontrer à l'aide d'expressions algébriques devient plus concret pour elles et eux.

Exemple

L'emploi d'une disposition rectangulaire et la propriété de distributivité de la multiplication aident les élèves à représenter une situation et à vérifier si l'égalité est vraie.

$$\begin{aligned}(10x + 4)(x + 8) &= 10x^2 + 4x + 80x + 32 \\ &= 10x^2 + 84x + 32\end{aligned}$$

	$10x$	4
x	$10x^2$	$4x$
8	$80x$	32

HABILETÉ À EXPLIQUER UNE SITUATION D'ÉGALITÉ

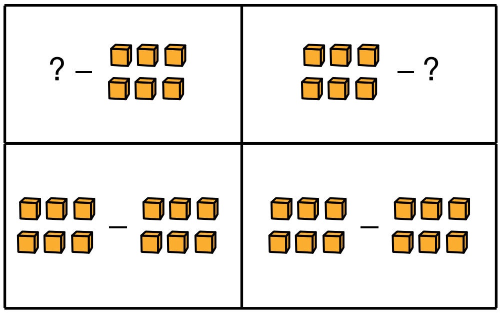
« Expliquer une situation d'égalité, c'est la justifier. […] Le sens de la relation d'égalité se développe par un transfert du concret vers la représentation symbolique et par la compréhension de l'équilibre que représente une égalité » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 76).

Exemple

$x - 6 = 6 - x$

Est-ce que cette équation est vraie? Comment justifies-tu ton raisonnement?

Représentation semi-concrète



Représentation à l'aide de mots

Cette équation est vraie si $x = 6$. Si x a une autre valeur, l'équation n'est plus vraie.

Représentation à l'aide d'une propriété

La soustraction n'est pas commutative.

HABILETÉ À CRÉER UNE SITUATION D'ÉGALITÉ

« Créer une situation d'égalité, c'est représenter [un problème ou] une telle situation sous diverses formes » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 77). La situation est présentée sous la forme d'un tableau et d'une comparaison de deux phrases ou d'opérations mathématiques.

Exemple

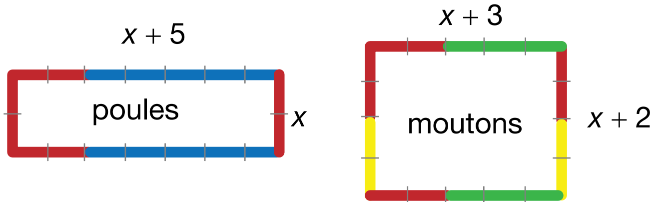
Demander aux élèves de représenter la situation ci-dessous afin de vérifier s'il s'agit d'une situation d'égalité.

Ismaël construit, pour ses poules, un enclos de forme rectangulaire dont les dimensions sont $(x + 5)$ et (x)*. Suzie construit, pour ses moutons, un enclos de forme rectangulaire dont les dimensions sont* $(x + 3)$ *et* $(x + 2)$*.*

Suzie affirme que les enclos ont le même périmètre. A-t-elle raison?

(Inspiré de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 104.)

Pour créer une situation d'égalité, les élèves comparent les dimensions des deux enclos à l'aide d'un schéma et d'une équation.



PÉRIMÈTRE DE L'ENCLOS DES POULES	PÉRIMÈTRE DE L'ENCLOS DES MOUTONS
$P = 2(x + 5) + 2(x)$	$P = 2(x + 2) + 2(x + 3)$
$P = 2x + 10 + 2x$	$P = 2x + 4 + 2x + 6$
$P = 4x + 10$	$P = 4x + 10$

Suzie démontre que les deux périmètres sont égaux. Elle a donc raison.

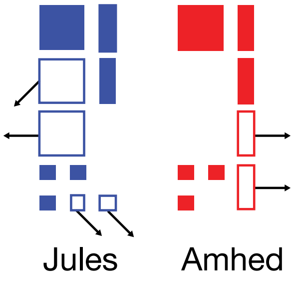
HABILETÉ À RÉTABLIR UNE SITUATION D'ÉGALITÉ

« Rétablir une situation d'égalité, c'est transformer une non-égalité de façon à obtenir une égalité. […] Cette habileté exige un niveau d'abstraction plus élevé que l'habileté à créer une égalité » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 78). Voici deux exemples où les élèves rétablissent une égalité.

Exemple à l'aide de matériel concret

L'exemple ci-dessous est cité et tiré du *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4^e à la 6^e année,* Modélisation et algèbre (Ministère de l'Éducation de l'Ontario 2008a, p. 78 et 79).

> *Jules reçoit un sac de 300 billes. Lors d'une fête, il reçoit 20 billes de Sébastien et 5 billes de Mohammed. Quant à Amhed, il reçoit un sac de 100 billes de sa mère, 40 billes de sa tante et 3 billes de sa sœur. Que peuvent-ils faire pour avoir la même quantité de billes?*
>
> Les élèves peuvent représenter la situation à l'aide de matériel de base dix. Il est important, au départ, qu'[elles et] ils reconnaissent et expliquent la non-égalité ($300 + 20 + 5 \neq 100 + 40 + 3$, car Jules a 325 billes, tandis qu'Amhed en a 143). (p. 78)
>
> […]
>
> « Pour rétablir l'égalité, je peux enlever 2 centaines (2 planchettes) et 2 unités (2 petits cubes) à Jules. Je peux ensuite enlever 2 dizaines (2 languettes à Amhed). » (p. 79)



© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2008.
Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.

L'égalité est rétablie : 325 – 202 = 143 – 20.

Une autre stratégie pour rétablir l'égalité est de transférer 1 centaine et 1 unité de Jules à Amhed, puis de transférer 1 dizaine d'Amhed à Jules. (p. 79)

Exemple à l'aide de symboles

$632 + 2x + 8y \neq x + 12y + 529$

« Je peux rétablir l'égalité en ajoutant au membre de droite : $x - 4y + 103$. »

$632 + 2x + 8y = x + x + 12y - 4y + 529 + 103$

Habileté à maintenir une situation d'égalité

Maintenir une situation d'égalité, c'est opérer sur les quantités pour s'assurer de préserver l'égalité. En explorant diverses situations, les élèves constatent que lorsqu'une quantité est ajoutée à un membre d'une égalité ou retirée de celui-ci, la même action doit s'effectuer sur l'autre membre de l'égalité. La balance à plateau permet de visualiser ces actions.

Exemple

$2x + 6 = 3x + 2$ Une grosse bille = x	
Je retire 2 grosses billes de chaque côté de la balance, j'obtiens $6 = x + 2$.	
Je retire 2 petites billes de chaque côté de la balance, j'obtiens $4 = x$.	

Sans la représentation de la balance à plateau, il est possible de résoudre l'équation de façon algébrique :

$2x + 6 = 3x + 2$	
$2x + 6 - 2x = 3x + 2 - 2x$	J'enlève 2*x* de chaque côté du signe égal.
$6 - 2 = x + 2 - 2$	J'enlève 2 de chaque côté du signe égal.
$4 = x$	Je détermine la valeur de *x*.

Comprendre le processus du maintien d'une situation d'égalité est une habileté très importante qui permet aux élèves de résoudre des équations à tous les cycles. Pour résoudre une équation ou vérifier si elle est vraie, il faut regrouper les variables d'un côté et les nombres de l'autre, tout en maintenant l'équilibre entre le membre de gauche et le membre de droite.

Exemple

$4(x - 5) + 2x = 3x + 7$	
$4x - 20 + 2x = 3x + 7$	J'utilise la propriété de distributivité.
$4x + 2x - 20 + 20 = 3x + 7 + 20$ $6x = 3x + 27$ $6x - 3x = 3x - 3x + 27$ $3x = 27$	Je regroupe les variables d'un côté et les nombres de l'autre, tout en maintenant l'équilibre entre le membre de gauche et le membre de droite.
$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$	Je divise chaque côté par 3.
$x = 9$	Je détermine la valeur de *x*.

LE PASSAGE AU SYMBOLIQUE

> Les généralisations [...] sont exprimées par des symboles. Traditionnellement, l'algèbre a souvent été présentée au secondaire comme une syntaxe prédéterminée de règles et un langage symbolique devant être mémorisé par les élèves. On s'attendait à ce que les élèves maîtrisent la manipulation symbolique avant d'apprendre quels étaient le but et l'utilisation des symboles. Autrement dit, on a présenté l'algèbre aux élèves en leur donnant peu de possibilités de l'explorer ou d'y trouver un sens. Toutefois, le curriculum de mathématiques de l'Ontario stipule qu'il faut proposer aux élèves une gamme de possibilités d'exploration et de recherche de sens (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 8).

Lorsque les élèves sont exposées et exposés à une variété de représentations tôt dans leur apprentissage, cela les aide à développer une aisance avec les symboles. L'exploration continue de l'utilisation de symboles dans des contextes mathématiques variés permet aux élèves de donner un sens à ces symboles et à se les approprier. Notamment, elles et ils remplacent progressivement les symboles personnels par des symboles littéraux pour représenter des inconnues ou des variables (p. ex., $13 + a = 19$) et les utilisent pour communiquer un raisonnement algébrique.

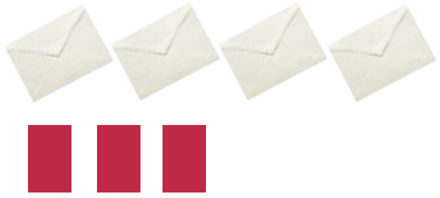
L'exemple ci-dessous de Radford, Demers et Miranda (2009, inspiré et tiré des pages 30 à 43), est un moyen d'observer la manière dont les élèves du cycle intermédiaire développent le sens du symbole et vivent le passage au symbolique en suivant une séquence d'enseignement que suggèrent les auteurs.

Exemple

Matik a trois cartes de hockey. Il reçoit quatre enveloppes contenant chacune le même nombre de cartes de hockey. Mat a 12 cartes de hockey. Il reçoit une enveloppe identique aux trois enveloppes de Matik. Mat et Matik ont maintenant le même nombre de cartes de hockey. Combien de cartes de hockey chaque enveloppe contient-elle?

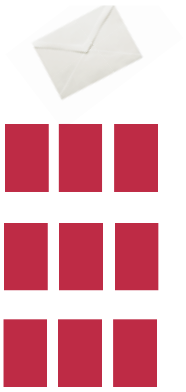
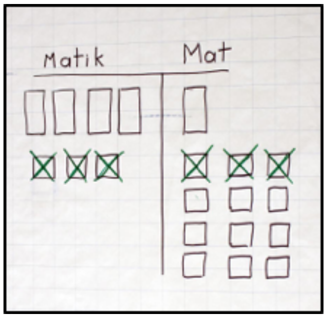
(Inspiré de Radford, Demers et Miranda, 2009, p. 31 et 34.)

À l'aide d'enveloppes et de morceaux de carton pour représenter les cartes de hockey, les élèves modélisent le problème.

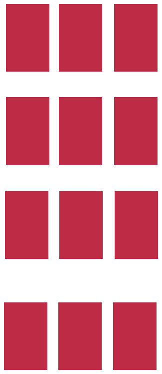
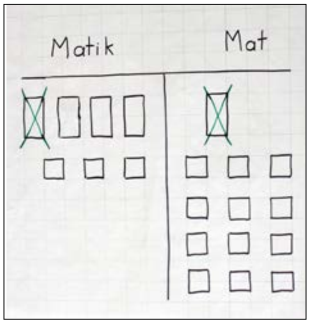
MATIK	MAT
	

Poser aux élèves la question suivante : « Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe? » Leur allouer suffisamment de temps pour répondre à la question. Animer un échange mathématique en demandant à quelques élèves de présenter leur solution.

Solution 1

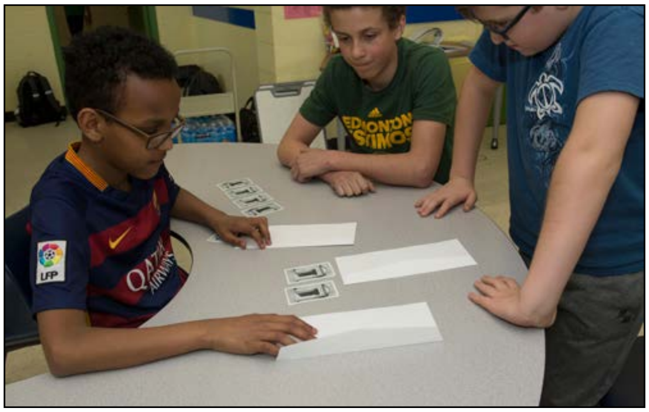
<table>
<tr><th>MATIK</th><th>MAT</th><th>EXPLICATION DE L'ÉLÈVE</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Élève 1 : J'ai enlevé trois cartes à chacun des amis. Puis, j'ai associé chaque enveloppe de la colonne de gauche à trois cartes de la colonne de droite. Puisqu'une enveloppe de la colonne de droite est équivalente à une enveloppe de la colonne de gauche, alors, pour qu'il y ait égalité, chacune des trois autres enveloppes doit contenir trois cartes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pendant que l'Élève 1 explique sa stratégie, une ou un autre élève retire du dessus du pupitre six cartes (trois cartes à Matik et trois cartes à Mat). Elle ou il représente son geste à l'aide d'un schéma.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
(Inspiré de © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario et Université Laurentienne, 2009.)</td></tr>
</table>

Solution 2

<table>
<tr><th>MATIK</th><th>MAT</th><th>EXPLICATION DE L'ÉLÈVE</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Élève 2 : Je pense qu'en enlevant une enveloppe à Matik et une enveloppe à Mat, le résultat serait le même : trois cartes à droite, c'est équivalent à trois cartes à gauche. Pour qu'il y ait égalité, il doit donc y avoir trois cartes dans chaque enveloppe.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pendant que l'Élève 2 explique sa stratégie, une ou un autre élève retire du dessus du pupitre deux enveloppes (une enveloppe à Matik et une enveloppe à Mat). Elle ou il représente son geste à l'aide d'un schéma.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

(Inspiré de © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario et Université Laurentienne, 2009.)</td></tr>
</table>

L'étape au cours de laquelle les élèves représentent leurs gestes à l'aide d'un schéma leur permet d'accomplir un premier niveau d'abstraction. Il ne s'agit plus d'enlever des cartes et des enveloppes, mais plutôt de barrer, sur un schéma, les objets en question. Ce premier niveau d'abstraction deviendra important au moment du passage à la représentation symbolique.



À un moment opportun de cette séquence d'enseignement, l'enseignante ou l'enseignant encourage l'élève à passer du matériel de manipulation ou du schéma à la représentation symbolique. Dans les équations ci-dessous, la variable *n* représente le nombre de cartes de hockey dans une enveloppe.

$$\begin{aligned} 4n + 3 &= n + 12 \\ 4n + 3 - 3 &= n + 12 - 3 \\ 4n &= n + 9 \\ 4n - n &= n - n + 9 \\ 3n &= 9 \\ \frac{3n}{3} &= \frac{9}{3} \\ n &= 3 \end{aligned}$$

L'élève explique qu'ajouter le nombre –3 de chaque côté du signe égal, cela revient à enlever des cartes de hockey, tandis qu'ajouter –*n* de chaque côté du signe égal, cela revient à retirer une enveloppe.

Les explications des élèves devraient aussi refléter l'idée que l'égalité est conservée si une même quantité est enlevée ou ajoutée de chaque côté du signe égal. À partir de ce moment, elles et ils pourront mathématiser d'autres situations semblables en se servant de la représentation symbolique. Les élèves passent alors à un second niveau d'abstraction (Radford, Demers et Miranda, 2009, inspiré des pages 30 à 43).

Lorsque les élèves maîtrisent la représentation symbolique, un enseignement explicite des conventions propres à l'algèbre est requis.

Les conventions et la terminologie

> L'algèbre est utilisée pour comprendre et établir des relations mathématiques et pour communiquer des idées. À cette fin, les symboles ont une place importante en algèbre. Lorsque les élèves sont en mesure de représenter une situation, une relation ou une idée mathématique à l'aide de symboles, ils font preuve d'un niveau d'abstraction qui démontre un raisonnement algébrique (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 67).

Pour bien saisir les concepts liés à l'algèbre, la terminologie qui s'y rattache doit être utilisée correctement. Le tableau à la page suivante présente un résumé de cette terminologie. Les exemples sont adaptés aux élèves de la 7^e à la 10^e année.

TERMINOLOGIE	EXEMPLES
Expression Une expression est un symbole ou un ensemble de symboles pouvant être liés entre eux à l'aide d'un signe d'opération. **Note :** Une expression numérique ne contient que des nombres. **Expression algébrique contenant des nombres et des lettres** Les expressions algébriques peuvent être des monômes, des binômes, des trinômes ou des polynômes. **Note :** Les expressions algébriques ne contiennent pas de signe =. Il ne s'agit donc pas d'équations.	$5 - 2$ $4a$ (un monôme) $3x + 5$ (un binôme) $g^2 + 2g + 7$ (un trinôme) $3x + 2y + 2xy + 1$ (un polynôme)
Terme Chaque élément d'une expression algébrique ou d'une expression numérique, séparé par une addition ou une soustraction. **Note :** Une expression algébrique peut avoir un seul terme.	Dans l'expression algébrique $6a + 3$, il y a deux termes, soit $6a$ et 3.
Équation Il s'agit d'un énoncé mathématique contenant une ou plusieurs inconnues ou variables ainsi que la relation d'égalité.	$3 + n = 5$ $c = 1 + 3n$ $A = c^2$
Inconnue Il s'agit du terme non connu dans une équation. L'inconnue représente une quantité particulière dont la valeur n'est pas encore déterminée. L'inconnue est présente dans une équation à résoudre qui traduit une relation d'égalité. **Notes :** – Par convention, si un même symbole est utilisé plus d'une fois dans une équation ou une situation, la valeur qu'il représente est la même. – Il existe des équations dont l'inconnue peut avoir plus d'une valeur.	Dans l'équation $10 = 17 - c$, la variable c est une inconnue dont la valeur n'est pas encore déterminée. Il est possible de déterminer que $c = 7$. Dans l'équation $b + b + b = 18$, il est possible de conclure que $b = 6$, puisque $6 + 6 + 6 = 18$. Dans l'équation $x^2 = 36$, l'inconnue peut avoir une valeur de 6 ou de -6.

TERMINOLOGIE	EXEMPLES
Variable Il s'agit du terme indéterminé dans une équation ou une inéquation qui peut être remplacé par plusieurs valeurs. – Une équation qui représente une relation entre deux quantités changeantes contient des variables. – Une formule contient des variables. – Une équation qui généralise une relation d'égalité contient des variables. **Note :** Dans une équation, il est possible que deux variables différentes prennent la même valeur en même temps (p. ex., dans l'équation $a + b = 6$, si a prend la valeur de 3, b aura aussi la valeur de 3.	L'équation $p = 2n + 1$ représente la relation entre le numéro de la figure, n, dans une suite non numérique, et le nombre de points, p, qui la composent. La valeur de la variable n (variable indépendante) influe sur la valeur de la variable p (variable dépendante). Aire d'un rectangle ou d'un parallélogramme : $A = b \times h$

(Tiré et inspiré de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 69, 70 et 85.)

Les variables et les inconnues

> Les variables constituent un excellent outil pour exprimer les régularités observées en mathématiques. Elles permettent d'utiliser les symboles mathématiques pour aider à réfléchir et à saisir certaines idées mathématiques, de la même façon qu'on se sert d'objets concrets et de dessins (Van de Walle et Lovin, 2008, p. 297).

Il importe que les élèves comprennent que même si les inconnues et les variables représentent toutes deux des valeurs manquantes dans une équation, ce ne sont pas des synonymes. La notion de variable devient plus familière pour les élèves lorsqu'elles et ils analysent un problème à l'aide d'une table de valeurs.

Exemple

Une auto parcourt 9 km avec 1 L d'essence. La capacité de son réservoir est de 80 L. Quelle équation pourrait servir à déterminer la quantité d'essence restante dans le réservoir après un trajet de 625 km, si le plein d'essence a été fait juste avant le départ?

Les élèves reconnaissent, à l'aide de la table de valeurs, qu'une variable indépendante, dans ce cas-ci d, peut prendre n'importe quelle valeur. Elles et ils l'utilisent donc pour évaluer l'expression algébrique $80 - \frac{d}{9}$ en vue de résoudre l'équation $q = 80 - \frac{d}{9}$.

La **variable indépendante** a une valeur qui lui est attribuée.

La **variable dépendante** correspond aux valeurs attribuées à la variable indépendante.

Distance parcourue, *d* (km) (variable indépendante)	**Quantité d’essence, *q* (L)** (variable dépendante)
0	80
9	$80 - \frac{9}{9} = 79$
90	$80 - \frac{90}{9} = 70$
180	$80 - \frac{180}{9} = 60$
360	$80 - \frac{360}{9} = 40$
d	$80 - \frac{d}{9}$

Ce n’est que dans certaine situation particulière demandant, par exemple, la distance parcourue s’il ne reste que 56 L d’essence dans le réservoir, que le symbole *d*, dans l’équation $80 - \frac{d}{9} = 56$, s’appelle *inconnue*, car il n’y a qu’une seule valeur qui rend l’équation vraie.

Les expressions algébriques et les équations

Les expressions algébriques sont des ensembles de symboles liés entre eux à l’aide d’un signe d’opération. Elles sont composées de termes qui peuvent être des nombres, des variables et un nombre joint à une variable. Les expressions sont importantes au développement du raisonnement algébrique, en particulier à la généralisation de l’arithmétique. Le fait de les représenter contribue à la construction du concept d’expression algébrique.

REPRÉSENTER DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

Matériel spécifique à l’algèbre – Représentation de monômes, de binômes et de trinômes

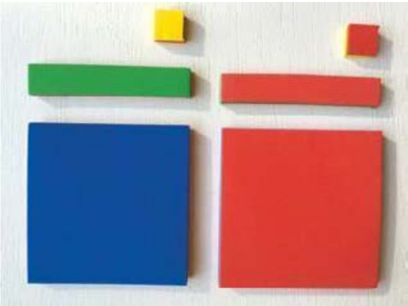


Photo : Hélène Matte.

Pour représenter des concepts algébriques, il existe un type particulier de matériel de manipulation facilitant l’exploration. Il s’agit des carreaux algébriques qui servent à représenter la relation existante entre une variable (*x*), cette même variable au carré (x^2) et un (1). C’est en se basant sur le concept d’aire que ce matériel de manipulation a été conçu. Différents produits sont offerts sur le marché, et les couleurs des pièces peuvent varier. Cependant, tous ces ensembles permettent de représenter la variable positive ou négative. Dans le présent cas, le carreau jaune représente 1 (son aire = 1 × 1 = 1), le carreau vert représente x (son aire = $1x$) et le carreau bleu représente x^2 (son aire = $x \times x = x^2$). Les carreaux rouges représentent -1, $-x$ et $-x^2$. À l'aide de ce matériel, les élèves peuvent représenter des monômes, des binômes et des trinômes.

Exemple d'utilisation de carreaux algébriques

Les élèves de 10^e^ année, avant même qu'elles et ils aient vu la factorisation de trinômes, sont invitées et invités à factoriser le nombre 12, lorsque 12 est représenté par 12 carrés noirs. *Factoriser* veut dire « exprimer un nombre sous la forme d'une multiplication de facteurs ». Les élèves représentent la factorisation à l'aide de dispositions rectangulaires de 12 sur 1, de 3 sur 4 et de 2 sur 6.

Exemple

L'enseignante ou l'enseignant propose aux élèves de déterminer s'il est possible de factoriser certaines expressions algébriques à l'aide de carreaux algébriques. Les élèves doivent donc déterminer si un rectangle peut être formé de carreaux algébriques représentant un trinôme.

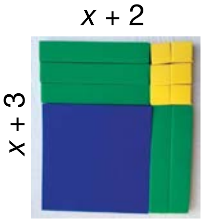
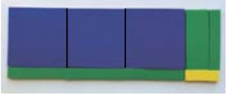


Photo : Hélène Matte.

Pour le trinôme $x^2 + 5x + 6$, est-il possible de former un rectangle en utilisant 1 carreau bleu, 5 carreaux verts et 6 carreaux jaunes? C'est effectivement le cas. De plus, les carreaux algébriques permettent d'observer que les facteurs de ce trinôme sont $(x + 3)$ et $(x + 2)$.

Les élèves poursuivent l'exploration des trinômes en vérifiant si elles et ils sont en mesure de factoriser, à l'aide des carreaux algébriques, d'autres trinômes.

Voici les rectangles qu'ont construits les élèves à l'aide de carreaux algébriques (la disposition pourrait faire l'objet d'une discussion) :

 Photo : Hélène. Matte.	 Photo : Hélène Matte.	 Photo : Hélène Matte.
Pour le trinôme $3x^2 + 6x + 3$, les facteurs sont $(x + 1)(3x + 3)$.	Pour le trinôme $2x^2 + 7x + 3$, les facteurs sont $(x + 3)(2x + 1)$.	Pour le trinôme $4x^2 + 6x + 2$, les facteurs sont $(2x + 1)(2x + 2)$.

SIMPLIFIER DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

Représenter des expressions algébriques permet aussi de les simplifier. En regroupant les termes semblables (ceux ayant une variable, ceux ayant la même variable au carré et ceux ayant un nombre) à l'aide de carreaux algébriques, les élèves commencent à les simplifier (p. ex., $4x + x$ aurait la même représentation que $5x$; $2x^2 + 7x + 1 + 2x^2 - x$ aurait la même représentation que $4x^2 + 6x + 1$.

L'exemple ci-dessous illustre la manière de simplifier des expressions algébriques et de comparer des équations.

En observant la suite d'hexagones, les élèves doivent déterminer une équation pour calculer le périmètre, *P*, d'une chaîne de *n* hexagones. Elles et ils constatent que le périmètre d'une chaîne d'hexagones est lié au nombre d'hexagones qui la composent. En d'autres mots, le périmètre, *P*, dépend du nombre, *n*, d'hexagones dans la chaîne.

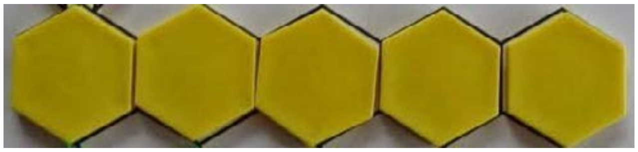
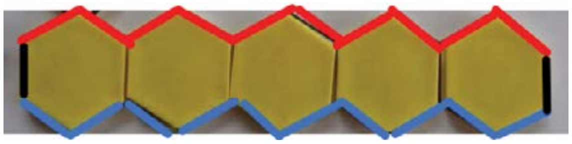
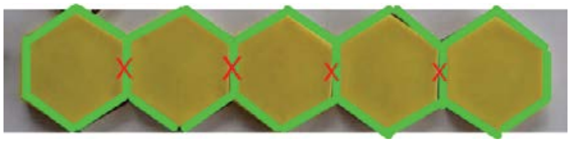
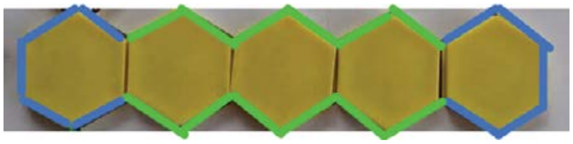


Photo : Hélène Matte.

Ahmed détermine l'équation suivante : $P = n \times 2 + n \times 2 + 2$	 Photo : Hélène Matte.
Sophia détermine l'équation suivante : $P = n \times 6 - [(n - 1) \times 2]$	 Photo : Hélène Matte.
Joshua détermine l'équation suivante : $P = 10 + (n - 2) \times 4$	 Photo : Hélène Matte.

Les élèves remplissent une table de valeurs en évaluant l'expression algébrique du membre de droite de leur équation respective, à l'aide de différents nombres d'hexagones. Elles et ils obtiennent les données suivantes.

Nombre d'hexagones, *n*	1	2	3	4	5	6
Périmètre, *P*	6	10	14	18	22	26

$P = n \times 2 + n \times 2 + 2$

$P = n \times 6 - [(n - 1) \times 2]$

$P = 10 + (n - 2) \times 4$

L'importance, à cette étape-ci, n'est plus le nombre d'hexagones qui composent la chaîne. Il s'agit plutôt de vérifier si les expressions algébriques sont équivalentes et représentent la même relation. La simplification d'expressions algébriques devient donc importante au moment d'établir des liens entre les diverses équations des élèves.

ÉQUATION D'AHMED	ÉQUATION DE SOPHIA	ÉQUATION DE JOSHUA
$P = n \times 2 + n \times 2 + 2$ $P = 2n + 2n + 2$ $P = 4n + 2$	$P = n \times 6 - [(n - 1) \times 2]$ $P = 6n - [2 \times (n - 1)]$ $P = 6n - (2n - 2)$ $P = 4n + 2$	$P = 10 + (n - 2) \times 4$ $P = 10 + 4n - 8$ $P = 4n + 2$
L'expression algébrique $n \times 2 + n \times 2 + 2$ est égale à l'expression algébrique $4n + 2$.	L'expression algébrique $n \times 6 - [(n - 1) \times 2]$ est égale à l'expression algébrique $4n + 2$.	L'expression algébrique $10 + (n - 2) \times 4$ est égale à l'expression algébrique $4n + 2$.

En effet, la simplification des expressions algébriques, dans les membres de droite, permet de conclure que les trois équations sont équivalentes, car elles sont composées des mêmes termes.

GÉNÉRER UNE ÉQUATION

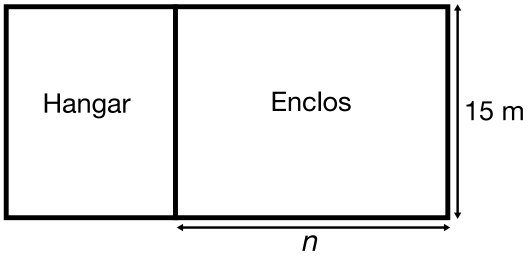
L'équation est assurément la forme de représentation mathématique la plus succincte. Toutefois, il est souvent difficile pour les élèves de l'interpréter ou de la générer. Lorsque l'objectif est de développer la généralisation de l'arithmétique chez les élèves, l'enseignante ou l'enseignant leur donne des occasions d'analyser la façon dont le « changement » exercé sur une variable influence les « changements » que subit une autre variable. En vue d'atteindre cet objectif, les élèves peuvent se servir d'une représentation plus familière, soit la table de valeurs, pour analyser le changement et ensuite généraliser. La table de valeurs est un outil puissant pour observer des régularités et en arriver à une équation qui décrit la relation entre deux quantités changeantes.

Exemple

Un fermier veut construire un enclos rectangulaire attenant à son hangar, en installant une clôture. Le hangar mesure 15 m de long. Il veut qu'un côté du hangar forme un des côtés de l'enclos. La clôture est vendue au prix de 35 $ le mètre. Détermine la relation entre le coût de l'enclos et sa longueur. Représente cette relation à l'aide d'une équation.

Pour résoudre le problème ci-dessus, les élèves analysent l'énoncé, déterminent s'il existe une relation entre les données et reconnaissent les quantités changeantes. Elles et ils établissent ensuite la quantité associée à la variable dépendante ainsi que celle associée à la variable indépendante pour déterminer l'équation.

Afin de mieux comprendre le problème, les élèves peuvent le visualiser et déterminer les quantités qui changent à l'aide d'un schéma.



Le coût de l'enclos dépend de la longueur de clôture à acheter. Comme le côté du hangar forme un des côtés de l'enclos, seule une de ces dimensions varie, tandis que l'autre est fixe.

Longueur de l'enclos, *n* (m)	Longueur de la clôture (m)	Coût en dollars, *C* ($)
1	$15 + 2(1)$	$(15 + 2(1)) \times 35$
2	$15 + 2(2)$	$(15 + 2(2)) \times 35$
3	$15 + 2(3)$	$(15 + 2(3)) \times 35$
n	$15 + 2n$	$(15 + 2n) \times 35$

Les élèves déterminent que le coût de l'enclos dépend de la longueur de la clôture en mètres. Elles et ils peuvent exprimer l'équation de la façon suivante : $C = (15 + 2n) \times 35$, où C représente le coût de l'achat en dollars et n, la longueur de l'enclos en mètres. En fait, cette équation comporte une succession de généralisations. D'abord, les élèves ont généralisé une partie de la situation pour déterminer la relation entre la longueur de clôture à acheter et la longueur de l'enclos. Ensuite, elles et ils ont généralisé pour représenter le coût total de l'achat en fonction de la longueur de clôture nécessaire pour construire l'enclos. D'autres généralisations pourraient être faites en partant de cette situation; par exemple, si la longueur du hangar pouvait changer ou si le coût des matériaux utilisés pour la construction de l'enclos variait.

RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS

Selon le programme-cadre de mathématiques de l'Ontario, la résolution d'équations, en 7^e année, se fait « par essais systématiques et par inspection » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 82). Ces méthodes, qui relèvent de l'arithmétique, favorisent le développement de la compréhension de la relation d'égalité ainsi que le processus mathématique de raisonnement. Elles aident les élèves à analyser les relations entre les nombres pour déterminer la valeur de l'inconnue rendant l'égalité vraie. Lorsque les apprenantes et apprenants résolvent des équations par essais systématiques, elles et ils doivent analyser l'ensemble de l'équation et raisonner, plutôt que de s'en tenir à évaluer l'expression de façon aléatoire jusqu'à ce qu'elles et ils découvrent la solution.

Les exemples ci-dessous ont comme objectif d'aider à mieux comprendre l'intention pédagogique derrière chacune des deux méthodes.

Méthode 1 (Essais systématiques)

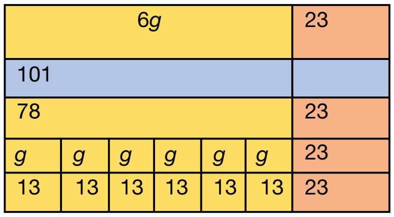
Une élève résout l'équation $6g + 23 = 101$ par essais systématiques. Elle énumère tous les essais systématiques effectués ainsi que les résultats obtenus.

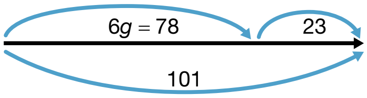
Essai 1 Si $g = 15$, alors… $6(15) + 23 \overset{?}{=} 101$ $90 + 23 \neq 101$ Essai 2 Si $g = 12$, alors… $6(12) + 23 \overset{?}{=} 101$ $72 + 23 \neq 101$ Essai 3 Si $g = 13$, alors… $6(13) + 23 \overset{?}{=} 101$ $78 + 23 = 101$ Donc, $g = 13$	Une élève montre son raisonnement lorsqu'elle débute en choisissant 15 comme valeur pour la variable g et qu'elle est en mesure d'expliquer que la valeur de $6g$ est d'environ 90, mais que $90 + 23 \neq 101$. Cela révèle qu'elle a acquis l'idée d'équivalence entre le membre de gauche et celui de droite. L'élève comprend qu'il y aura une équivalence lorsque la valeur de $6g$ sera déterminée. Cette méthode est aussi une occasion pour elle de parfaire ses habiletés en calcul mental, de développer son sens du nombre et d'évaluer des expressions algébriques.

Méthode 2 (Inspection)

Un élève résout l'équation $6g + 23 = 101$ par inspection.

$6g + 23 = 101$ $? + 23 = 101$ $78 + 23 = 101$ $6g = 78$ $6 \times ? = 78$ $6 \times 13 = 78$, donc $g = 13$	Un élève montre son raisonnement lorsqu'il sait que l'expression $6g$ doit être équivalente à 78, car uniquement $78 + 23 = 101$. Contrairement à la méthode par essais systématiques, la méthode par inspection favorise chez l'élève l'utilisation de son sens des opérations pour déterminer la valeur inconnue.





$6g = 78$
$g = 78 \div 6$
$= 13$

D'autres types de représentations peuvent aussi aider les élèves à développer leur sens des opérations. L'enseignante ou l'enseignant invite les élèves à dessiner des bandes de différentes longueurs afin de déterminer les quantités connues et les quantités inconnues de l'énoncé, et de tenir compte de la relation que représente l'équation.

Dans le présent cas, l'élève utilise la méthode par inspection. Elle ou il reconnaît que la somme des deux termes est équivalente à 101. Elle ou il conclut que $6g$ est équivalent à 78 (101 – 23 = 78) et qu'en effectuant 78 ÷ 6 = 13 elle ou il peut déterminer la valeur de *g*.

Le même raisonnement pourrait se faire à l'aide d'une droite numérique ouverte double.

La méthode par inspection aide les élèves à comprendre qu'il est possible de résoudre des équations en effectuant des opérations inverses. Dans l'exemple à la page précédente, les élèves peuvent observer, dans l'équation à résoudre, qu'un nombre a été multiplié par 6 et que 23 a été ajouté au produit pour obtenir 101. Alors, 78 est le résultat de 101 – 23 (l'opération inverse d'additionner 23 à 78) et 13 est le résultat d'une division de *g* par 6 (l'opération inverse de multiplier *g* par 6).

Si les élèves ne maîtrisent pas le concept des opérations inverses, l'enseignante ou l'enseignant peut les aider à le construire à l'aide d'une table de valeurs ordonnée ou non ordonnée dont les valeurs de sortie et l'opération mathématique sont données et où l'entrée est inconnue (figure à gauche) (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 12).

Entrée	Opération arithmétique	Sortie
4	Ajouter 5	9
		7
		10
		15

Entrée		__ × 2 + 3		Sortie
7	←	17 − 3 = 14 14 ÷ 2 = 7	←	17

© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2013

Dans le cas des règles composées de deux opérations arithmétiques, telles que « ___ × 2 + 3 » (figure à droite), les élèves apprennent à utiliser les opérations inverses de deux opérations pour déterminer la valeur originale ou l'entrée. Les problèmes « inversés » (p. ex., lorsque l'aire et la mesure d'une dimension sont données et que l'autre dimension doit être déterminée) aident les élèves à développer ce concept important.

NOTE IMPORTANTE

Ces exemples exigent des élèves de résoudre des équations sans contexte. Ce genre d'exercice convient bien pour des minileçons. Il faut tenir compte du fait que :

> […] les élèves obtiennent initialement de meilleurs résultats lorsque les problèmes sont présentés en contexte (avec des mots) plutôt qu'avec les équations symboliques correspondantes (Koedinger, Alibali, et Nathan, 2008). Les problèmes présentés à l'écrit ou à l'oral permettent aux élèves de raisonner quantitativement en faisant appel à leurs connaissances antérieures, sans avoir à mémoriser comment ils doivent manipuler les symboles.

Les élèves ont répondu correctement à cette question :	mais ont eu du mal à résoudre l'équation suivante :
Ziggy est un serveur. Dans une journée, il a travaillé 5 heures et a reçu 66 $ en pourboires. S'il a gagné 111,90 $ durant cette journée, quel est son salaire horaire?	$5x + 66 = 111,90$

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 20)

Selon le document *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4^e^ à la 6^e^ année* – Modélisation et algèbre (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a), pour résoudre des équations, l'enseignante ou l'enseignant « […] doit proposer aux élèves des activités qui les incitent à analyser des situations d'égalité et à les traiter de manière algébrique » (p. 200). Elle ou il devrait aussi discuter de stratégies qui font appel au raisonnement algébrique, et « […] qui mettent l'accent sur le sens de l'égalité plutôt que sur l'application mécanique d'une procédure ou de calculs fastidieux » (p. 200).

« Les stratégies suivantes permettent notamment aux élèves d'analyser [et de résoudre une équation] en misant sur leur sens du nombre, des opérations, du symbole et de l'égalité :

- comparer des termes;
- décomposer des nombres […] » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 200);
- annuler des termes.

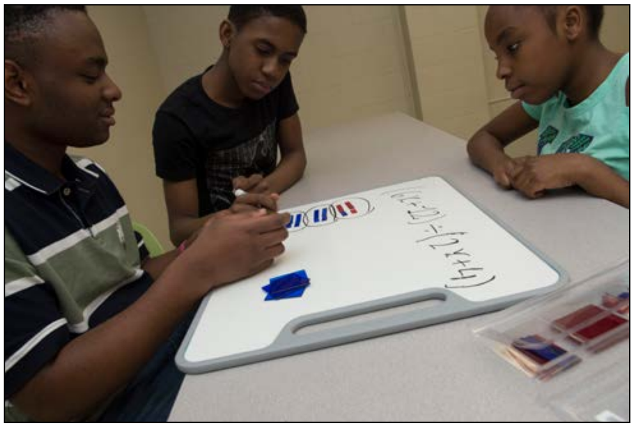
Le tableau ci-dessous présente des exemples de chacune des stratégies proposées pour résoudre une équation.

RAISONNEMENT ARITHMÉTIQUE	RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE
L'élève effectue des opérations selon un raisonnement arithmétique.	L'élève résout les équations selon un raisonnement algébrique.
$423 + 42 = 3n + 42$ $465 = 3n + 42$ $465 - 42 = 3n$ $423 = 3n$ $n = 141$	$423 + 42 = 3n + 42$ L'élève **compare les termes** de chaque côté du signe = et constate que le terme 42 apparaît dans le membre de gauche et dans celui de droite. Donc, pour que l'égalité soit vraie, la valeur de 3*n* doit être de 423, et *n* doit être égal à 141.
$36 + g = 39 + 26$ $36 + g = 65$ $g = 65 - 36$ $g = 29$	$36 + g = 39 + 26$ L'élève **compare les quantités de part et d'autre du signe =**. Elle ou il reconnaît que 36 est 3 de moins que 39 et conclut que, pour que l'égalité soit vraie, il faut que *g* soit 3 de plus que 26. Elle ou il détermine alors que la valeur de *g* est de 29.
$4c + 45 = 97 + 2c$ $4c - 2c = 97 - 45$ $2c = 52$ $c = 26$	$4c + 45 = 97 + 2c$ $2c + \cancel{2c} + \cancel{45} = 45 + \cancel{45} + 7 + \cancel{2c}$ $2c = 52$ $c = 26$ L'élève **décompose un nombre (97) et une expression algébrique (4*c*)**, puis **annule des expressions (2*c* et 45)**. Elle ou il s'exerce à décoder l'équation, c'est-à-dire à donner un sens au symbolisme de l'équation.

(Inspiré et tiré de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 92, 208 et 209.)

Le raisonnement algébrique se développe donc en partant de la généralisation de l'arithmétique, c'est-à-dire en analysant des problèmes, plus particulièrement en s'intéressant aux opérations et à leurs propriétés, aux égalités et aux représentations symboliques plutôt qu'aux solutions.

La section qui suit présente et explore une autre sorte de généralisation, soit la pensée fonctionnelle.



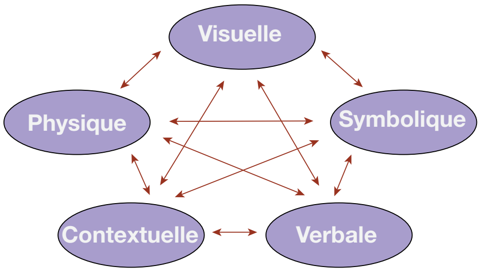
LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE : LA PENSÉE FONCTIONNELLE

La pensée fonctionnelle consiste à analyser des régularités (numériques et géométriques) pour identifier un changement et reconnaître la relation entre deux ensembles de nombres (Beatty et Bruce, 2012). Cette méthode implique l'étude de la façon dont certaines quantités sont liées à d'autres quantités, ou encore modifiées ou transformées par celles-ci.

La pensée fonctionnelle est une autre forme de généralisation. Une fonction est une relation particulière entre deux ensembles de données telles que, chaque élément d'un ensemble est associé à un élément unique d'un autre ensemble. La représentation visuelle des régularités (p. ex., carreaux, images) permet aux jeunes élèves de penser à des relations entre des quantités allant au-delà des calculs en arithmétique (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 9).

Selon John A. Van de Walle et LouAnn H. Lovin (2008), le concept de fonction est l'une des idées fondamentales des mathématiques et le développement de la pensée fonctionnelle est l'un des objectifs d'apprentissage, qui est le plus important pour les élèves. Le chapitre **Le raisonnement algébrique** de leur livre *L'enseignement des mathématiques – L'élève au centre de son apprentissage* (2008, tome 3, p. 288 à 330) approfondit ce sujet.

Au cours de la période qui s'étend de la 7^e à la 10^e année, les élèves doivent être en mesure d'utiliser les différentes représentations d'une fonction (mots, représentation visuelle, représentation graphique, table de valeurs et équation) en vue de décrire des relations tirées du quotidien. Pour les auteurs, « [l]'étude des fonctions est en fait l'étude de la façon dont le changement d'une variable influe sur le changement d'une autre variable : c'est l'étude des variables liées » (Van de Walle et Lovin, 2008, p. 309).

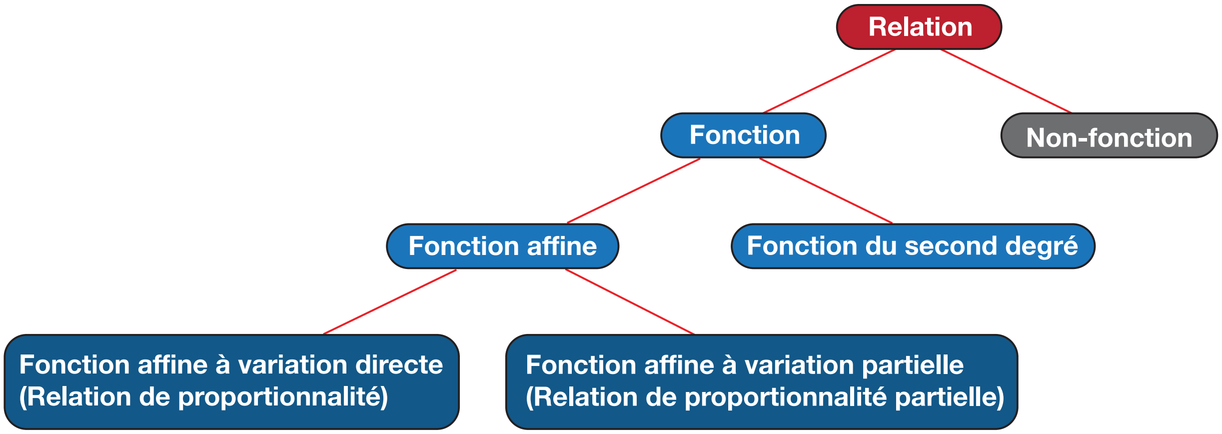


La notion de « variables liées » est, selon Van de Walle et Lovin (2008, tome 3, p. 288 à 330), au cœur de la compréhension des régularités. L'élève doit être en mesure de décrire de diverses manières le lien entre des variables afin de généraliser des modèles dans tous les domaines mathématiques où interviennent des relations entre des quantités. L'acquisition progressive des différentes façons d'exprimer un raisonnement algébrique doit s'accompagner d'une évolution appropriée du langage mathématique et de la notation qui en découle.

Cette section traitera des principaux objectifs de la pensée fonctionnelle soit :

- les relations de proportionnalité;
- les relations de proportionnalité partielle;
- le développement des concepts de relations et de fonctions affines;
- les fonctions du second degré.

L'organigramme ci-dessous illustre les liens entre les termes relatifs aux relations :



LES RELATIONS DE PROPORTIONNALITÉ

Selon le *Guide d'enseignement efficace en mathématiques de la 4^e^ à la 6^e^ année –* Modélisation et algèbre (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a) :

> [i]l y a une relation de proportionnalité entre deux quantités lorsque ces quantités peuvent augmenter ou diminuer simultanément selon le même facteur. Par exemple, si une des deux quantités est triplée, l'autre est triplée aussi. Le rapport entre les deux quantités est alors constant (p. ex., $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$). Une telle égalité entre deux rapports s'appelle une **proportion**. (p. 39)

Exemple

Nombre de films loués	1	2	3	4
Coût ($)	3	6	9	12

C'est à partir de la 7^e^ année que les termes *rapport* et *proportion*, ainsi que les notations qui s'y rattachent, sont présentés aux élèves. Lorsqu'il y a une égalité entre deux rapports, il s'agit d'une proportion; par exemple :

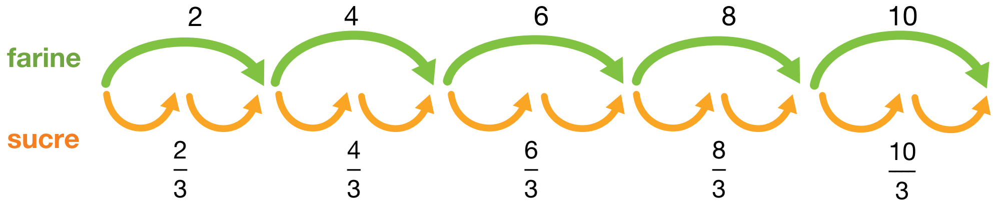
$$2 : 3 = 10 : 15 \text{ ou } \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

La relation de proportionnalité est développée chez les élèves bien avant le cycle intermédiaire. Aux cycles primaire et moyen, les élèves utilisent intuitivement le raisonnement proportionnel pour résoudre des problèmes comprenant deux quantités qui sont dans un rapport de un à plusieurs (p. ex., un gâteau pour huit enfants), de plusieurs à un (p. ex., trois personnes par table) ou de plusieurs à plusieurs (p. ex., deux litres de jus pour cinq personnes).

Exemple d’un problème dans lequel le raisonnement proportionnel est utilisé au cycle moyen

Dans la recette de gâteau, il y a $\frac{2}{3}$ *de tasse de sucre et 2 tasses de farine. Quelle quantité de farine M*^{me} *Larose doit-elle ajouter au mélange si elle y a incorporé* $3\frac{1}{3}$ *tasses de sucre?*

Représenter les quantités qui varient à l’aide d’un diagramme, aide les élèves à analyser les relations de proportionnalité.



Ce type de représentation montre que la quantité d’ingrédients de la recette est quintuplée si $3\frac{1}{3}$ tasses de sucre sont utilisées. Transposée dans un tableau, la représentation s’apparente à une représentation familière pour les élèves, soit la table de valeurs, qui a l’avantage de les aider à vérifier la présence d’une relation multiplicative entre les quantités.

Quantité de farine (tasses)	2	4	6	8	10
Quantité de sucre (tasses)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$

C’est à partir de la 9^e année que la terminologie *fonction affine* est abordée pour décrire une relation de proportionnalité. Les élèves de 9^e année devraient donc faire référence à une relation de proportionnalité comme étant une **fonction affine à variation directe**. Sa représentation graphique est une droite qui passe par l’origine (0, 0) et son équation a la forme $y = ax$. Dans une situation où la variation est directe, les élèves se rendent compte que connaître la relation entre deux quantités liées les aide à déterminer une autre quantité en partant d’un raisonnement multiplicatif.

En **géométrie analytique**, l’élève reconnaîtra la droite à l’aide de l’équation $y = mx$, où m représente la pente, et l’absence du b indique que l’ordonnée à l’origine est 0.

Soit la situation de variation directe suivante :

Exemple

Un aquarium, vide au départ, se remplit à raison de 2 litres d'eau par minute. Représente, de plusieurs façons, le nombre de litres d'eau dans l'aquarium en fonction du temps, en minutes.

Représentation symbolique (règle en équation)

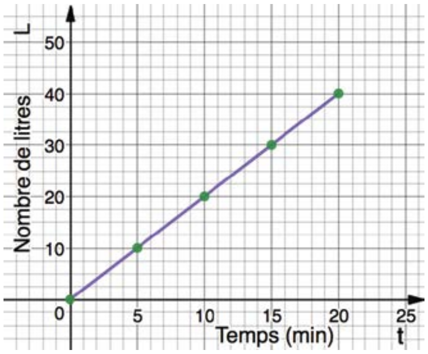
$L = 2t$, où L représente le nombre de litres et t, le temps, en minutes.

Représentation visuelle (table de valeurs)

Temps, *t* (min)	0	5	10	15	20
Nombre de litres, *L*	0	10	20	30	40

Représentation graphique

Nombre de litres en fonction du temps

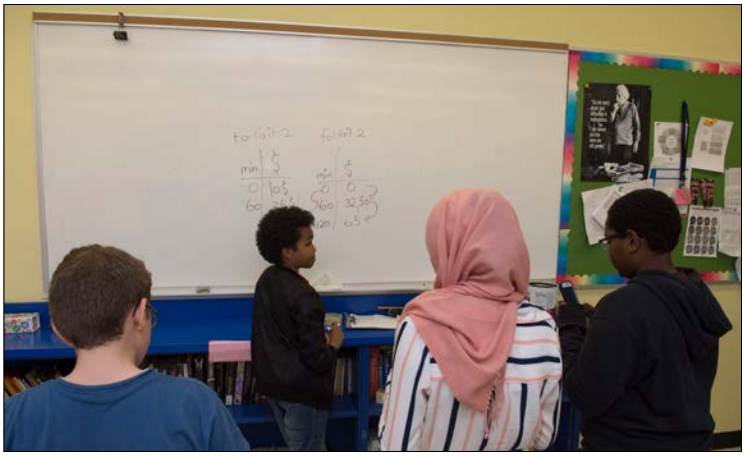


Les situations comportant une relation de proportionnalité peuvent être résolues par extrapolation, par interpolation ou en utilisant intuitivement un raisonnement proportionnel.

Exemple

L'exemple ci-dessous est cité du *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4^e^ à la 6^e^ année*, Modélisation et algèbre (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008a, p. 40).

> La table de valeurs suivante représente la relation entre le nombre d'ananas achetés à l'épicerie et le coût total. On constate que le coût augmente de 3 $ chaque fois qu'on ajoute 2 ananas.
>
> | **Nombre d'ananas, *n*** | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | **Coût, *C* ($)** | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
>
> Pour déterminer, par exemple, le coût de 14 ananas, les élèves peuvent prolonger la table de valeurs jusqu'à 14 et déterminer que le coût sera de 21 $. Ils font alors appel à l'extrapolation.
>
> Ils peuvent aussi utiliser un raisonnement proportionnel : « Chaque groupe de 2 ananas coûte 3 $. Pour 14 ananas, il faut 7 groupes de 2 ananas. On calcule donc 7 × 3 $ et on obtient un coût de 21 $. »
>
> Pour déterminer, par exemple, le coût de 5 ananas, les élèves peuvent noter que même si on ne retrouve pas 5 ananas dans la table de valeurs, le coût doit se situer à mi-chemin entre le coût de 4 ananas et celui de 6 ananas. Donc, 5 ananas coûtent 7,50 $. Ils font alors appel à l'interpolation.
>
> Ils peuvent aussi utiliser un raisonnement proportionnel comme suit : « Puisque 2 ananas coûtent 3 $, un ananas coûte 1,50 $. Donc, 5 ananas coûtent 5 × 1,50 $, soit 7,50 $ ».



LES RELATIONS DE PROPORTIONNALITÉ PARTIELLE

Parfois, deux quantités n'augmentent pas ou ne diminuent pas simultanément selon le même facteur. Il n'y a donc pas une relation de proportionnalité directe. Seule une partie de la relation entre les quantités est proportionnelle. Ce genre de relation est appelé *relation de proportionnalité partielle*. La relation de proportionnalité partielle est aussi développée, chez les élèves, bien avant le cycle intermédiaire. Aux cycles primaire et moyen, par exemple, les élèves déterminent le coût de cinq biscuits si le premier biscuit coûte 0,05 $ et les autres coûtent 0,03 $, ou le coût d'une sortie scolaire si le prix de location de l'autobus est de 325 $ et que chaque élève paie 6,50 $ pour un billet de spectacles.

Dès la 9^{e} année, les élèves devraient faire référence à la relation de proportionnalité partielle comme étant une **fonction affine à variation partielle**. Sa représentation graphique est aussi une droite, mais celle-ci ne passe pas par l'origine (0, 0) et son équation a la forme $y = ax + b$, où $b \neq 0$. Les situations de fonction affine à variation partielle peuvent être représentées par une table de valeurs ou un graphique.

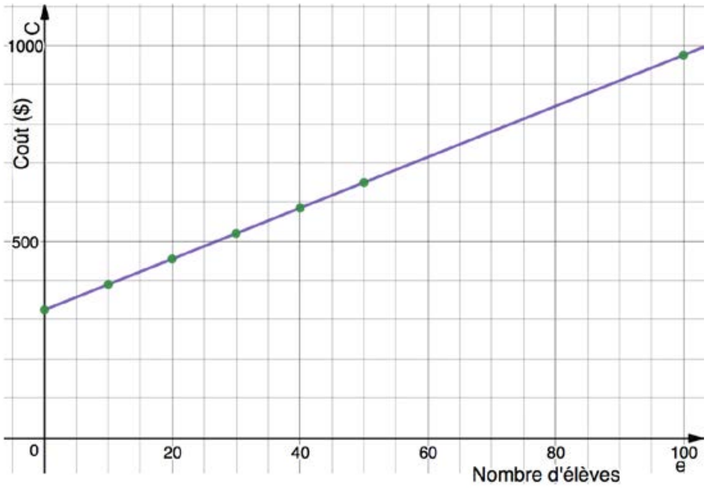
En **géométrie analytique**, l'élève reconnaîtra la droite à l'aide de l'équation $y = mx + b$, où m représente la pente et b, l'ordonnée à l'origine.

Exemple 1

Dans une situation où la variation est partielle, comme le problème dans lequel le coût d'une sortie scolaire est déterminé à l'aide de l'équation $C = 6{,}50e + b$, où C représente le coût de la sortie, e, le nombre d'élèves et b, le coût de location de l'autobus, les élèves comprennent qu'elles et ils utilisent un raisonnement multiplicatif pour déterminer la valeur de $6{,}50e$. De fait, il existe une proportion entre le nombre d'élèves et le coût des billets de spectacles. Elles et ils comprennent aussi que la valeur de C n'est pas proportionnelle à $6{,}50e$. La valeur de la constante b qui, dans ce cas est 325 $, est ajoutée à $6{,}50e$.

Coût, *C* ($)	Nombre d'élèves, *e*
0	325
10	390
20	455
30	520
40	585
50	650
100	975

Coût en fonction du nombre d'élèves



Note : Il est à noter qu'uniquement les points représentent cette situation et que la droite est tracée pour étudier les tendances de la relation.

Exemple 2

Marc achète un paquet de 200 feuilles mobiles au début de l'année scolaire. Il utilise en moyenne 4 feuilles mobiles par jour d'école. On s'intéresse au nombre de feuilles mobiles qui lui reste dans son paquet selon le nombre de jours d'école écoulés.

(Alloprof, [s., d.])

La variation partielle est représentée à l'aide de la règle $f = -4j + 200$, où j est le nombre de jours d'école écoulés et f, le nombre de feuilles mobiles dans le paquet.

Nombre de jours d'école écoulés, *j*	Nombre de feuilles mobiles dans le paquet, *f*
0	200
2	192
5	180
10	160
15	140
18	128
25	100
30	80
40	40
50	0

Nombre de feuilles mobiles dans le paquet selon le nombre de jours d'école écoulés

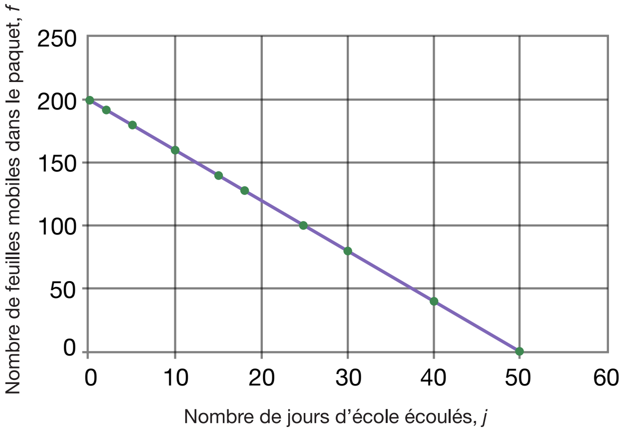


Table de valeurs et graphique : Alloprof

LE DÉVELOPPEMENT DES CONCEPTS DE RELATIONS ET DE FONCTIONS AFFINES

Les recherches récentes de D^{re} Ruth Beatty et de D^{re} Catherine Bruce jettent un nouveau regard sur l'enseignement et l'apprentissage de certains concepts algébriques. À la suite de leurs recherches, elles ont créé deux activités ayant comme but d'amorcer le développement des concepts de relations et de fonctions affines à variation directe et à variation partielle. La première activité se nomme **La règle secrète** et la seconde, **La construction de suites à motif croissant (à l'aide de carreaux et de cartes pour déterminer le rang d'une figure**). Inspirées de leur document *From Patterns to Algebra* (2012a), les activités ci-dessous favorisent l'établissement de liens en utilisant diverses représentations.

Rappel : Il faut toujours tenir compte qu'une « relation est une correspondance entre deux ensembles d'objets [ou un] ensemble de couples » (Champlain, Mathieu et Tessier, 1999, p. 232); par exemple, un ensemble de variables dépendantes et un ensemble de variables indépendantes.

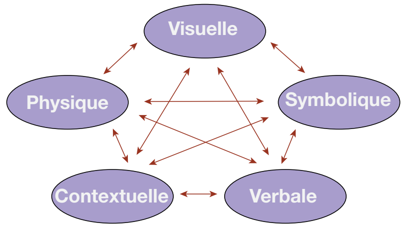
La variable indépendante a une valeur qui lui est attribuée (p. ex., x).

La variable dépendante correspond aux valeurs attribuées à la variable indépendante (p. ex., y).

La construction du concept de la fonction affine à variation directe et de la fonction affine à variation partielle

Première activité : La règle secrète

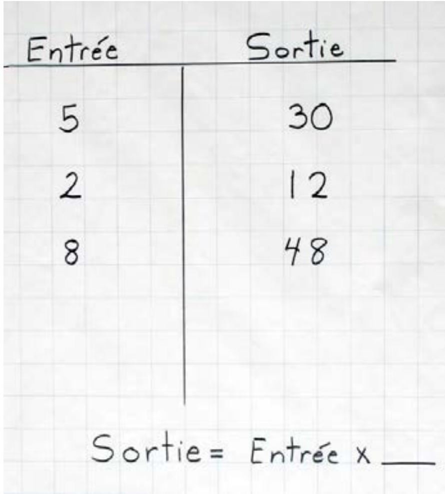
Cette activité favorise la représentation symbolique, la représentation physique (utilisation d'une machine à fonction, d'une machine mystère, d'un robot, etc.) ou la représentation visuelle.



Les élèves suggèrent une valeur d'entrée (x) dans un tableau en T. L'enseignante ou l'enseignant associe à cette valeur d'entrée, une valeur de sortie (y) en y appliquant une règle secrète, soit une fonction affine à variation directe ou une fonction affine à variation partielle. Cette étape est refaite plusieurs fois. Au cycle intermédiaire, la valeur de x peut être un nombre entier positif ou négatif, ou un nombre décimal ou fractionnaire. À la suite de cet exercice, une table de valeurs non ordonnée est créée (voir les photos à la page suivante). Les élèves ne peuvent donc pas simplement observer la colonne **Sortie** pour déduire la régularité. Elles et ils doivent tenir compte des deux ensembles de données pour établir la relation entre les valeurs d'entrée et les valeurs de sortie.

<table>
<tr><th>RELATION DE PROPORTIONNALITÉ
FONCTION AFFINE À VARIATION DIRECTE</th><th>RELATION DE PROPORTIONNALITÉ PARTIELLE
FONCTION AFFINE À VARIATION PARTIELLE</th></tr>
<tr><td>

Règle secrète

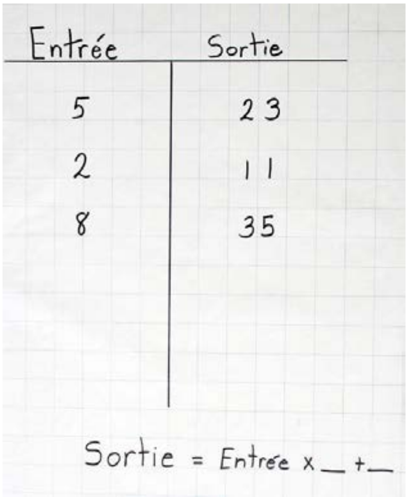


Entrée	Sortie
5	30
2	12
8	48

Sortie = Entrée x ___

</td><td>

Règle secrète



Entrée	Sortie
5	23
2	11
8	35

Sortie = Entrée x __ + __

(Adapté de Beatty et Bruce, 2012b, leçon 1 et leçon 3, p. 6 et 7, et p. 12 et 13.)

</td></tr>
<tr><th>RELATION DE PROPORTIONNALITÉ
FONCTION AFFINE À VARIATION DIRECTE</th><th>RELATION DE PROPORTIONNALITÉ PARTIELLE
FONCTION AFFINE À VARIATION PARTIELLE</th></tr>
<tr><td>

Questionnement

- Quelle opération (action) ou quel changement as-tu effectué à 5 pour obtenir 30?
- As-tu obtenu le nombre de sortie 12 en appliquant le même changement?
- Ce raisonnement s'applique-t-il à 8?
- Quelle est la règle secrète?
- Quelle est la variable indépendante?
- Quelle est la variable dépendante?
- Que pourrait représenter la situation dans un contexte réel?

</td><td>

Questionnement

- Quelle opération (action) ou quel changement as-tu effectué à 5 pour obtenir 23?
- Peut-on obtenir le nombre de sortie en effectuant une seule opération?
- Que remarques-tu au sujet du nombre qui est additionné à chaque nombre d'entrée?
- Quelle est la règle secrète?
- Quelle est la variable indépendante?
- Quelle est la variable dépendante?
- Que pourrait représenter la situation dans un contexte réel?

</td></tr>
</table>

Il importe, en 9^{e} année, que l'élève fasse le lien entre le multiplicateur et le taux de variation, de même qu'entre la constante et la valeur initiale.

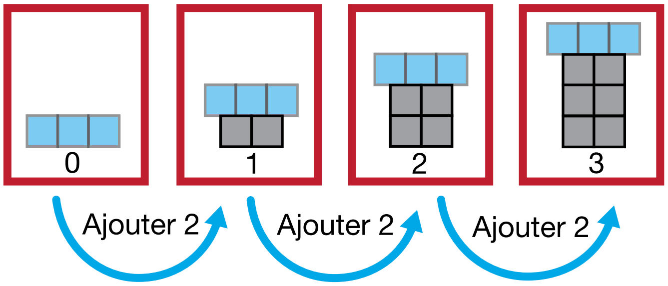
En **géométrie analytique**, il importe que l'élève établisse le lien entre le taux de variation et la pente, ainsi qu'entre la valeur initiale et l'ordonnée à l'origine.

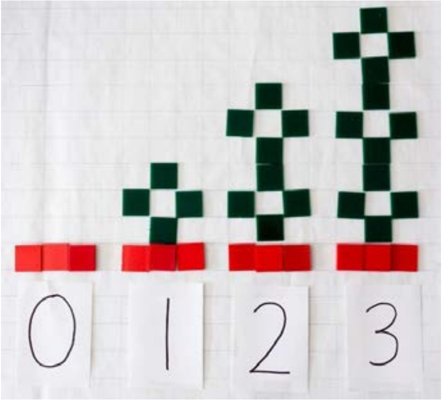
SECONDE ACTIVITÉ : LA CONSTRUCTION DE SUITES À MOTIF CROISSANT (À L'AIDE DE CARREAUX ET DE CARTES POUR DÉTERMINER LE RANG D'UNE FIGURE)

Selon Ruth Beatty (2014) :

> [q]uand on présente les suites à motif croissant aux élèves, l'enseignement tend à privilégier le raisonnement additif [ce qui au départ permet d'observer le changement d'une figure à l'autre]. C'est pourquoi les élèves décrivent souvent le changement par rapport à la figure précédente, comme [l'exemple de] Jean, en disant que la régularité consiste « à commencer par 3 et à ajouter 2 chaque fois ». Ce type de raisonnement fait que les élèves pensent uniquement à ce qui suit. Il ne leur permet pas a) de formuler la structure mathématique de la suite à motif croissant, ou b) de prédire exactement le nombre de carreaux correspondant à une figure dans la suite. Il est donc plus efficace de mettre l'accent sur la relation entre le rang de la figure et le nombre de carreaux. (p. 2)

Exemple de Jean :



RELATION DE PROPORTIONNALITÉ FONCTION AFFINE À VARIATION DIRECTE	RELATION DE PROPORTIONNALITÉ PARTIELLE FONCTION AFFINE À VARIATION PARTIELLE
	

RELATION DE PROPORTIONNALITÉ FONCTION AFFINE À VARIATION DIRECTE	RELATION DE PROPORTIONNALITÉ PARTIELLE FONCTION AFFINE À VARIATION PARTIELLE
Questionnement – Que remarques-tu à la figure 0? – Combien de carreaux observes-tu à la figure 1? – Quelle relation peux-tu établir entre la figure 1 et le nombre de carreaux? – Peux-tu établir cette même relation entre la figure 2 et le nombre de carreaux? – Cette relation se poursuit-elle à la figure 3? – Si cette relation demeure constante, combien de carreaux aurait la 8e figure? – Si la relation reste la même, à quelle figure observerais-tu 72 carreaux? – Quelle est la variable indépendante? – Quelle est la variable dépendante? – Pourrais-tu penser à une situation réelle pour représenter cette relation? – Quelle équation peut représenter cette relation? nombre de carreaux = numéro de la figure × __ $c = \_\_\ n$ c représente le nombre de carreaux et n, le numéro de la figure	**Questionnement** – Que remarques-tu à la figure 0? – Combien de carreaux observes-tu à la figure 1? – Quelle relation peux-tu établir entre la figure 1 et le nombre de carreaux? – Peux-tu établir cette même relation entre la figure 2 et le nombre de carreaux? – Cette relation se poursuit-elle à la figure 3? – Y a-t-il une constante d'une figure à l'autre? Peux-tu la décrire? – Quelle est la variable indépendante? – Quelle est la variable dépendante? – Pourrais-tu penser à une situation réelle pour représenter cette relation? – Si cette relation demeure constante, combien de carreaux aurait la 8^e figure? – Si la relation reste la même, à quelle figure observerais-tu 51 carreaux? – Quelle équation peut représenter cette relation? nombre de carreaux = numéro de la figure × __ + __ $c = \_\_\ n + \_\_$ c représente le nombre de carreaux et n, le numéro de la figure (Adapté de Beatty et Bruce, 2012b, leçon 2 et leçon 4, p. 8 à 11 et p. 14 à 17.)

En **géométrie analytique**, il importe que l'élève établisse le lien entre :

- la règle en mots ou en symboles (nombre de carreaux = numéro de la figure × a ou $c = an$) et l'équation de la droite $y = mx$;
- la règle en mots ou en symboles (nombre de carreaux = numéro de la figure × $a + b$ ou $c = an + b$) et l'équation de la droite $y = mx + b$.

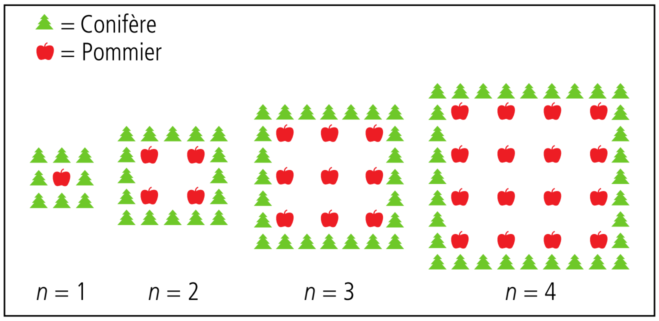
L'élève pourra plus facilement établir ce lien lorsqu'elle ou il représentera l'équation de façon graphique.

L'analyse de suites à motif croissant

Dès le primaire, les élèves sont amenées et amenés à formuler des généralisations en partant d'une suite à motif répété ou d'une suite à motif croissant. En observant une suite d'objets – même plus tard lorsque la suite est transposée dans une table de valeurs – elles et ils décrivent les différences d'une figure à l'autre. C'est la régularité d'une figure à l'autre qui est décrite. Ce genre d'analyse établit une relation récurrente plutôt qu'une relation fonctionnelle. Une relation récurrente développe chez les élèves une pensée récursive qui « […] met en évidence les changements à l'intérieur d'un ensemble de nombres […], mais non pas la relation entre […] deux ensembles de nombres […] » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 11). Ce type de pensée est appliqué notamment en 9e année, lorsque les élèves déterminent les premières différences à partir des changements de valeurs de la variable dépendante. En 10e année, les élèves déterminent les deuxièmes différences au moment de l'exploration des fonctions du second degré (voir **Les fonctions du second degré** à la page 84).

Exemple

En partant de la suite à motif croissant ci-dessous, les élèves construisent une table de valeurs pour représenter la relation entre le numéro de la figure, *n*, et le nombre de conifères, *c*.



(Adapté du Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA).
© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2013)

Numéro de la figure, *n*	Nombre de conifères, *c*	Première différence
1	8	8
2	16	8
3	24	8
4	32	8
5	40	8
6	48	8
7	56	8
8	64	

(Adapté © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2013.)

La table de valeurs ci-contre représente une fonction affine à variation directe ($c = n \times 8$, où c = le nombre de conifères et n = le numéro de la figure). Les élèves trouvent uniquement les différences entre les valeurs de la variable dépendante (nombre de conifères). Ces différences correspondent à la régularité que décrirait une ou un élève du cycle moyen ou au taux de variation (a dans la forme $y = ax$).

Établir une relation récurrente ne contribue pas à développer la pensée fonctionnelle. Toutefois, l'analyse de suites à motif croissant est un contexte permettant de constater que, lorsque les nombres d'un ensemble changent, ceux de l'autre ensemble varient d'une façon prévisible pouvant être décrite à l'aide de mots et même sous la forme d'une équation.

Dans l'exemple ci-dessous, les élèves doivent déterminer le nombre de points de la figure 4, de la figure 10 et de toutes les autres figures faisant partie de la suite. Cet exemple présente des descriptions qu'ont proposées les élèves et que l'enseignante ou l'enseignant a écrites sous la forme d'équations.

Exemple

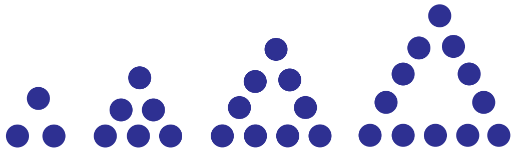
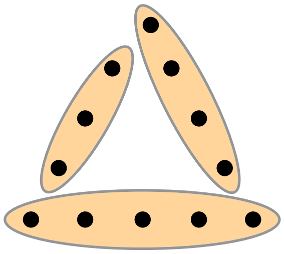
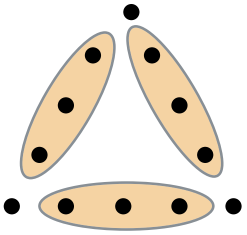
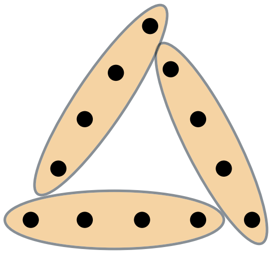
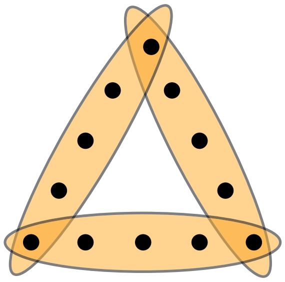


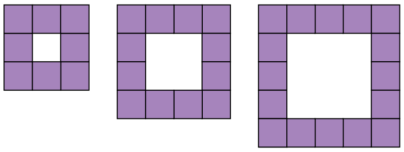
Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

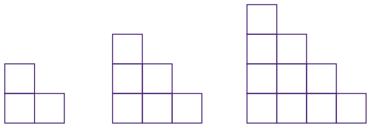
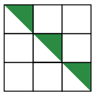
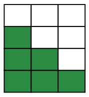
REPRÉSENTATION VISUELLE DE L'ÉLÈVE	CE QU'ONT PROPOSÉ LES ÉLÈVES.	CE QU'A ÉCRIT L'ENSEIGNANTE OU L'ENSEIGNANT.
	À la figure 4, je vois 5 points au bas, 4 points à droite et 3 points à gauche. Je sais que 5 + 4 + 3, c'est égal à 12; il y a donc 12 points dans la figure 4. Comme cette régularité s'applique aux autres figures, je sais qu'à la 10^{e} figure, il y aura 11 + 10 + 9 points. Il y a toujours un côté qui est équivalent au numéro de la figure, un côté qui a un point de moins que le numéro de la figure et un côté qui a un point de plus que le numéro de la figure. Les élèves généralisent et déterminent que l'équation est $p = (n + 1) + n + (n - 1)$, où p représente le nombre de points et n, le numéro de la figure.	Figure **4** : $p = 5 + 4 + 3$ Figure **3** : $p = 4 + 3 + 2$ Figure **2** : $p = 3 + 2 + 1$ Figure **10** : $p = 11 + 10 + 9$

REPRÉSENTATION VISUELLE DE L'ÉLÈVE	CE QU'ONT PROPOSÉ LES ÉLÈVES.	CE QU'A ÉCRIT L'ENSEIGNANTE OU L'ENSEIGNANT.
	Toutes les figures représentent des triangles. C'est la longueur des côtés qui change. À la figure 4, il y a 3 points sur chaque côté du triangle et il y a 3 points aux sommets. À la figure 10, il y aura 9 points sur chaque côté du triangle et 3 points aux sommets. À la figure 100, il y en aura $3 \cdot 99 + 3$. Les élèves généralisent et déterminent que l'équation est $p = 3 \times (n - 1) + 3$, où p représente le nombre de points et n, le numéro de la figure.	Pour la suite, à partir de la figure 2 : Figure **2** : $p = 3 \times 1 + 3$ Figure **3** : $p = 3 \times 2 + 3$ Figure **4** : $p = 3 \times 3 + 3$ Figure **10** : $p = 3 \times 9 + 3$ Figure **100** : $p = 3 \times 99 + 3$
	À la figure 4, le triangle a trois côtés composés de 4 points. À la figure 3, le triangle a trois côtés composés de 3 points. À la figure 10, le triangle aura trois côtés composés de 10 points et à la figure 100, le triangle aura trois côtés composés de 100 points. Les élèves généralisent et déterminent que l'équation est $p = 3 \times n$, où p représente le nombre de points et n, le numéro de la figure.	Pour la suite, à partir de la figure 2 : Figure **2** : $p = 3 \times 2$ Figure **3** : $p = 3 \times 3$ Figure **4** : $p = 3 \times 4$ Figure **10** : $p = 3 \times 10$ Figure **100** : $p = 3 \times 100$
	Toutes les figures sont des triangles équilatéraux. La 4^e figure a trois côtés composés de 5 points, soit 1 point de plus que le numéro de la figure. Cependant, en comptant chaque côté, on compte chaque sommet deux fois. Il faut donc enlever 3 points à chaque triangle. Les élèves généralisent et déterminent que l'équation est $p = 3 \times (n + 1) - 3$, où p représente le nombre de points et n, le numéro de la figure.	Pour la suite, à partir de la figure 2 : Figure **2** : $p = 3 \times 3 - 3$ Figure **3** : $p = 3 \times 4 - 3$ Figure **4** : $p = 3 \times 5 - 3$ Figure ***n*** : $p = 3 \times (n + 1) - 3$

De la 7^{e} à la 10^{e} année, une très grande partie du programme-cadre de mathématiques de l'Ontario est dédiée à la modélisation de situations ayant une équation de la forme $y = ax + b$. Toutefois, il arrive que les élèves modélisent une situation d'une façon que n'avait pas prévue l'enseignante ou l'enseignant, comme le montre les exemples ci-dessous. Une ou un élève de 7^{e} année pourrait utiliser un concept qui lui est familier et déterminer une équation qui semble dépasser les attentes du programme-cadre, mais avec laquelle elle ou il est à l'aise.

Les suites à motif croissant présentées aux élèves, en salle de classe, devraient varier en fonction de l'expérience que celles-ci et ceux-ci acquièrent dans ce type d'analyse. En fait, il est souhaitable que les apprenantes et apprenants soient exposés à diverses suites pour comprendre que tous les modèles algébriques n'ont pas la forme $y = ax + b$.

SUITE	GÉNÉRALISATION POSSIBLE
 Figure 1 Figure 2 Figure 3 © 2017 visualpatterns.org *c* représente le nombre total de carreaux mauves et correspond à la variable dépendante *n* représente le numéro de la figure et correspond à la variable indépendante	Figure 1 : $c = 3^2 - 1^2 = 8$ carreaux Figure 2 : $c = 4^2 - 2^2 = 12$ carreaux Figure 3 : $c = 5^2 - 3^2 = 16$ carreaux Selon l'élève, l'équation est $c = (n + 2)^2 - n^2$. **Concepts qu'utilise l'élève** L'élève voit que les carreaux forment un cadre autour d'un carré. Elle ou il utilise le concept d'aire de figures ombrées. Elle ou il connaît la notation pour les carrés parfaits.

SUITE	GÉNÉRALISATION POSSIBLE
 Figure 2 Figure 3 Figure 4 © 2017 visualpatterns.org *c* représente le nombre de carreaux *n* représente le numéro de la figure	Figure 3 : $c = 1 + 2 + 3 = 6$ carreaux Selon l'élève, l'équation peut être :  $c = \frac{n \times n}{2} + \frac{n}{2}$ $c = \frac{n \times (n + 1)}{2}$  **Concepts qu'utilise l'élève** L'élève perçoit la suite comme un ensemble de triangles rectangles. Elle ou il utilise le concept d'aire d'un triangle, soit l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un rectangle, puis s'en sert de deux façons pour généraliser son équation.

Les représentations abstraites

Selon Beatty et Bruce (2012a), une fois que les élèves ont réalisé les activités **Règle secrète** et **Construction de suites à motif croissant (à l'aide de carreaux et de cartes pour déterminer le rang d'une figure)**, il est important qu'elles et ils poursuivent la séquence d'activités afin d'être en mesure de construire leur propre compréhension des concepts de relations et de fonctions. Les activités ci-après incitent les élèves à créer des représentations graphiques et à explorer des relations en contexte (histoires, expériences, etc.) tout en associant les représentations les unes aux autres (Beatty et Bruce, *Patterns to Algebra Book*, 1E. © 2012a, p. 10 à 12, traduction libre. Reproduit avec la permission de Nelson Education Ltd. www.cengage.com/permissions). Les collectes de données faites lors d'expériences réalisées en salle de classe, favorisent la compréhension de diverses relations et de leurs représentations.

LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

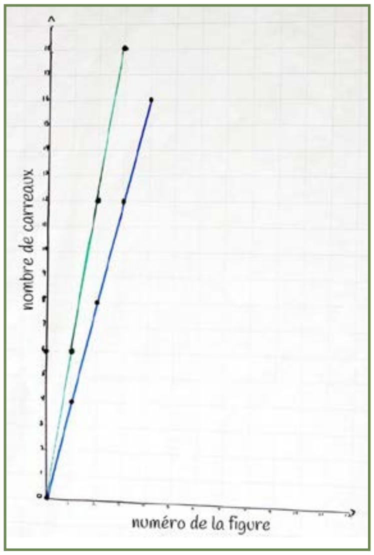
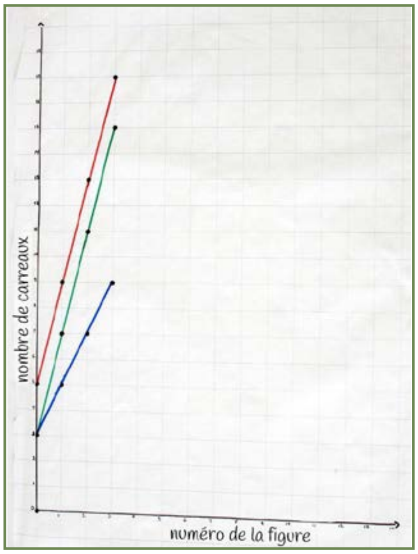
Selon Beatty (2014) :

> Chez les élèves plus âgés, les suites à motif croissant peuvent servir d'introduction aux représentations graphiques des fonctions. Le rang des figures dans les suites à motif croissant correspond aux valeurs sur l'axe horizontal. Le nombre total de carreaux de chaque figure est représenté par les valeurs sur l'axe vertical. L'axe vertical représente aussi le nombre de carreaux qu'il y aura au rang 0 (la valeur de la constante), qui est l'ordonnée de la représentation graphique. (p. 3)

Dans le cas de relations de proportionnalité, il importe de faire ressortir que, puisqu'il n'y a pas de constante, toutes les fonctions affines passent par l'origine.

C'est en créant la représentation graphique que l'élève visualise le taux de variation.

L'élève établit le lien entre la pente et l'ordonnée à l'origine, concepts abordés en **géométrie analytique**, de façon plus visuelle, à l'aide de la représentation graphique. Elle ou il voit que la pente aide à décrire l'inclinaison de la droite et que l'ordonnée à l'origine est le point d'intersection de la droite et de l'axe vertical.

RELATION DE PROPORTIONNALITÉ FONCTION AFFINE À VARIATION DIRECTE	RELATION DE PROPORTIONNALITÉ PARTIELLE FONCTION AFFINE À VARIATION PARTIELLE
 *c* représente le nombre de carreaux *n* représente le numéro de la figure La droite correspondante à la fonction $c = 6n$, est en vert. La droite en bleu représente une droite ayant un taux de variation différent de la droite en vert, mais qui passe par l'origine.	 *c* représente le nombre de carreaux *n* représente le numéro de la figure La droite correspondante à la fonction $c = 4n + 3$, est en vert. La droite en bleu représente une droite ayant un taux de variation différent de la droite en vert, mais dont la constante ou l'ordonnée à l'origine est la même que la droite en vert. La droite en rouge représente une droite ayant le même taux de variation que la droite en vert, mais dont la constante ou l'ordonnée à l'origine est différente.

Note : Il est à noter qu'uniquement les points représentent la situation. La droite est tracée pour étudier les tendances de la relation.

La représentation graphique de suites à motif croissant peut servir à poser des questions :

- Quelles droites représentent des fonctions affines à variation directe? à variation partielle? Comment le sais-tu? (*Les droites passent par l'origine, elles coupent l'axe vertical à un point autre que l'origine.*)
- Quelles ressemblances ou différences observes-tu entre les droites représentant des fonctions affines à variation directe? (*aucune constante, divers taux de variation – pente*) à variation partielle? (*divers taux de variation, mais même constante (ordonnée); même taux de variation, mais diverses constantes (ordonnées)*)
- Pourquoi deux droites sont-elles parallèles? (*Elles ont le même taux de variation.*) (*Elles ont la même pente.*)
- Pourquoi deux droites ont-elles un point d'intersection sur l'axe des *y*? (*Elles ont la même constante ou la même valeur initiale.*) (*Elles ont la même ordonnée à l'origine.*)

En **géométrie analytique**, l'élève pourra tracer la droite d'équation $y = 4x + 3$, à l'aide d'outils technologiques ou sans ces outils, d'après ses caractéristiques (p. ex., pente et ordonnée à l'origine, coordonnées à l'origine). Par la suite, elle ou il pourra observer les deux autres droites et calculer leur pente en partant de leur représentation graphique (p. ex., la droite rouge est parallèle à la droite verte, elle a donc la même pente) ou de deux de leurs points ($m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$). Elle ou il sera aussi en mesure de déterminer les coordonnées à l'origine des trois droites d'après leur représentation graphique respective dans un plan cartésien et d'après leur équation.

La représentation graphique, en **géométrie analytique**, aide l'élève à déterminer :

- les coordonnées à l'origine;
- si une droite est horizontale ou verticale, ou si elle monte ou descend d'après sa pente;
- l'équation d'une droite d'après certaines de ses caractéristiques (p. ex., pente et un point, deux points, graphique dans un plan cartésien);
- les caractéristiques d'une famille de droites ayant la même pente ou la même ordonnée à l'origine;
- l'équation d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée;
- si deux droites sont parallèles, sécantes ou perpendiculaires selon leur pente.

La représentation graphique est aussi un moyen d'analyser les deux paramètres de l'équation de la fonction affine $y = ax + b$ ainsi que les paramètres de la droite $y = mx + b$.

En observant les représentations graphiques, notamment à l'aide de la technologie, les élèves peuvent découvrir les principes ci-dessous relatifs à ces paramètres :

- ▶ Le paramètre *a* correspond au taux de variation.
  - Si le paramètre *a* est positif, la droite est croissante.
  - Si le paramètre *a* est négatif, la droite est décroissante.
  - Si le paramètre *a* est nul, la droite est horizontale.
- ▶ Le paramètre *b* correspond à la valeur initiale ou à la constante.

En **géométrie analytique**, ce qui s'applique au paramètre *a*, s'applique au paramètre *m* de la forme fonctionnelle de la droite $y = mx + b$. L'élève parle plutôt de pente que d'inclinaison.

En **géométrie analytique**, l'élève parle plutôt d'ordonnée que de valeur initiale ou de constante pour le paramètre *b*.

En **géométrie analytique**, en plus de la forme fonctionnelle de la droite $y = mx + b$, l'élève doit aussi reconnaître les autres formes usuelles d'une équation de droite, soit $x = a$, $y = b$ et la forme générale $Ax + By + C = 0$.

En observant les représentations graphiques, notamment à l'aide de la technologie, l'élève peut découvrir que la droite, dont l'équation est $y = b$, est une droite horizontale et que la droite, dont l'équation est $x = a$, est une droite verticale.

Dans le cas de la forme générale de la droite $Ax + By + C = 0$:

- l'équation est toujours égale à 0;
- A et B ne doivent pas égaler 0 en même temps et doivent être des nombres entiers;
- A doit être positif;
- $\frac{-A}{B}$ permet de trouver la pente;
- $\frac{-C}{B}$ permet de trouver l'ordonnée à l'origine.

LES RELATIONS EN CONTEXTE

L'exploration des fonctions affines à variation directe se fait en partant de situations comportant deux ensembles de données obtenues à l'aide d'un taux de variation. Toutefois, l'exploration des fonctions affines à variation partielle se fait en partant de situations comprenant deux ensembles de données obtenues à l'aide d'un taux de variation et d'une constante. Les problèmes peuvent être basés sur des situations réelles ou des expériences comportant une collecte de données, ou peuvent être des problèmes de généralisation en partant de suites à motif croissant, qui offrent la possibilité de leur associer une histoire et de généraliser (voir **L'analyse de suites à motif croissant** à la page 58).

<table>
<tr><th>FONCTION AFFINE À VARIATION DIRECTE</th><th>FONCTION AFFINE À VARIATION PARTIELLE</th></tr>
<tr><td>

Relation entre le temps et la distance que parcourt un élève qui se rend à l'école en marchant

Temps, t (min)	Distance, d (m)	Taux de variation
0	0	L'élève marche à un taux de 80 mètres par minute.
1	80	
2	160	
3	240	
4	320	
5	400	

</td><td>

Relation entre le nombre de tables et le nombre de personnes

« Le responsable qui doit placer les tables lors d'une rencontre de famille dispose seulement de tables trapézoïdales (en forme de trapèze) pouvant asseoir 5 personnes. » (p. 1)

- « Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut asseoir si l'on dispose de seulement 25 tables trapézoïdales placées les unes contre les autres? » (p. 5)
- « Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut asseoir si la salle ne peut accommoder que 97 tables trapézoïdales? » (p. 5)
- « On a 242 invités pour une réception. Il faut combien de tables trapézoïdales pour les asseoir? » (p. 5)

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario et TFO, 2007, p. 1 et 5)

</td></tr>
</table>

LES EXPÉRIENCES ET LA COLLECTE DE DONNÉES

Les expériences menées en salle classe aident les élèves à déterminer l'existence ou l'inexistence d'une relation fonctionnelle. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'étudier un phénomène en partant d'une expérience, la relation entre les quantités n'est pas toujours aussi bien définie. En 7e et en 8e année, il est donc préférable de mener des expériences dont les données sont constantes (p. ex., la hauteur d'une pile d'objets selon le nombre d'objets qui la composent) ou d'étudier des phénomènes dont le contexte se prête bien au calcul d'une moyenne.

C'est en 9e année seulement que les élèves traitent des données provenant d'une expérience pouvant être transposée dans un graphique ressemblant à un nuage de points. Elles et ils apprennent à tracer la droite la mieux ajustée et à se servir de deux points sur la droite pour déterminer le taux de variation. L'analyse de ce type de représentation visuelle suggère parfois une tendance qu'il est possible d'associer à une fonction, ce qui permet de modéliser le phénomène à l'aide d'une équation. Les élèves de 9e année devraient aussi être en mesure de déterminer si le nuage de points peut être modélisé à l'aide d'une fonction affine dont la représentation graphique est une droite.

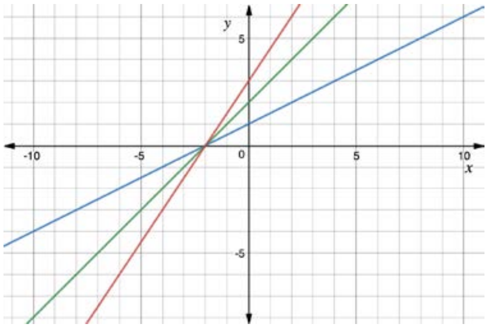
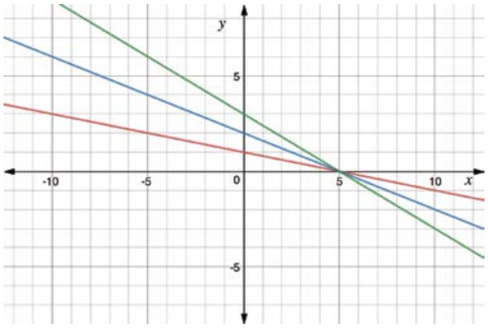
Expériences

EXPÉRIENCE DESTINÉE AUX ÉLÈVES EN 7E OU EN 8E ANNÉE	EXPÉRIENCE DESTINÉE AUX ÉLÈVES EN 9E ANNÉE
Relation entre la hauteur de la pile de chaises et le nombre de chaises  Les données recueillies, au moment de l'expérience, seront constantes. En effet, la hauteur et la largeur de la pile de chaises augmentent toujours de la même façon à l'ajout d'une chaise. **(suite à la page suivante)**	**Relation entre le nombre de caractères tapés et le temps**  Tante Aline Tante Aline, j'ai besoin de la calculatrice. Comment dois-je faire pour l'utiliser? Sélectionne l'application Calculatrice. C'est laquelle? Celle avec un gros poisson qui compte ses écailles. ??? Poisson d'avril! Les données recueillies servent à déterminer le taux de caractères que tape chaque participante ou participant par seconde. **(suite à la page suivante)**

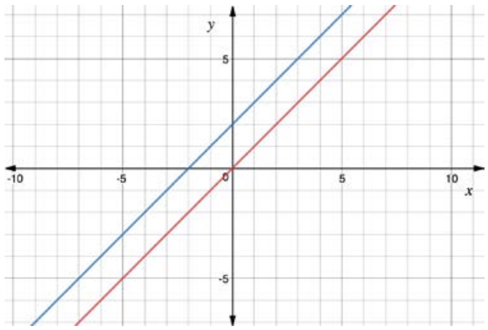
Expériences (suite)

EXPÉRIENCE DESTINÉE AUX ÉLÈVES EN 7E OU EN 8E ANNÉE	EXPÉRIENCE DESTINÉE AUX ÉLÈVES EN 9E ANNÉE
Les élèves pourraient obtenir des données erronées si elles et ils manipulent mal l'instrument de mesure. Cette situation se modélise algébriquement à l'aide d'une équation sous la forme $y = ax + b$, où b représente la hauteur de la première chaise avant l'empilement des autres chaises. **L'équation qu'ont déterminée les élèves pourrait servir à résoudre le problème suivant :** Prédire la distance, à partir du mur, où devrait être placée la pile de chaises pour qu'elle touche le plafond et le mur en même temps.	Les élèves devront planifier la collecte de données (p. ex. déterminer la nécessité de prendre plusieurs données, expliquer les raisons qui justifient le calcul d'une moyenne). Cette situation se modélise algébriquement, à l'aide d'une équation sous la forme $y = ax$, car au temps zéro, aucun caractère n'est tapé. **L'équation qu'ont déterminée les élèves pourrait servir à résoudre le problème suivant :** Prédire le temps que durera la compétition de vitesse de frappe et le nombre de caractères tapés de manière à créer une compétition excitante de la texteuse ou du texteur la ou le plus rapide, entre deux élèves ayant des vitesses de frappe très différentes. Au moment de la compétition, elles et ils doivent écrire le plus rapidement possible. Le problème peut aussi se modéliser selon une équation de la forme $y = ax + b$, car une autre possibilité serait que la texteuse ou le texteur le plus lent ait une avance de temps quelconque pour rendre la compétition plus excitante.

Problèmes portant sur la droite

COMPARONS DES DROITES!	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
Demander aux élèves de tracer le graphique de trois droites de la forme $y = 0,5mx + m$. Leur demander d'échanger au sujet de leurs étapes de travail et, par la suite, d'observer les droites tracées. Poser aux élèves les questions suivantes : – Ces droites peuvent-elles passer par le quatrième quadrant? – Pourquoi les trois droites se coupent-elles au même point? Comment pourrais-tu le prouver? – Est-ce que toutes les droites de cette forme passeraient par ce point d'intersection? Comment pourrais-tu le prouver?	 Si $m = 1$, $y = 0,5x + 1$ Si $m = 2$, $y = x + 2$ Si $m = 3$, $y = 1,5x + 3$
– Comment changerais-tu l'équation pour avoir un point d'intersection au point (5, 0)?	Pour obtenir un point d'intersection (5, 0), je dois déterminer les équations pour lesquelles $y = 0$ et $x = 5$ pour toutes les valeurs de m. Si $m = 1$, $0 = k(1)(5) + 1$ et si $m = 2$, $0 = k(2)(5) + 2$. Alors, $5k + 1 = 10k + 2$ $-5k = 1$ $k = \frac{1}{-5}$ ou $k = -0,2$. Je vérifie à l'aide des représentations graphiques. Si $m = 1$, $y = -0,2x + 1$ Si $m = 2$, $y = -0,4x + 2$ Si $m = 3$, $y = -0,6x + 3$
– Si l'équation des droites était de la forme $y = kmx + m$, $k \neq 0,5$, $k \neq -0,2$, les droites se couperaient-elles en un point? Si oui, lequel? (Adapté de Small, 2018, traduction libre.)	

<table>
<tr>
<th>RÉFLEXION DE LA DROITE PAR RAPPORT À LA DROITE Y = X</th>
<th>TRAVAIL DE L'ÉLÈVE</th>
</tr>
<tr>
<td>



Présenter aux élèves le diagramme ci-dessus.

Poser aux élèves la question suivante :

Quelle serait l'équation de la réflexion de la droite en bleu par rapport à la droite $y = x$ (droite en rouge)?

</td>
<td>

Je détermine que les images des points (–2, 0) et (5, 7) sont (2, 0) et (–5, –7).

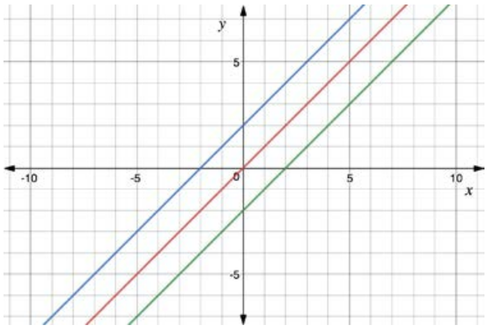
Je détermine l'équation de la droite en utilisant les images des deux points.

Je sais que la pente sera la même que celle de l'équation $y = x$, car la droite est parallèle à $y = x$.

L'équation sera donc $y = x + b$. Pour déterminer la valeur de b, je remplace y par –7 et x par –5, les coordonnées d'un des deux points trouvés.

Si $-7 = -5 + b$, alors $b = -2$.

L'équation en vert est donc $y = x - 2$. Je vérifie ma réponse à l'aide de la représentation graphique.



Je détermine l'équation de la droite en bleu à l'aide de sa pente et de l'ordonnée à l'origine. La pente est 1, soit la même que $y = x$, puisque les deux droites sont parallèles. L'ordonnée est (0, 2), l'équation est donc $y = x + 2$.

</td>
</tr>
</table>

Les situations d'apprentissage ainsi que les problèmes devraient proposer des représentations variées d'une fonction. L'enseignante ou l'enseignant doit permettre aux élèves d'utiliser n'importe quelle représentation d'une fonction (suite à motif croissant, situation de la vie courante, histoire en contexte, expérience, collecte de données, table de valeurs ou représentation graphique) afin que celles-ci et ceux-ci soient en mesure d'établir des liens entre les représentations et de les associer les unes aux autres.

Points d'intersection

Selon le programme-cadre de 10^e année, les élèves doivent modéliser et résoudre des problèmes portant sur l'intersection de droites. Les problèmes abordés, dans cette section-ci, amèneront les élèves à déterminer et à interpréter la solution d'un système d'équations de façon graphique et à l'aide de la méthode algébrique la plus appropriée.

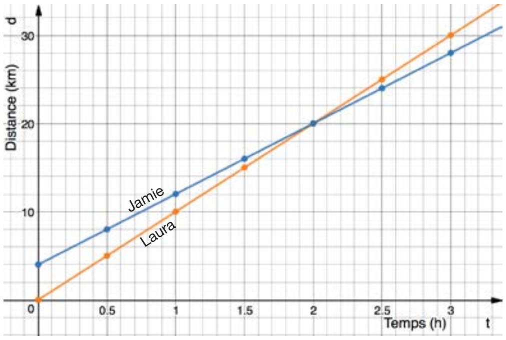
Exemple 1

UN, DEUX, TROIS, PARTEZ!	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
Présenter aux élèves le problème suivant. *Deux coureurs, Jamie et Laura, ne partent pas en même temps, mais effectuent le même parcours. Jamie part le premier et court à une vitesse de 8 km/h. Après 30 min, Laura part et court à une vitesse de 10 km/h.* Poser aux élèves les questions suivantes : Laura rejoindra-t-elle Jamie? Explique ton raisonnement. Pour t'aider, utilise une table de valeurs et la représentation graphique de la relation entre la distance qu'ont parcourue en kilomètres les deux coureurs et le temps en heures. Demander aux élèves d'échanger au sujet de leurs étapes de travail.	Je pense que tout dépend de la distance qu'ils parcourront. Je peux faire une table de valeurs pour m'aider. Jamie est parti le premier et a couru pendant 30 min avant que Laura ne parte. Alors, au temps 0 h pour Laura, Jamie a donc une avance de 4 km.

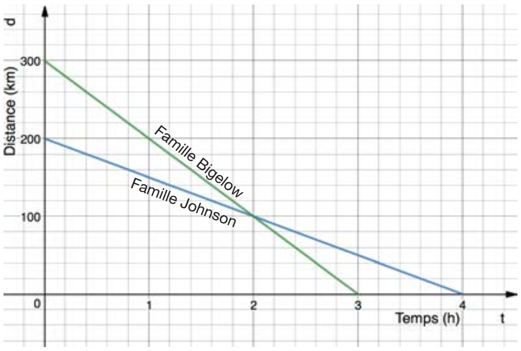
	Laura	**Jamie**
Temps, *t* (h)	**Distance, *d* (km)**	**Distance, *d* (km)**
0	0	4
0,5	5	8
1	10	12
1,5	15	16
2	20	20
2,5	25	24
3	30	28

(suite à la page suivante)

Exemple 1 (suite)

UN, DEUX, TROIS, PARTEZ!	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
	Je vérifie à l'aide de la représentation graphique. Distance parcourue en fonction du temps  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos Je peux conclure : – que si la course est moins de 20 km, Laura ne rejoindra pas Jamie; – que si la course est de 20 km, Laura et Jamie finiront en même temps et ils se rencontreront après 2 h; – que si la course est plus de 20 km, Laura et Jamie se rencontreront après 2 h, et Laura gagnera la course.

Exemple 2

EN ROUTE VERS LE TERRAIN DE CAMPING!	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
Présenter aux élèves le problème suivant. *Deux familles, les Bigelow et les Johnson, partent chacune de leur domicile pour se rendre à un terrain de camping. Le graphique ci-dessous représente, pour chacune des familles, la relation entre la distance, en kilomètres, de leur domicile au terrain de camping et le temps écoulé, en heures.* **Distance parcourue en fonction du temps**  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos Poser aux élèves les questions suivantes : – Quelle voiture roule le plus vite? – Que représente la pente des deux droites? – Que représentent les points d'intersection des droites et de l'axe vertical? – Que représentent les points d'intersection des droites et de l'axe horizontal? – Que représente le point d'intersection des deux droites? – Détermine l'équation de chacune des droites. Demander aux élèves d'échanger au sujet de leurs étapes de travail.	Je crois que la voiture de la famille Bigelow roule plus vite, car elle parcourt plus de kilomètres en moins de temps. La pente (ou le taux de variation) représente le rapport entre la distance, en kilomètres, et le temps, en heures. Les points d'intersection des droites et de l'axe des y (ou les ordonnées à l'origine) représentent la distance entre les domiciles des familles et le terrain de camping au moment du départ. La famille Bigelow avait 300 km à parcourir. La famille Johnson avait 200 km à parcourir. Les points d'intersection des droites et de l'axe des x (ou les abscisses à l'origine) représentent le temps écoulé pour se rendre au terrain de camping. La famille Bigelow a pris 3 h pour se rendre au terrain de camping, tandis que la famille Johnson a pris 4 h. Après 2 h, les deux familles sont à une distance de 100 km du terrain de camping. Pour déterminer les équations des deux droites, il s'agit d'utiliser le taux de variation (ou la pente) et la valeur initiale (ou l'ordonnée à l'origine). Pour la famille Bigelow : $d = 300 - 100t$ Pour la famille Johnson : $d = 200 - 50t$

Exemple 3

FIERTÉ À L'ÉCOLE!

Présenter aux élèves le problème suivant.

Des élèves veulent vendre des chandails pour accroître le sentiment d'appartenance à leur école. Le premier tableau représente le prix des chandails et le nombre de chandails que les élèves voudraient acheter à ce prix. Le second tableau montre le prix que propose le fournisseur selon le nombre de chandails qu'achèteraient les élèves.

Tableau 1

Élèves	
Nombre de chandails, *n*	**Prix, *p* ($)**
0	40
20	36
60	28
100	20
140	12

Tableau 2

Fournisseur	
Nombre de chandails, *n*	**Prix, *p* ($)**
160	40
140	36
40	16
20	12
0	8

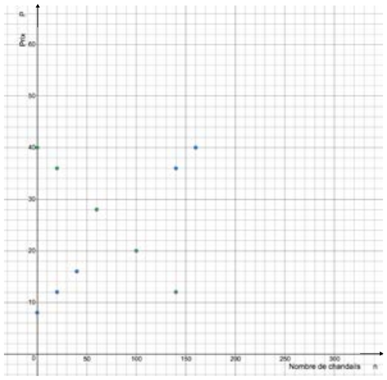
Poser aux élèves les questions suivantes :

- Trace, sur un même plan cartésien, la représentation graphique des deux situations ci-dessus.
- Si le prix d'un chandail était de 32 $, combien d'élèves en achèteraient un?
- À ce prix, combien de chandails le fournisseur doit-il vendre?
- S'il y a 120 chandails à vendre, à quel prix doivent-ils être vendus?
- Combien de chandails doivent être vendus pour qu'il y ait un équilibre entre la demande des élèves et l'offre du fournisseur?
- Quels sont les points d'intersection des deux équations et de l'axe vertical? Que représentent-ils?
- Quel est le point d'intersection de la droite représentant le nombre de chandails que les élèves voudraient acheter et de l'axe horizontal? Que représente-t-il?

TRAVAIL DE L'ÉLÈVE

Voici la représentation graphique des deux situations à l'aide de la table de valeurs :

Prix en fonction du nombre de chandails



Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

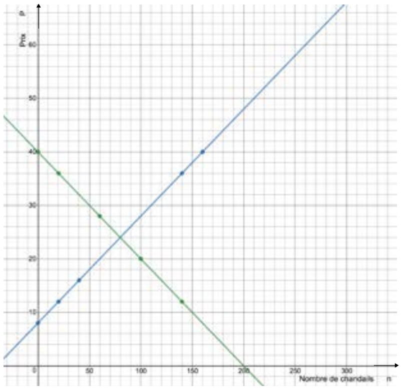
Les deux situations peuvent être modélisées par des fonctions affines (ou des équations de droites).

Pour déterminer les équations des deux droites, il s'agit d'utiliser le taux de variation (ou la pente) et la valeur initiale (ou l'ordonnée à l'origine).

Pour le premier tableau, l'équation est $P = 40 - 0{,}2n$.

Pour le second tableau, l'équation est $P = 8 + 0{,}2n$.

Prix en fonction du nombre de chandails



Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Note : Il est à noter qu'uniquement les points représentent cette situation et que la droite est tracée pour étudier les tendances de la relation.

Méthode graphique et méthode algébrique (comparaison, substitution ou élimination)

Pour résoudre des systèmes d'équations du premier degré, quatre méthodes sont utilisées : méthode graphique, méthode de comparaison, méthode de substitution et méthode d'élimination.

Chaque méthode présente des avantages. Cependant, une méthode s'avérera plus efficace qu'une autre selon la situation.

1. Méthode graphique

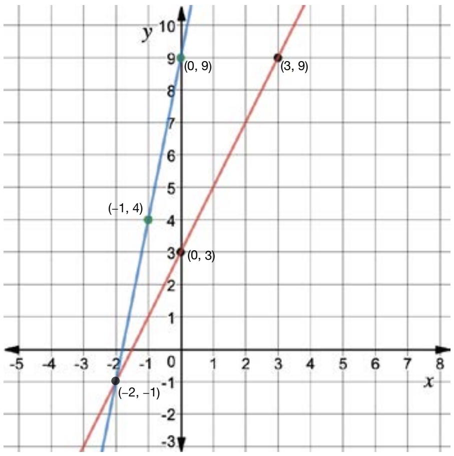
La méthode graphique est une représentation visuelle qui, au premier coup d'œil, permet d'obtenir des informations liées à la situation (p. ex., la droite ayant la pente la plus à pic, les intersections avec l'axe des x et l'axe des y, le point d'intersection de deux droites).

Cette méthode offre un aperçu global des droites et de leurs caractéristiques. Toutefois, elle est inefficace, puisqu'imprécise, pour déterminer des valeurs exactes, comme de grands nombres, des fractions ou des nombres décimaux.

Exemple

MÉTHODE GRAPHIQUE	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
Détermine le point d'intersection des deux droites à l'aide de la méthode graphique. Droite 1 : $y = 2x + 3$ Droite 2 : $y = 5x + 9$	Je peux tracer une droite dans un plan cartésien de différentes façons : – en faisant une table de valeurs; – en trouvant deux points sur la droite; – en utilisant l'ordonnée à l'origine et la pente. Je choisis de trouver deux points sur la droite. Les deux équations sont écrites sous la forme $y = mx + b$. Je peux déterminer facilement l'ordonnée à l'origine de chacune des droites. Droite 1 : Ordonnée à l'origine : (0, 3) Je trouve un autre point; si $x = 3$, alors $y = 9$. Le second point est donc (3, 9). Droite 2 : Ordonnée à l'origine : (0, 9) Je trouve un autre point; si $x = -1$, alors $y = 4$. Le second point est donc (–1, 4). **(suite à la page suivante)**

Exemple (suite)

MÉTHODE GRAPHIQUE	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
	Je peux maintenant tracer les deux droites.  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos À l'aide de la méthode graphique, j'ai pu déterminer que le point d'intersection des deux droites est (–2, –1).

2. Méthode de comparaison

La méthode de comparaison est utile lorsque deux droites sont exprimées sous la forme $y = mx + b$. Il s'agit alors de comparer les deux équations à l'aide d'une égalité et de résoudre l'équation afin de déterminer la valeur d'une variable.

Exemple

Détermine le point d'intersection des deux droites.

$y = 5x + 13$ $\qquad\qquad$ $y = -3x - 3$

Solution

Puisque les deux droites sont exprimées sous la forme $y = mx + b$ et que la valeur de y est la même pour les deux droites au point d'intersection, alors :

$$\begin{aligned} 5x + 13 &= -3x - 3 \\ 8x &= -16 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de y, il s'agit de remplacer la valeur de x dans une des deux équations.
Je remplace la valeur de x dans la première équation.

$y = 5\,(-2) + 13$

$y = 3$

Le point d'intersection des deux droites est donc (–2, 3).

Pour vérifier la solution, je remplace les variables x et y par les coordonnées du point d'intersection dans chacune des équations.

$y = 5x + 13$

$3 = 5\ (-2) + 13$

$3 = 3$

$y = -3x - 3$

$3 = -3\ (-2) - 3$

$3 = 3$

Les coordonnées du point sont vérifiées dans chacune des équations.

Notes : – Il est possible que les équations soient exprimées en fonction de la variable x au lieu de la variable y; cette méthode serait aussi efficace pour comparer les variables x.

– Si les deux équations sont exprimées sous la forme $ax + by + c = 0$ ou sous la forme $ax + by = c$, il est toujours possible d'isoler une des variables dans chacune des équations en vue d'utiliser la méthode de comparaison.

3. Méthode de substitution

La méthode de substitution est utile lorsqu'une équation est écrite sous la forme $y = mx + b$ et que l'autre équation est exprimée sous la forme $ax + by + c = 0$ ou sous la forme $ax + by = c$.

Exemple

Détermine le point d'intersection des deux droites.

$y = 2x + 4$ $4x + 3y = -13$

Je reporte le y de la première équation dans la seconde.

$$4x + 3\ (2x + 4) = -13$$

$$4x + 6x + 12 = -13$$

$$10x + 12 = -13$$

$$10x = -25$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

ou

$$x = -2{,}5$$

Je remplace la valeur de x, dans la première équation, pour déterminer la valeur de y.

$y = 2(-2,5) + 4$

$y = -5 + 4$

$y = -1$

Le point d'intersection des deux droites est donc $(-\frac{5}{2}, -1)$ ou $(-2,5; -1)$.

Notes : – Pour vérifier la solution, il faut remplacer les variables x et y par les coordonnées du point d'intersection dans chacune des équations et s'assurer que l'égalité est vraie.

– Si les deux équations sont exprimées sous la forme $ax + by + c = 0$ ou sous la forme $ax + by = c$, il est toujours possible d'isoler une des variables d'une des équations en vue d'utiliser la méthode de substitution.

4. Méthode d'élimination

La méthode d'élimination est utilisée lorsque les équations sont exprimées sous la forme $ax + by = c$ ou $ax + by + c = 0$ ou lorsqu'il faut transformer les deux équations sous une de ces formes. Il s'agit d'éliminer une des deux variables en additionnant ou en soustrayant les deux équations.

Exemple

Détermine le point d'intersection des deux droites.

$3x + 2y = -2$ $\qquad$ $4x - 3y = 37$

Pour éliminer une des deux variables, les coefficients de la variable x ou y doivent être les mêmes. Pour ce faire, il faut multiplier chacune des équations par un nombre afin d'obtenir les mêmes coefficients pour une des deux variables.

Je décide d'éliminer la variable x. Alors, je multiplie la première équation par 4 et la seconde par 3.

$4(3x + 2y) = (4)(-2)$

$3(4x - 3y) = (3)37$

Note : Il aurait été aussi possible d'éliminer les variables y en multipliant la première équation par 3 et la seconde par 2. Dans ce cas, il aurait fallu additionner les deux équations pour éliminer les variables y.

J’obtiens :

$12x + 8y = -8$

$12x - 9y = 111$

Je soustrais les deux équations :

$$\begin{array}{r} 12x + 8y = -8 \\ -\quad 12x - 9y = 111 \\ \hline 17y = -119 \end{array}$$

Donc, $y = -7$.

Pour déterminer la valeur de x, il s’agit de remplacer la valeur de y dans une des deux équations.

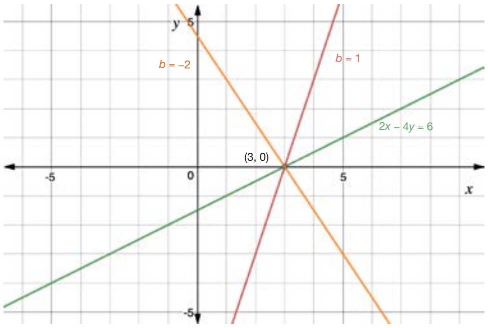
$$\begin{aligned} 3x + 2(-7) &= -2 \\ 3x - 14 &= -2 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Le point d’intersection des deux droites est donc (4, −7).

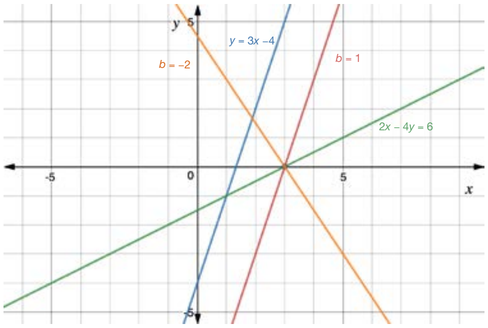
Notes : – Pour vérifier la solution, il faut remplacer les variables x et y par les coordonnées du point d’intersection dans chacune des équations et s’assurer que l’égalité est vraie.

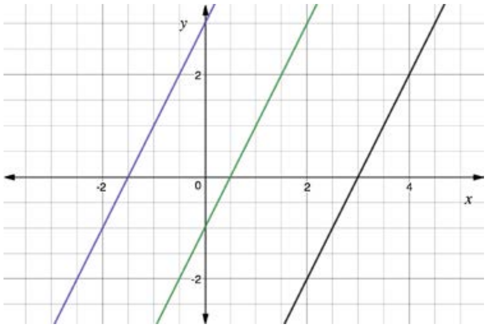
– Si l’on obtient une fraction périodique (p. ex., $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}$) et que l’on veut la valeur exacte du point d’intersection, alors il faut utiliser la fraction.

Cas particuliers

DROITES CONFONDUES	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
Présenter aux élèves le problème suivant. Soit les deux droites d'équation : $3x - by = 9$ $2x - 4y = 6$ Demander aux élèves de tracer la représentation graphique des droites lorsque $b = -2$, $b = 1$ et $b = 6$. Poser aux élèves les questions suivantes : – Détermine le point d'intersection lorsque $b = -2$, $b = 1$ et $b = 6$. – Les droites se coupent-elles au même point? Comment pourrais-tu le prouver? – Est-ce que toutes les droites de cette forme passeraient par ce point d'intersection? Comment pourrais-tu le prouver? – Quelles sont l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine des différentes droites? – Quelles sont tes conclusions? – Comment changerais-tu l'équation pour ne pas avoir le même point d'intersection? Demander aux élèves d'échanger sur les stratégies qu'elles et ils ont utilisées.	Pour déterminer le point d'intersection, j'utilise une des méthodes algébriques ou la méthode graphique. Pour $b = -2$, le point d'intersection est (3, 0). Pour $b = 1$, le point d'intersection est (3, 0). Pour ces valeurs de *b*, le point d'intersection est (3, 0), soit l'abscisse à l'origine.  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos Lorsque $b = 6$, la méthode algébrique choisit ne fonctionne pas, car les variables s'annulent. Je vais déterminer l'ordonnée et l'abscisse à l'origine des deux droites lorsque $b = 6$. Pour l'équation $3x - 6y = 9$, l'ordonnée à l'origine est (0; −1,5) et l'abscisse à l'origine est (3, 0). Pour l'équation $2x - 4y = 6$, l'ordonnée à l'origine est (0; −1,5) et l'abscisse à l'origine est (3, 0). Conclusions : Les deux droites passent par les points (0; −1,5) et (3, 0). Lorsque $b = 6$, les droites sont donc une par-dessus l'autre et il y a une infinité de points d'intersection. Il s'agit de droites confondues. Pour ne pas avoir le même point d'intersection, il faudrait monter ou descendre une des droites en modifiant son équation. Pour monter ou descendre une droite, il s'agit de changer l'ordonnée à l'origine et de garder la même pente. **(suite à la page suivante)**

Cas particuliers (suite)

DROITES CONFONDUES	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
	Je peux changer l'ordonnée à l'origine de la droite sans changer sa pente. J'écris l'équation sous la forme $y = mx + b$. $3x - y = 9$ $-y = -3x + 9$ $y = 3x - 9$ L'ordonnée à l'origine est donc (0, −9). Il est possible de modifier l'équation; par exemple : $y = 3x - 4$. La pente est inchangée, mais l'ordonnée à l'origine est maintenant (0, −4) au lieu de (0, −9). Voici la représentation graphique :  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos Mes conclusions : Si deux droites ont les mêmes pentes et les mêmes ordonnées à l'origine, alors il y a une infinité de solutions. Les droites sont confondues.

DROITES PARALLÈLES	TRAVAIL DE L'ÉLÈVE
Présenter aux élèves le problème suivant. Soit les trois droites d'équation : $2x - y - 1 = 0$ $y = 2x + 3$ $x = \frac{y}{2} + 3$ Poser aux élèves les questions suivantes : – Choisis deux droites. Combien de points d'intersection y a-t-il entre ces deux droites? – Quelle méthode utiliseras-tu pour résoudre ce problème? – Que remarques-tu? – Pour t'aider, trace la représentation graphique des trois droites. – Quelles sont tes conclusions? Demander aux élèves d'échanger sur les stratégies qu'elles et ils ont utilisées.	Pour déterminer le nombre de points d'intersection qu'il y a entre deux droites, je choisis la méthode de substitution en utilisant les deux premières équations. $2x - y - 1 = 0$ (équation 1) $y = 2x + 3$ (équation 2) Je reporte l'équation 2 dans l'équation 1. $2x - (2x + 3) - 1 = 0$ $2x - 2x - 3 - 1 = 0$ $-4 = 0$ Tous les x sont éliminés. J'obtiens une égalité fausse. Je vérifie à l'aide de la représentation graphique.  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos Je me rends compte que les droites sont parallèles. En vérifiant les pentes des droites, je vois que les droites ont toutes la même pente, soit 2, mais que leurs ordonnées à l'origine ne sont pas les mêmes. Il n'y a donc aucun point d'intersection. Conclusions : • Si deux droites ont la même pente et que leurs ordonnées à l'origine sont différentes, alors il n'y a pas de point d'intersection. • Lorsqu'on résout un système d'équations, que les variables s'éliminent et que l'égalité est fausse, alors on peut conclure que les deux droites sont parallèles.

Organigramme des relations

Relation

« Une **relation** est une correspondance entre deux ensembles d'objets [ou un] ensemble de couple » (Champlain, Mathieu et Tessier, 1999, p. 232).

Fonction

« Une **fonction** est une relation particulière entre deux ensembles de données telles que, chaque élément d'un ensemble est associé à un élément unique d'un autre ensemble » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 9).

Exemples : $y = 3x + 7$; $y = x^2 - 5$

Non-fonction

Une relation **n'est pas une fonction** si, tout en étant « […] une correspondance entre deux ensembles d'objets [ou un] ensemble de couples » (Champlain, Mathieu et Tessier, 1999, p. 232), elle ne possède pas la caractéristique particulière à la fonction, c'est-à-dire que « […] chaque élément d'un ensemble est associé à un élément unique d'un autre ensemble » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013, p. 9).

Fonction affine

Une **fonction affine** est une « [r]elation du premier degré définie par $y = ax + b$, et dont la représentation graphique est une droite, sauf la droite verticale » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 58). Dans le cas d'une fonction affine, les premières différences sont constantes.

Fonction du second degré

Une **fonction du second degré** est « […] définie par une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ et dont la représentation graphique est une parabole » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 58). Dans le cas d'une parabole, les deuxièmes différences sont constantes.

Fonction affine à variation directe (Relation de proportionnalité)

Une **fonction affine à variation directe** est une fonction affine dont la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine (0, 0), et dont l'équation a la forme $y = ax$. Elle représente une relation de proportionnalité directe.

Fonction affine à variation partielle (Relation de proportionnalité partielle)

Une **fonction affine à variation partielle** est une fonction affine dont la représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine (0, 0), et dont l'équation a la forme $y = ax + b$, où $a \neq 0$ et b correspond à une valeur constante. Elle représente une relation de proportionnalité partielle.

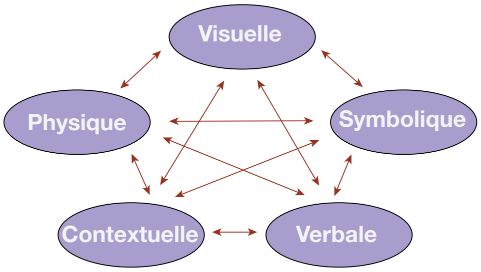
LES FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ

En 10e année, il y a une différence substantielle entre le cours théorique et le cours appliqué. Cette différence :

> […] réside dans un traitement plus approfondi de l'algèbre dans le cours théorique. Ce cours aborde la résolution d'un problème à l'aide de l'équation du second degré, tandis que le cours appliqué aborde la résolution de la même situation à l'aide d'un graphique.
>
> Le cours théorique de 10e année permet à l'élève d'accroître sa compétence en algèbre. Le domaine Fonctions du second degré précise que l'élève doit manipuler des expressions algébriques en vue de transformer une équation de second degré d'une forme à une autre […] (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 10).

La construction du concept de la fonction quadratique

En 10e année, une grande partie du programme-cadre de mathématiques de l'Ontario est dédiée à l'étude de la fonction quadratique ayant une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$. Même à cette année d'études, les élèves doivent être en mesure de décrire les relations à l'aide de différentes représentations, ce qui leur permet de vérifier leur niveau de compréhension.

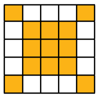
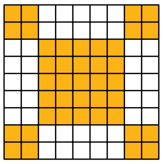
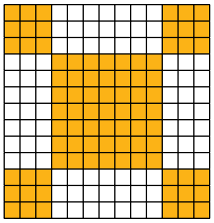
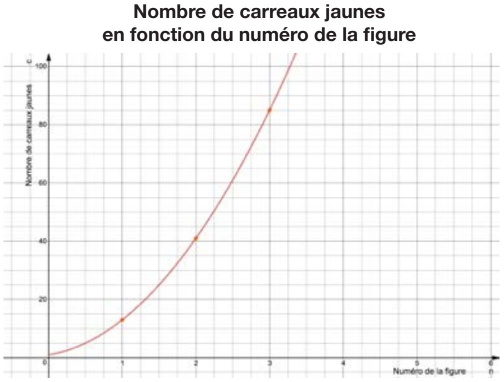


Deux exemples facilitant l'introduction de la fonction quadratique sont présentés dans les pages ci-après.

Exemple 1

Les élèves doivent déterminer le nombre de carreaux jaunes de la figure 1, de la figure 2 et de la figure 3, et généraliser pour les autres figures faisant partie de la suite.

Les élèves remarquent les carreaux jaunes aux quatre coins de la figure 1. Elles et ils écrivent 4×1^2 pour en déterminer le nombre. Ensuite, elles et ils déterminent le nombre de carreaux jaunes au centre de la figure en écrivant 3^2. Le nombre total de carreaux jaunes de la figure 1 peut donc s'écrire : $c = 4 \times 1^2 + 3^2$. Les élèves utilisent le même raisonnement pour déterminer le nombre de carreaux jaunes des figures 2 et 3, et faire une généralisation.

SUITE	GÉNÉRALISATION POSSIBLE
 Figure 1  Figure 2  Figure 3 © 2017 visualpatterns.org c représente le nombre de carreaux jaunes n représente le numéro de la figure	Figure 1 : $c = 4 \times 1^2 + 3^2$ Figure 2 : $c = 4 \times 2^2 + 5^2$ Figure 3 : $c = 4 \times 3^2 + 7^2$ L'équation est donc $c = 4 \times n^2 + (2n + 1)^2$. Voici la représentation graphique de cette situation :  **Nombre de carreaux jaunes en fonction du numéro de la figure** Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos **Note :** Il est à noter qu'uniquement les points représentent cette situation. La courbe est tracée pour étudier les tendances de la relation. **Concepts qu'utilisent les élèves** Les élèves connaissent la notation pour les carrés parfaits. Elles et ils ont déjà généralisé que les nombres pairs peuvent être représentés par l'expression $2n$; donc, les nombres impairs sont représentés par $2n + 1$ ou $2n - 1$.

Exemple 2

Les élèves doivent déterminer le nombre de cure-dents formant les triangles et prolongeant la suite.

SUITE

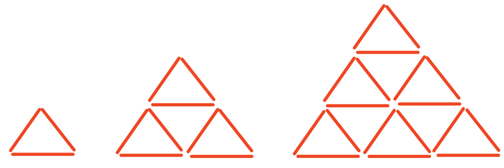


Figure 1 Figure 2 Figure 3

© 2017 visualpatterns.org

t représente le nombre de triangles

c représente le nombre de cure-dents

n représente le numéro de la figure

Numéro de la figure, *n*	Nombre de triangles formés à l'aide de cure-dents, *t*
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15

GÉNÉRALISATION POSSIBLE

Les élèves peuvent considérer deux possibilités, soit le nombre de triangles formés à l'aide de cure-dents, soit le nombre de cure-dents.

Si les élèves examinent le nombre de triangles formés à l'aide de cure-dents, alors elles et ils établissent la relation entre deux figures.

Si les élèves examinent les figures 2 et 3, elles et ils peuvent multiplier leur numéro, et obtenir 6, ce qui est deux fois le nombre de triangles de la figure 2.

Si les élèves examinent les figures 4 et 5, et multiplient leur numéro, la réponse obtenue est 20, ce qui est deux fois le nombre de triangles de la figure 4.

Pour déterminer le nombre de triangles de la figure 10, les élèves peuvent donc écrire :

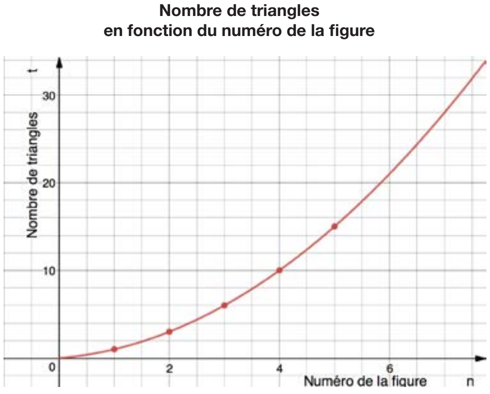
$$\text{nombre de triangles} = \frac{10 \times 11}{2}$$

Les élèves peuvent déterminer le nombre de triangles pour un numéro de figure donné en multipliant n par $(n + 1)$ et en divisant le produit par deux.

L'équation pour le nombre de triangles est :

$$t = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Voici une représentation graphique :

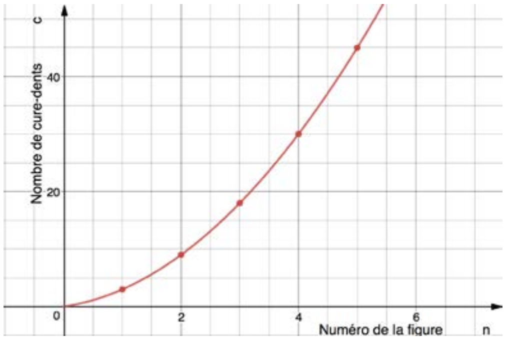


Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Note : Il est à noter qu'uniquement les points représentent cette situation. La courbe est tracée pour étudier les tendances de la relation.

(suite à la page suivante)

Exemple 2 (suite)

SUITE	GÉNÉRALISATION POSSIBLE
	Pour déterminer le nombre de cure-dents, il suffit de multiplier le nombre de triangles par trois. Pour déterminer le nombre de cure-dents de la figure 10, les élèves peuvent écrire : $c = \frac{3 \times 10(11)}{2}$ $= 165$ L'équation pour déterminer le nombre de cure-dents est donc : $c = \frac{3n(n + 1)}{2}$ Voici sa représentation graphique : **Nombre de cure-dents en fonction du numéro de la figure**  Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos **Note :** Il est à noter qu'uniquement les points représentent cette situation. La courbe est tracée pour étudier les tendances de la relation. **Concepts qu'utilisent les élèves** Les élèves ont déjà généralisé que deux nombres consécutifs peuvent s'écrire $n - 1$ et n, ou n et $n + 1$. Elles et ils savent déterminer la somme de nombres consécutifs.

Il est possible de prouver mathématiquement l'équation permettant de déterminer le nombre de cure-dents.

Figure 1 : $t = 1$
Figure 2 : $t = 1 + 2$
Figure 3 : $t = 1 + 2 + 3$
Figure n : $t = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n$

Il faut donc trouver une formule pour déterminer la somme des nombres.

Alors :

$$\begin{array}{rccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & +\,4\,+\dots+\dots+ & n-1 & + & n \\
+ & n & + & (n-1) & + & n-2 & +\dots+\,4\,+\,3\,+ & 2 & + & 1 \\
\cline{2-10}
 & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & \dots\quad+\qquad\quad+ & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Il est possible de regrouper les termes semblables.

$$\underbrace{\begin{array}{rccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & +\,4\,+\dots+\dots+ & n-1 & + & n \\
+ & n & + & (n-1) & + & n-2 & +\dots+\,4\,+\,3\,+ & 2 & + & 1 \\
\cline{2-10}
 & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & \dots\quad+\qquad\quad+ & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}}_{n\text{ termes}}$$

La somme est donc $(n + 1) \times n$.

Puisque la somme a été additionnée deux fois, il faut diviser l'expression par deux pour connaître le nombre de triangles; l'expression est : $t = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour déterminer le nombre de cure-dents, il s'agit de multiplier cette expression par 3.

La généralisation obtenue pour le nombre de cure-dents est : $c = \frac{3n(n+1)}{2}$.

Les caractéristiques de la fonction du second degré

Selon *Le curriculum de l'Ontario, 9e et 10e année – Mathématiques (révisé)* (2005), une fonction du second degré est une « [f]onction définie par une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ et dont la représentation graphique est une parabole » (p. 58). Elle est à l'étude à partir de la 10e année, cours théorique et appliqué.

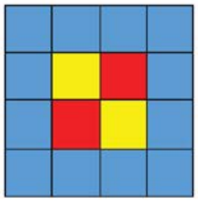
LES REPRÉSENTATIONS

Les fonctions du second degré peuvent être représentées à l'aide d'une situation en contexte, d'une suite de figures, d'une table de valeurs, d'une représentation graphique ou d'une équation.

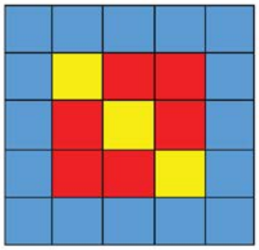
Exemple

Situation en contexte et suite de figures associées

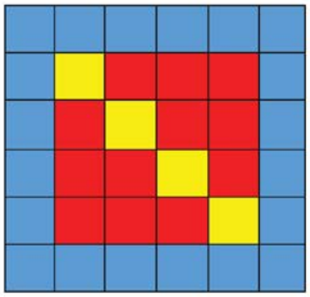
Un artiste produit des tapis en utilisant trois couleurs. Il crée un carré dont le contour est formé de carreaux bleus et l'intérieur, de carreaux jaunes et rouges. Voici les trois premiers tapis qu'il a produits.



Tapis 1



Tapis 2



Tapis 3

Table de valeurs et équation – Élève 1

Une élève utilise une table de valeurs et compare le numéro du tapis avec chacune des couleurs de carreaux. La somme des trois équations lui donne l'équation de la fonction du second degré.

	Nombre de carreaux			
Numéro du tapis	**Bleus**	**Jaunes**	**Rouges**	**Total**
1	12	2	2	16
2	16	3	6	25
3	20	4	12	36
x	4x + 8	x + 1	x2 + x	x2 + 6x + 9

(Illustrations et tableau : Copyright © 1908 CCC Republication)

Table de valeurs et équation – Élève 2

Un autre élève continue la suite de tapis et remplit la table de valeurs en montrant la relation entre la variable dépendante (nombre de carreaux) et la variable indépendante (numéro du tapis).

Numéro du tapis, *x*	Nombre de carreaux, *y*	Premières différences	Deuxièmes différences
0	**9**		
		7	
1	16		2
		9	
2	25		2
		11	
3	36		2
		13	
4	49		2
		15	
5	64		2
		17	
6	81		2
		19	
7	100		

Cette table de valeurs l'aide à observer les premières différences et les deuxièmes différences. Il utilise ses connaissances des paramètres de la fonction (*a*, *b* et *c*) pour déterminer l'équation. Il observe que la suite que forment les premières différences a une variation de 2. Alors, il détermine que la valeur de *y*, lorsque $x = 0$, est de 9. Donc, $c = 9$. Par la suite, il note que chaque deuxième différence vaut 2 ou 2*a*. Or, si $2a = 2$, alors $a = 1$, ce qui correspond à la valeur du paramètre *a*. Lorsque *x* vaut 1, *y* vaut 16, il résout donc pour *b*, et obtient l'équation $y = x^2 + 6x + 9$.

Pour obtenir *b* :

$y = 1x^2 + bx + 9$

$16 = 1(1) + b(1) + 9$

$16 = b + 10$

$16 - 10 = b$

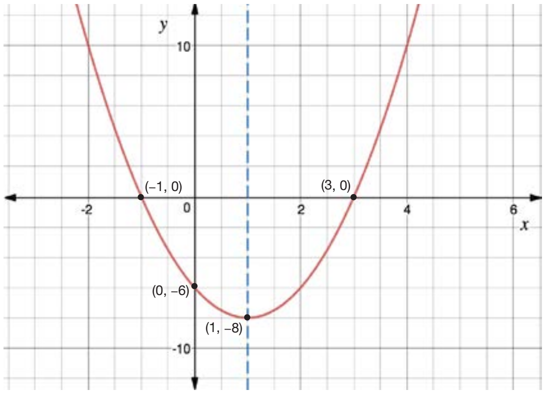
$6 = b$

Représentation graphique

La représentation graphique permet de déterminer l'abscisse à l'origine, l'ordonnée à l'origine, le sommet de la parabole, l'axe de symétrie et les valeurs maximale et minimale (voir le tableau du vocabulaire relatif à la fonction du second degré, à la page 92, pour obtenir les descriptions de ces termes).

Exemples

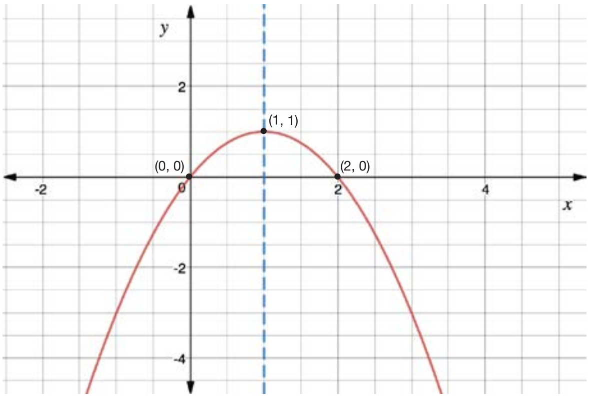
Voici le graphique de la parabole $y = 2x^2 - 4x - 6$ s'ouvrant vers le haut :



Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Abscisses à l'origine	−1 et 3
Ordonnée à l'origine	−6
Sommet de la parabole	(1, −8)
Axe de symétrie	$x = 1$
Valeur maximale	Aucune
Valeur minimale	−8

Voici le graphique de la parabole $y = -(x - 1)^2 + 1$ s'ouvrant vers le bas :



Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Abscisses à l'origine	0 et 2
Ordonnée à l'origine	0
Sommet de la parabole	(1, 1)
Axe de symétrie	$x = 1$
Valeur maximale	1
Valeur minimale	Aucune

LE TABLEAU DU VOCABULAIRE RELATIF À LA FONCTION DU SECOND DEGRÉ

Abscisse à l'origine (d'une courbe)	« Première coordonnée d'un point d'intersection d'une courbe avec l'axe des x » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 57). La valeur de x lorsque $y = 0$.
Ordonnée à l'origine (d'une courbe)	« Deuxième coordonnée d'un point d'intersection d'une courbe avec l'axe des y » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 59). La valeur de y lorsque $x = 0$.
Sommet de la parabole	Le sommet de la parabole est le point sur l'axe de symétrie de la parabole où la parabole atteint un maximum ou un minimum.
Axe de symétrie	Un axe qui permet, par une symétrie orthogonale, d'appliquer une parabole sur elle-même. Dans le cas d'une parabole qui représente une fonction du second degré, c'est la ligne verticale passant par le sommet de la parabole permettant l'observation de la partie de la parabole qui se trouve à gauche de cet axe ainsi qu'à droite de cet axe, mais inversée. L'équation de l'axe de symétrie est $x = \frac{-b}{2a}$.
Valeur maximale	Lorsque la parabole est ouverte vers le bas, il faut déterminer la valeur maximale; il faut donc chercher un maximum si $a < 0$. Dans la forme canonique, c'est la valeur du paramètre k. Pour la forme générale, c'est la valeur de l'ordonnée du sommet.
Valeur minimale	Lorsque la parabole est ouverte vers le haut, il faut déterminer la valeur minimale; il y a donc une valeur minimale si $a > 0$. Dans la forme canonique, c'est la valeur du paramètre k. Pour la forme générale, c'est la valeur de l'ordonnée du sommet.

LES FORMES ET LES PARAMÈTRES DE LA FONCTION DU SECOND DEGRÉ

La forme canonique de la fonction du second degré

Selon *Le curriculum de l'Ontario, 9^e^ et 10^e^ année – Mathématiques (révisé)* (2005), la forme canonique de la fonction du second degré est :

> [une] [é]quation de forme simple, servant de modèle à une famille d'équations pouvant s'y ramener. Elle fournit directement des informations sur sa représentation graphique (p. ex., […] [l]'équation $y = 2x^2 + 8x + 7$ peut être ramenée à l'équation canonique $y = 2(x + 2)^2 – 1$ qui fournit directement les coordonnées du sommet de la parabole qu'elle définit, [l'ouverture ainsi que l'équation de l'axe de symétrie]). (p. 58)

La forme canonique de la fonction du second degré $y = a(x - h)^2 + k$, possède trois paramètres, soit a, h et k.

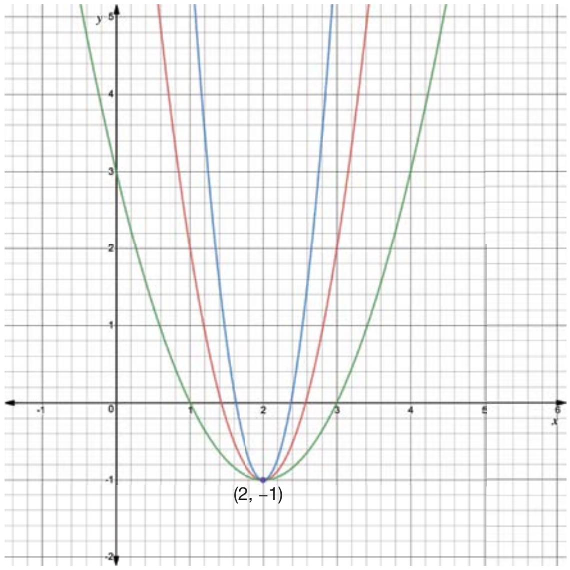
- Le paramètre a, qui n'est jamais nul, correspond à l'ouverture et à l'orientation de la parabole :
    - si le paramètre a est positif, la parabole s'ouvre vers le haut;
    - si le paramètre a est négatif, la parabole s'ouvre vers le bas;
    - il existe une relation inverse entre la grandeur du paramètre a et l'ouverture de la parabole : plus le paramètre a est grand, plus l'ouverture de la parabole est petite, et vice-versa.
- Le paramètre h correspond à l'abscisse du sommet.
- Le paramètre k correspond à l'ordonnée du sommet.

Exemple (paramètre *a*)

Dans l'exemple ci-dessous, si $h = 2$ et $k = -1$ pour toutes les paraboles, alors le sommet est le même pour toutes les paraboles, mais l'ouverture des paraboles varie.

🟥 $y = 3(x - 2)^2 - 1$
🟦 $y = 7(x - 2)^2 - 1$
🟩 $y = (x - 2)^2 - 1$

Toutes ces paraboles s'ouvrent vers le haut, car $a > 0$.



Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

La parabole $y = 3(x - 2)^2 - 1$ subit un rétrécissement lorsque le paramètre a varie de 3 à 7, car l'ouverture est plus petite. Elle subit un étirement lorsque le paramètre a varie de 3 à 1, car l'ouverture est plus grande.

Exemple (paramètres *h* et *k*)

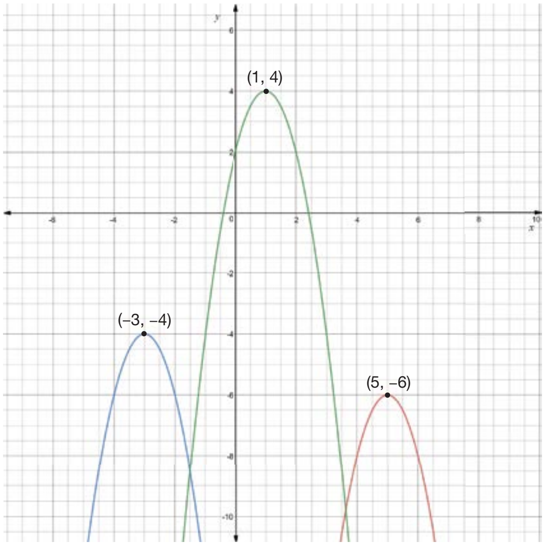
Dans l'exemple ci-dessous, si $a = -2$ pour toutes les paraboles, alors l'ouverture est la même pour toutes les paraboles, mais les sommets varient.

🟦 $y = -2(x + 3)^2 - 4$

🟩 $y = -2(x - 1)^2 + 4$

🟥 $y = -2(x - 5)^2 - 6$

Toutes ces paraboles s'ouvrent vers le bas, car $a < 0$.



La forme générale de la fonction du second degré

La forme générale de la fonction du second degré est la forme développée de la forme canonique. Elle s'obtient en effectuant des opérations algébriques.

Exemple du passage de la forme canonique à la forme générale

Étant donné la fonction suivante sous sa forme canonique $y = (x - 5)^2 - 6$, l'élève développe :

- en déterminant d'abord le carré pour obtenir $y = 3(x^2 - 10x + 25) - 6$;
- en appliquant la distributivité pour obtenir $y = 3x^2 - 30x + 75 - 6$;
- en additionnant les nombres entiers pour obtenir $y = 3x^2 - 30x + 69$.

La fonction du second degré, dans la forme générale $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, possède trois paramètres :

- le paramètre *a*, qui n'est jamais nul, correspond à l'ouverture et à l'orientation de la parabole, comme la forme canonique de la fonction du second degré (voir l'exemple de la forme canonique);
- le paramètre *b* correspond à la translation du sommet;
- le paramètre *c* correspond à la valeur de l'ordonnée à l'origine.

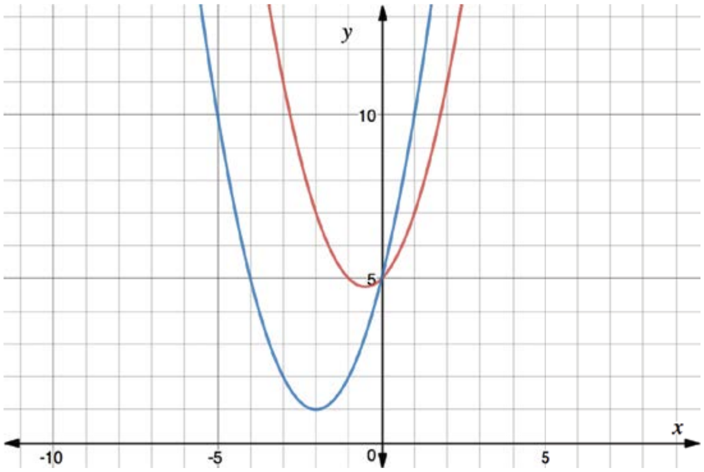
Exemple (paramètre *b*)

Dans l'exemple ci-dessous, $a = 1$ et $c = 5$ pour toutes les paraboles.

🔴 $y = x^2 + x + 5$

🔵 $y = x^2 + 4x + 5$

Toutes les paraboles s'ouvrent vers le haut, car $a > 0$.



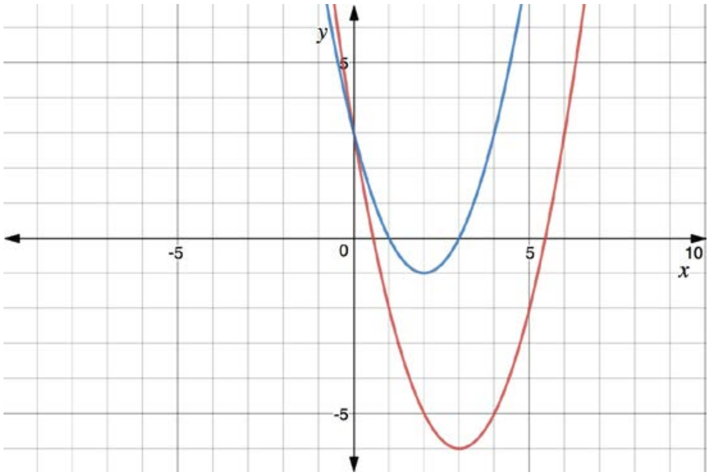
Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Lorsque le paramètre b, dans la parabole $y = x^2 + x + 5$, varie de 1 à 4, la parabole se déplace vers la gauche et vers le bas, car $b > 0$.

Cependant, lorsque le paramètre b, dans la parabole $y = x^2 - 6x + 3$, varie de –6 à –4, la parabole se déplace vers la droite et vers le bas, car $b < 0$. Dans cet exemple-ci, $a = 1$ et $c = 3$ pour toutes les paraboles.

🔴 $y = x^2 - 6x + 3$

🔵 $y = x^2 - 4x + 3$



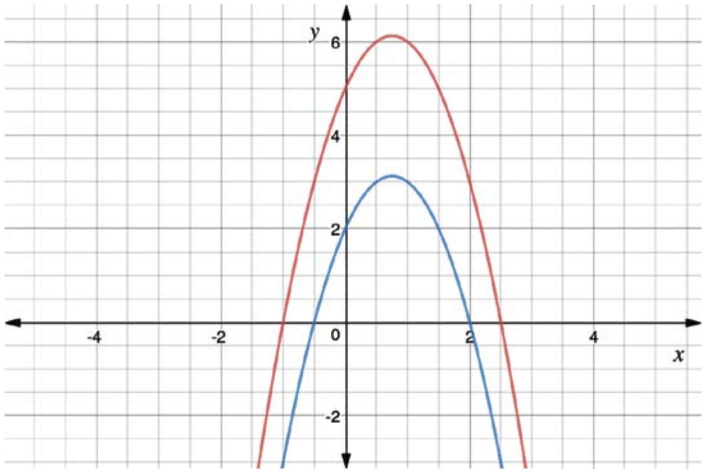
Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Exemple (paramètre *c*)

Dans l'exemple ci-dessous, $a = -2$ et $b = 3$ pour toutes les paraboles.

$y = -2x^2 + 3x + 5$

$y = -2x^2 + 3x + 2$



Toutes les paraboles s'ouvrent vers le bas, car $a < 0$.

Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Lorsque le paramètre *c*, dans la parabole $y = -2x^2 + 3x + 5$, varie de 5 à 2, la parabole croise l'axe des *y* à un nouvel endroit et le sommet se déplace vers le bas.

La forme $y = ax(x - s) + c$ et le paramètre *s*

Une équation de forme générale peut aussi être transformée à la forme $y = ax(x - s) + c$ en vue de déterminer deux points pour trouver le sommet. Dans cette forme, le paramètre *s* correspond à la valeur de *x* du second point, le premier point étant l'ordonnée à l'origine.

Exemple : Déterminer le sommet en partant de la forme générale.

Détermine le sommet de l'équation suivante : $y = 2x^2 + 6x + 4$.

Une élève factorise les deux premiers termes pour obtenir l'équation $y = 2x(x + 3) + 4$.

Si $x = 0$, alors $y = 4$, ce qui donne l'ordonnée à l'origine de la parabole.

Elle se rend compte qu'il y a aussi un autre point correspondant à $y = 4$.

Pour déterminer la valeur de *x*, en sachant que $y = 4$, elle procède ainsi :

$$4 = 2x(x + 3) + 4$$

$$4 - 4 = 2x(x + 3) + 4 - 4$$

$$0 = 2x(x + 3)$$

Si $2x = 0$, alors $x = 0$ (l'ordonnée à l'origine), et si $(x + 3) = 0$, alors $x = -3$. L'élève a maintenant deux points (0, 4) et (–3, 4).

Pour trouver le sommet, elle détermine $((\frac{(0-3)}{2}), y) = (-1{,}5; y)$, car elle sait que la valeur de x du sommet est à mi-chemin entre 0 et –3, donc –1,5. Elle remplace cette valeur dans l'équation pour déterminer la valeur de y du sommet :

$$\begin{aligned} y &= 2(-1{,}5)(-1{,}5 + 3) + 4 \\ &= -3\ (-1{,}5 + 3) + 4 \\ &= -3(-1{,}5) + 4 \\ &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Le sommet est donc (–1,5; –0,5).

Exemple : Déterminer le sommet à partir de la forme $y = ax(x - s) + c$.

Si l'élève comprend les paramètres de la forme $y = 2x(x + 3) + 4$, elle ou il peut, sans faire tout le processus montré ci-dessus, conclure rapidement que les deux points sont $(0, c)$ et $(-s, c)$, donc (0, 4) et (–3, 4). Par la suite, elle ou il trouvera le sommet en déterminant la valeur de x du sommet (à mi-chemin entre 0 et –3) et la valeur de y du sommet en remplaçant la valeur du x dans l'équation.

Parfois, l'élève doit transformer la forme canonique à la forme générale, mais dans certaines situations d'apprentissage, elle ou il doit être en mesure de transformer la forme générale à la forme canonique.

Exemple du passage de la forme générale à la forme canonique

Élève 1 – Étant donné la fonction suivante, sous sa forme générale $y = -2x^2 + 12x - 10$, l'élève choisit de transformer l'équation en utilisant la méthode de complétion du carré.

Il détermine le facteur commun –2 afin d'obtenir 1 comme coefficient de x^2.

Donc, $y = -2(x^2 - 6x + 5)$.

Pour obtenir un carré parfait, il ajoute 4 dans les parenthèses, et pour que l'égalité reste vraie, il ajoute 8 après les parenthèses.

Donc, $y = -2(x^2 - 6x + 5 + 4) + 8$ ou $y = -2(x^2 - 6x + 9) + 8$ ou $y = -2(x - 3)^2 + 8$

La forme canonique de $y = -2x^2 + 12x - 10$, est $y = -2(x - 3)^2 + 8$.

Élève 2 – Étant donné la fonction suivante, sous sa forme générale $y = -2x^2 + 12x - 10$, l'élève identifie les paramètres de la forme générale $a = -2$, $b = 12$ et $c = -10$.

En se servant des formules du sommet, ($h = \frac{-b}{2a}$ et $k = \frac{(4ac - b^2)}{4a}$), l'élève détermine les valeurs de h et de k.

Donc, $h = 3$.

Si $a = -2$, $b = 12$ et $c = -10$, alors $k = \frac{[4(-2)(-10)-(12)^2]}{4(-2)}$.

$$\text{Donc, } k = \frac{[80 - 144]}{-8}$$

$$= \frac{-64}{-8}$$

$$= 8.$$

La forme canonique de $y = -2x^2 + 12x - 10$ est $y = -2(x - 3)^2 + 8$.

La mise en application

Selon le programme-cadre de 10e année, l'élève doit analyser des situations à l'aide de différentes représentations de fonctions du second degré. L'exemple ci-dessous aide l'élève à faire les liens entre les représentations en se servant de divers modèles.

Exemple

L'école organise un souper spaghetti pour amasser de l'argent. Elle reçoit tous les ingrédients gratuitement de la communauté. Elle vend 200 repas au coût de 8 $ chacun.

L'école voudrait augmenter ses revenus afin d'offrir aux élèves un plus grand choix d'activités scolaires. Les années précédentes, elle vendait les repas 0,50 $ de moins, et le nombre de repas vendus augmentait de 25.

Aide l'école à prendre les décisions nécessaires au sujet du prix des repas.

Il s'agit de trouver le maximum de revenu, mais le problème ne le mentionne pas explicitement laissant ainsi aux élèves le choix de présenter leurs solutions en utilisant différents modèles.

Premier modèle

Un premier modèle pourrait être une table de valeurs. En effet, l'élève peut calculer les revenus en multipliant le prix des repas par le nombre de repas.

Nombre de repas, *n*	Prix, *P* ($)	Revenus, *R* ($)
200	8	1 600
225	7,50	1 687,50
250	7	1 750
275	6,50	1 787,50
300	6	1 800
325	5,50	1 787,50
350	5	1 750
375	4,50	1 687,50
400	4	1 600

Dans ce cas-ci, l'élève n'a pas étudié l'effet sur les revenus lorsque le prix des repas est plus élevé. Elle ou il doit donc ajouter des données à sa table de valeurs pour porter un jugement éclairé.

Nombre de repas, *n*	Prix, *P* ($)	Revenus, *R* ($)
125	9,50	1 187,50
150	9	1 350
175	8,50	1 487,50

L'élève peut donc conclure que le maximum de revenu sera atteint lorsque l'école servira 300 repas au coût de 6 $ chacun.

Deuxième modèle

L'élève peut également représenter cette situation en utilisant une équation. Elle ou il définit les variables pour écrire l'équation représentant la situation :

R représente les revenus
x représente le nombre de fois que le prix est diminué de 0,50 $

L'élève pourrait exprimer les revenus en deux temps.

Équation lorsque le prix est diminué de 0,50 $:

Si le prix des repas est diminué, alors l'équation est :

$R = (8 - 0{,}50x)\,(200 + 25x)$

$(8 - 0{,}50x)$ représente le prix des repas

$(200 + 25x)$ représente le nombre de repas

Si le prix des repas est diminué une première fois de 0,50 $, par exemple, alors l'équation est :

$R = (8 - 0{,}50 \times 1)\,(200 + 25 \times 1)$

$R = (7{,}50)(225)$

$R = 1\,687{,}50$ $

Si le prix des repas est diminué deux fois de 0,50 $, alors : $x = 2$ et $R = 1\,750$ $.

Dans ce cas-là, les revenus augmentent.

Équation lorsque le prix est augmenté de 0,50 $:

$R = (8 + 0{,}50x)\,(200 - 25x)$

$(8 + 0{,}50x)$ représente le prix des repas

$(200 - 25x)$ représente le nombre de repas

x représente le nombre de fois que le prix augmente de 0,50 $

Si le prix des repas est augmenté une fois de 0,50 $, alors l'équation est :

$R = (8 + 0{,}50 \times 1)\,(200 - 25 \times 1)$

$R = (8{,}50)(175)$

$R = 1\,487{,}50$ $

Si le prix des repas est augmenté deux fois de 0,50 $, alors : $x = 2$ et $R = 1\,350$ $.

Dans ce cas-là, les revenus diminuent.

Il faut donc regarder le nombre de fois que le prix des repas peut être diminué pour avoir un revenu maximum. Il faut diminuer le prix six fois pour obtenir un revenu maximum.

En conclusion, pour avoir un maximum de revenu, il faut vendre 300 repas pour obtenir un revenu de 1 800 $.

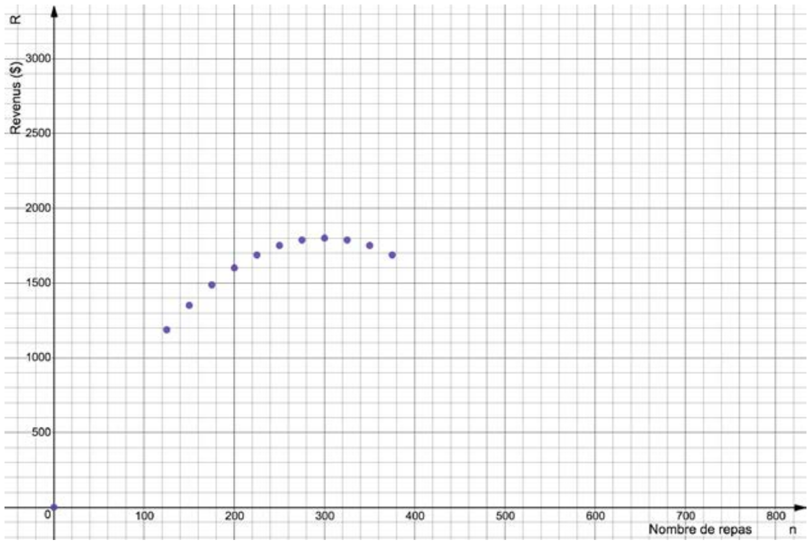
Troisième modèle

L’élève modélise la situation à l’aide d’une représentation graphique et d’une équation.

En utilisant la table de valeurs, elle ou il trace une représentation graphique de la situation.

n représente le nombre de repas
R représente les revenus

Revenus en fonction du nombre de repas



En examinant la représentation graphique, l’élève constate que le sommet est (300, 1 800).

Elle ou il écrit $R = a(n - 300)^2 + 1\ 800$.

Elle ou il détermine la valeur du paramètre a en remplaçant un point dans l’équation, soit (0, 0).

Donc :

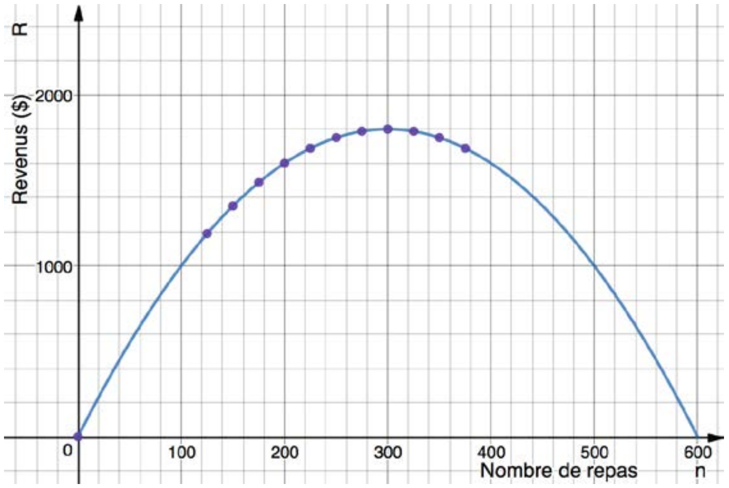
$0 = a(0 - 300)^2 + 1\ 800^2$

$a = -0,02$

L’équation qui représente cette situation est $R = -0,02(n - 300)^2 + 1\ 800$ ou sous la forme générale, $R = -0,02n^2 + 12n$.

La représentation graphique de l'équation est :

Revenus en fonction du nombre de repas



Note : Il est à noter qu'uniquement les points représentent cette situation. La courbe est tracée pour étudier les tendances de la relation.

Questions de réflexion

Qu'arrive-t-il lorsque le nombre de repas est 600?

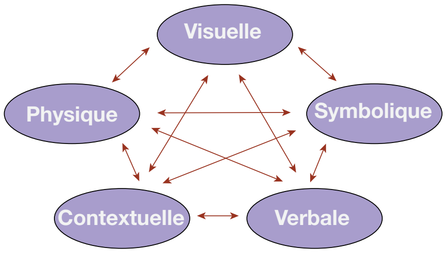
Si le prix des repas diminuait de 0,25 $ au lieu de 0,50 $, y aurait-il des changements? Lesquels?

Si le nombre de repas augmentait de 50 au lieu de 25, et si le coût des repas diminuait de 0,50 $, y aurait-il des changements? Lesquels?

Les expériences et la collecte de données

Selon le programme-cadre de 10^{e} année, les élèves sont appelées et appelés à modéliser des situations à l'aide de fonctions du second degré. Elles et ils doivent :

- « identifier les variables;
- formuler une hypothèse […];
- recueillir des données;
- représenter des données par une table de valeurs et un nuage de points;



- déterminer si ces données peuvent être modélisées par une fonction du second degré […];

- […] tracer la courbe la mieux ajustée;
- […] déterminer son équation;
- formuler des conclusions et les justifier à partir des données recueillies»;
- « communiquer et justifier les étapes d'un problème ou d'une expérience en utilisant des arguments convaincants et le vocabulaire approprié » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 48).

Dans l'exemple ci-dessous, l'élève doit établir la relation entre le nombre de tours et la longueur de la corde. La variable indépendante correspond au nombre de tours et la variable dépendante correspond à la longueur de la corde, en centimètres. Des cordes de différents diamètres, soit des cordes de 3,2 mm, de 5 mm, de 9,6 mm et de 13 mm, sont utilisées pour effectuer l'expérience.

Est-il possible de modéliser cette situation? Si oui, quelle sorte de fonction pourrait modéliser cette situation? Est-ce une droite ou une courbe? Est-ce une fonction?

Exemple

L'élève forme une spirale à l'aide d'une corde en l'enroulant sur elle-même. Ensuite, en se servant d'un marqueur, elle ou il trace un trait en partant du centre de la spirale jusqu'au bord, comme cela est illustré sur les photos suivantes.

Figure 1 : Corde de 3,2 mm de diamètre

Figure 2 : Corde de 5 mm de diamètre

Figure 3 : Corde de 9,6 mm de diamètre

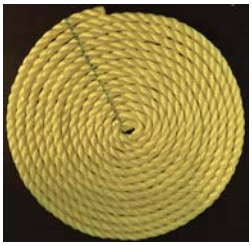
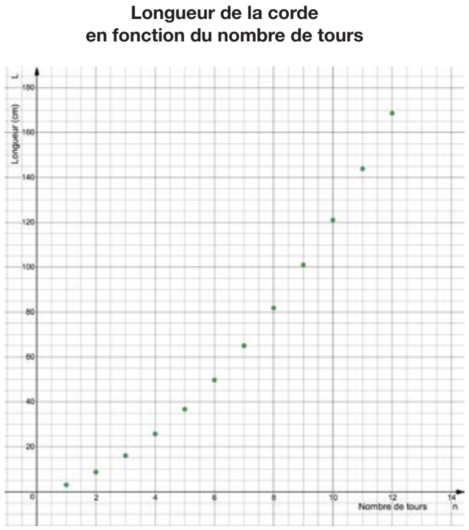


Figure 4 : Corde de 13 mm de diamètre

Le tableau ci-dessous présente les données recueillies.

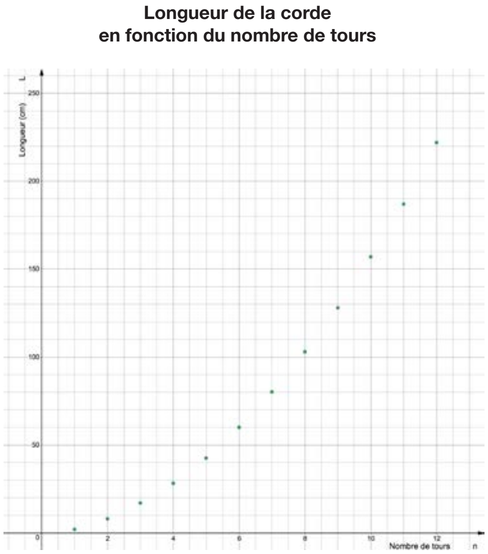
	Corde de 3,2 mm de diamètre	**Corde de 5 mm de diamètre**	**Corde de 9,6 mm de diamètre**	**Corde de 13 mm de diamètre**
Nombre de tours, *n*	**Longueur, *L* (cm)**	**Longueur, *L* (cm)**	**Longueur, *L* (cm)**	**Longueur, *L* (cm)**
1	3	2	7	9
2	8,7	8	20	25
3	16	17	37	48
4	25,7	28,2	59	77
5	36,7	42,5	86	114
6	49,7	60	118,3	157,5
7	65	80,2	155,2	208
8	81,8	103	187	265
9	101	128	243,7	329,5
10	121	157	298,7	401,5
11	143,8	187	352,5	481
12	168,6	222	414	568

Pour chacune des cordes, voici la représentation graphique de la longueur de la corde en fonction du nombre de tours :


Longueur de la corde en fonction du nombre de tours

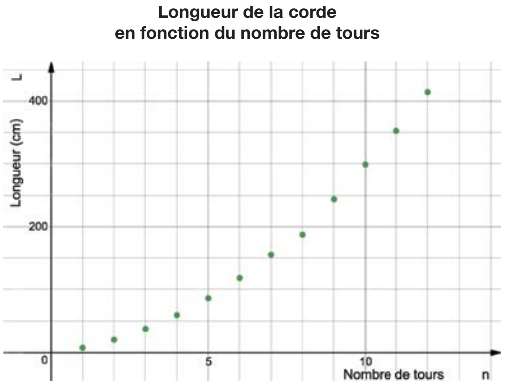
Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Corde de 3,2 mm de diamètre


Longueur de la corde en fonction du nombre de tours

Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Corde de 5 mm de diamètre


Longueur de la corde en fonction du nombre de tours

Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Corde de 9,6 mm de diamètre

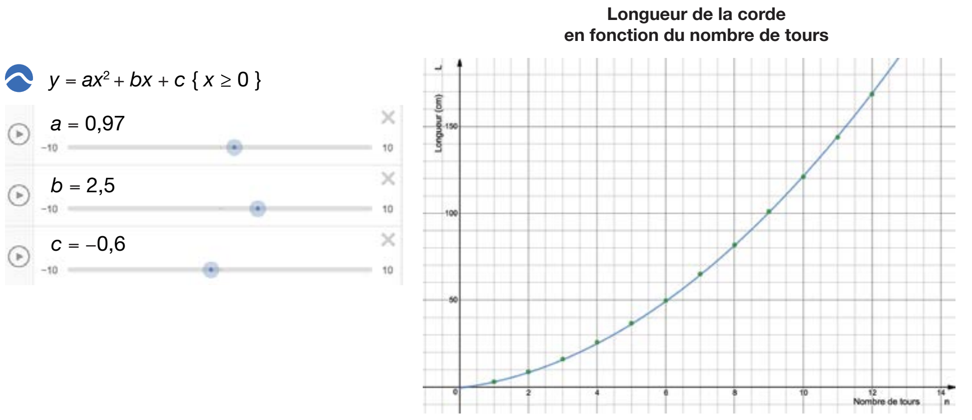

Longueur de la corde en fonction du nombre de tours

Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

Corde de 13 mm de diamètre

En observant les quatre représentations graphiques, l'élève conclut que ces situations peuvent être modélisées à l'aide d'une fonction quadratique et qu'il est possible de tracer la courbe la mieux ajustée pour chacune des situations et d'en déterminer l'équation.

Pour déterminer l'équation de la courbe la mieux ajustée, une application peut être utile. Il s'agit d'entrer la forme générale de la fonction du second degré et de faire varier les paramètres *a*, *b* et *c*. Voici un exemple :



$y = ax^2 + bx + c \{ x \geq 0 \}$

$a = 0{,}97$

$b = 2{,}5$

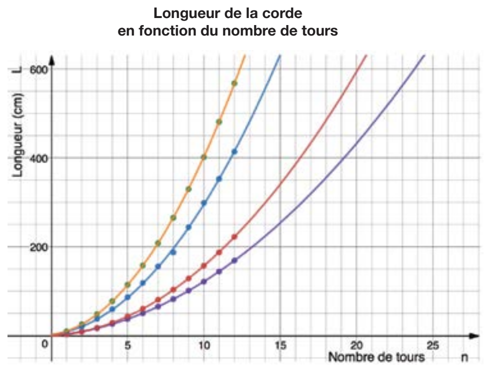
$c = -0{,}6$

Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos

L'équation de la parabole la mieux ajustée, en se servant de cette application, est $y = 0{,}97x^2 + 2{,}5x - 0{,}6$.

L'utilisation des fonctions d'une calculatrice à affichage graphique, dans ce cas-ci la régression quadratique, est aussi possible. Voici l'équation obtenue : $y = 0{,}945x^2 + 2{,}75x - 0{,}645$.

Évidemment, les deux équations ne sont pas identiques, car la précision n'est pas la même. Cependant, elles représentent une bonne approximation de la situation.

Voici les représentations graphiques de chacune des situations :	Questionnement
 Copyright © 2018 Desmos, Inc. desmos	– Comment le graphique change-t-il si la corde est plus petite ou si elle est plus grosse? – Où se situerait la représentation graphique d'une corde ayant un diamètre de 3 mm? de 2 mm? – Est-ce que ces courbes passent par l'origine? Pourquoi? Est-ce que les sommets des équations des paraboles sont à l'origine? Pourquoi? – Si la corde a un très grand diamètre, quel(s) paramètre(s) doit être ajusté(s) pour obtenir une équation représentative de la situation? Pourquoi?

En conclusion, lorsque les élèves sont appelées et appelés à utiliser différentes représentations, elles et ils voient les avantages de s'en servir pour résoudre des problèmes et développer une meilleure compréhension des concepts et des structures mathématiques. L'utilisation de diverses représentations aide les élèves à faire des liens avec des représentations vues dans d'autres domaines et à construire une plus grande compréhension des concepts mathématiques. De plus, lorsque les apprenantes et apprenants passent d'une représentation à une autre, elles et ils se construisent des arguments mathématiques convaincants afin d'expliquer et de justifier leur stratégie et leur raisonnement.

BIBLIOGRAPHIE

ADIHOU, A., H. SQUALLI, M. SABOYA, M. TREMBLAY, M. et A. LAPOINTE (2016). « Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison », dans L. THEIS, *Actes du colloque EMF 2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, [En ligne], Alger, République algérienne démocratique et populaire : Université d'Alger, p. 206 à 219. [http://emf.unige.ch/files/9814/6416/3706/ACTESEMF2015COMPLET.compressed.pdf]

ALLOPROF ([s. d.]). « Les fonctions affines et linéaires (polynomiales de degré 0 et 1) », [En ligne]. [http://www.alloprof.qc.ca/BV/pages/m1120.aspx]

BEATTY, Ruth, et Catherine D. BRUCE (2012a). *From Patterns to Algebra*, Toronto, Nelson Education.

BEATTY, Ruth, et Catherine D. BRUCE (2012b). *From Patterns to Algebra – Classroom resource*, Toronto, Nelson Education.

BEATTY, Ruth (2014). « Explorer la puissance des suites à motif croissant », *Faire la différence… De la recherche à la pratique*, [En ligne], Ministère de l'Éducation de l'Ontario, Division du rendement des élèves, Monographie n° 55, Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/inspire/research/WW_ExploringPowerFr.pdf]

CHAMPLAIN, Denis de, Pierre MATHIEU et Hélène TESSIER (1999). *Petit lexique mathématique*, Mont-Royal, Québec, Modulo Éditeur, p. 232.

EduGAINS. *Posters for Mathematical Processes*, [En ligne]. [http://www.edugains.ca/newsite/math/mathprocesses.html]

KURZ, Terri (2017). « Finding Linear and Quadratic Equations in Integer Patterns », *Mathematics Teacher*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), vol. 110, n° 6, février. © 1908, CCC Republication.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2005a). *Le curriculum de l'Ontario, de la 1re à la 8e année – Mathématiques (révisé)*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/elementary/math18curr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2005 b). *Le curriculum de l'Ontario, 9^{e} et 10^{e} année – Mathématiques (révisé)*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
[http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/secondary/math910curr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO et TFO (2007). « Autour de la table », atelier.on.ca, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
[http://atelier.on.ca/edu/pdf/Mod40_autour_table.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2008a). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4^{e} à la 6^{e} année* – Modélisation et algèbre, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
[http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_MA_456.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2008b). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3^{e} année* – Modélisation et algèbre, Fascicule 2 – *Situations d'égalité*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, p. 90.
[http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_MA_M_3_fasc2.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010). *Faire croître le succès – Évaluation et communication du rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario*, 1re édition, 1re – 12^{e} année, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
[http://www.edu.gov.on.ca/fre/policyfunding/growSuccessfr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2011). *Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques M-12*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
[http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/FoundationPrincipalsFr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2013). *Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique M-12*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
[http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebraFr.pdf]

NGUYEN, F. (2015). « 41-60 », Visual Patterns, [En ligne].
[http://www.visualpatterns.org/41-60.html]

ORGANISATION DE COOPÉRATION ET DE DÉVELOPPEMENT ÉCONOMIQUES ([s. d.]). « PISA Mathématiques – Exemples d'unités de test de PISA 2000 et PISA 2003 », [Paris], OCDE Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA).

RADFORD, L., S. DEMERS et I. MIRANDA (2009). *Processus d’abstraction en mathématiques – Repères pratiques et conceptuels*, [En ligne], [Toronto; Sudbury], Imprimeur de la Reine pour l’Ontario et Université Laurentienne. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/abstraction.pdf]

SMALL, Marian (2018). *It is not the task!; It’s the follow-up!*, [En ligne], présenté à l’Ontario Association for Mathematics Education (OAME), One, Two.. Infinity. [http://www.onetwoinfinity.ca/wp-content/uploads/2018/05/OAMEfeatured.pdf]

VAN DE WALLE, John A., et LouAnn H. LOVIN. (2008). *L’enseignement des mathématiques – L’élève au centre de son apprentissage*, tome 3, Montréal, ERPI, ISBN 978-2-7613-2343-7.